

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Механіко-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та оптимізації

Борщ В. Л.

КАНОНІЧНІ ТИПИ
ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ
З ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

Дніпро
2025

УДК 517.9

Б83

*Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
(протокол № від червня 2025)*

Рецензенти

П. І. Когут — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара

В. Б. Говоруха — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, фізики і загально інженерних дисциплін Дніпровського державного аграрно-економічного університету

В авторській редакції

Борщ В. Л.

**КАНОНІЧНІ ТИПИ
ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ
З ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ**

Поданий теоретичний матеріал з дисципліни «Рівняння математичної фізики», який стосується визначення канонічних типів лінійних рівнянь на площині в довільних змінних та перетворення рівнянь до відповідних канонічних подань; приклади та задачі для самостійного розв'язування доповнюють викладене.

Для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 111 Математика, 112 Статистика, 113 Прикладна математика та 124 Системний аналіз факультетів механіко-математичного і прикладної математики та інформаційних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

© Борщ В. Л., 2025

Зміст

Вступ	4
1 Рівняння в частинних похідних першого та другого порядків	5
2 Відображення областей на площині	7
2.1 Умови взаємно-однозначного відображення	7
2.2 Приклади взаємно-однозначного відображення	11
3 Загальне перетворення незалежних змінних	16
3.1 Загальна заміна незалежних змінних в лінійному рівнянні . . .	17
3.2 Приклади загальної заміни незалежних змінних	19
4 Канонічне перетворення незалежних змінних	21
4.1 Канонічна заміна незалежних змінних в лінійному рівнянні . .	21
4.2 Алгоритм канонічної заміни незалежних змінних	30
4.3 Приклади канонічної заміни незалежних змінних	34
5 Задачі для самостійної роботи	45
Бібліографічний опис	48

Вступ

Навчальна дисципліна «Рівняння математичної фізики» входить до відповідних освітньо-професійних програм для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 111 Математика, 112 Статистика, 113 Прикладна математика та 124 Системний аналіз, як обов'язкова компонента циклу професійної підготовки. Серед професійних компетенцій освітніх програм за вказаними спеціальностями вивчення математичних моделей фізичних явищ, розробка та вивчення математичних методів розв'язання прикладних задач, тощо, посідають далеко не останні місця. Програма навчальної дисципліни «Рівняння математичної фізики» задовольняє ці вимоги завдяки значному переліку математичних моделей фізичних явищ та задач, які пояснюють ці моделі.

Знайомству з різноманітними моделями математичної фізики зазвичай передують знайомство з канонічними типами лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних на площині (від двох незалежних змінних). Цей крок обумовлений тим, що безумовно до канонічного типу рівняння неможливо поставити відповідну задачу (граничну або крайову) і розв'язати її. Задача приведення лінійного рівняння до канонічного виду (подання) в даному посібнику подана в такий спосіб.

В *першому* розділі наведені означення рівнянь на площині першого та другого порядку, квазілінійних, лінійних із довільними та сталими коефіцієнтами (лінійні рівняння математичної фізики, які складають основу будь-якого стандартного курсу, мають порядок не вище другого).

В *другому* розділі розглянута задача гладкого перетворення околівок точок на площині (гладкої локальної заміни координат на площині). В *третьому* розділі розглянута задача *довільної* локальної гладкої заміни незалежних змінних в лінійному диференціальному рівнянні в частинних похідних.

В *четвертому* розділі розглянута задача *керованої* локальної гладкої заміни незалежних змінних в лінійному диференціальному рівнянні в частинних похідних, внаслідок якої головна частина лінійного рівняння суттєво спрощується, причому можливі тільки три певні спрощення, які визначають *канонічні типи* рівняння (*гіперболічний, параболічний та еліптичний*) і відповідні *канонічні види* (подання) лінійних рівнянь.

В *п'ятому* розділі наведені задачі для самостійної роботи до всіх попередніх розділів.

Виходячи з обмеженого обсягу видання, допоміжні та довідкові відомості, а також приклади, задачі і розв'язки окремих задач подані дрібним шрифтом.

1 Рівняння першого та другого порядків

Означення 1.1. Співвідношення виду

$$\mathcal{F}\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{D}, \quad (1.1)$$

де похідні функції \mathcal{F} за двома останніми аргументами не обертаються в нуль в жодній точці області \mathcal{D} , називається диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку відносно функції $u(x, y)$. \square

Означення 1.2. Диференціальне рівняння (1.1) називається *лінійним відносно похідних* або *квазілінійним*, якщо воно має подання

$$a_1(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = \Phi_1(x, y, u), \quad (1.2)$$

де коефіцієнти a_1, a_2 і член Φ_1 суть функції тих самих змінних, причому коефіцієнти ніде не обертаються в нуль *разом*, тобто $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$. \square

Означення 1.3. Диференціальне рівняння (1.1) називається *лінійним (із змінними коефіцієнтами)*, якщо воно має подання

$$a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + a_*(x, y) u = f(x, y), \quad (1.3)$$

де коефіцієнти a_1, a_2, a_* і вільний член f (права частина) визначені в \mathcal{D} , причому коефіцієнти a_1, a_2 ніде не обертаються в нуль *разом*. \square

Означення 1.4. Диференціальне рівняння $u(x, y)$ (1.1) називається *лінійним із сталими коефіцієнтами*, якщо воно має вигляд

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_* u = f(x, y), \quad (1.4)$$

де коефіцієнти a_1, a_2, a_* суть сталі, а функція $f(x, y)$ визначена в \mathcal{D} . \square

Іноді будемо записувати лінійні диференціальні рівняння (1.3) або (1.4) подібно до (1.2)

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} = \Phi_1, \quad (1.5)$$

де функція Φ_1 є такою

$$\Phi_1(x, y, u) = f(x, y) - a_* u, \quad (1.6)$$

а коефіцієнти a_1, a_2, a_* суть функції незалежних змінних (x, y) або сталі.

Означення 1.5. Лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку (1.3) або (1.4) називається *однорідним*, якщо $f(x, y) \equiv 0$. \square

Означення 1.6. Співвідношення виду

$$\mathcal{F}\left(x, y, u, \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_1, \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_2, \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}}_3, \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}_3, \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}}_3, \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}}_2\right) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{D}, \quad (1.7)$$

де похідні функції \mathcal{F} за аргументами 1, 2 або/та 3 не обертаються в нуль в жодній точці області \mathcal{D} , називається диференціальним рівнянням в частинних похідних другого порядку відносно функції $u(x, y)$. \square

Означення 1.7. Диференціальне рівняння (1.7) називається *лінійним відносно старших похідних*, або *квазілінійним*, якщо воно має вигляд

$$a_{1,1}\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2}\left(\cdot\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{2,2}\left(\cdot\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = \Phi_2\left(\cdot\right), \quad (1.8)$$

де коефіцієнти $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}$ і член Φ_2 суть функції тих самих змінних, причому коефіцієнти ніде не обертаються в нуль *разом*. \square

Означення 1.8. Диференціальне рівняння (1.7) називається *лінійним (із змінними коефіцієнтами)*, якщо воно має вигляд

$$a_{1,1}(\cdot) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2}(\cdot) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{2,2}(\cdot) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + a_1(\cdot) \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(\cdot) \frac{\partial u}{\partial y} + a_*(\cdot) u = f(\cdot), \quad (1.9)$$

де коефіцієнти $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_1, a_2, a_*$ і вільний член f (права частина) визначені в \mathcal{D} як функції змінних (x, y) , причому коефіцієнти $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}$ ніде не обертаються в нуль *разом*. \square

Означення 1.9. Диференціальне рівняння (1.7) називається *лінійним із сталими коефіцієнтами*, якщо воно має вигляд

$$a_{1,1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_* u = f(x, y), \quad (1.10)$$

де коефіцієнти рівняння $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_1, a_2, a_*$ суть сталі, а функція $f(x, y)$ визначена в області \mathcal{D} . \square

Для зручності будемо записувати лінійні диференціальні рівняння (1.9), (1.10) подібно до подання (1.8)

$$a_{1,1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = \Phi_2, \quad (1.11)$$

де члени в лівій частини називаються *головною частиною* рівняння, функція Φ_2 є такою

$$\Phi_2 \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) - a_\star u - a_1 \frac{\partial u}{\partial x} - a_2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.12)$$

а коефіцієнти $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_1, a_2, a_\star$ суть функції незалежних змінних (x, y) або сталі.

Означення 1.10. Лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку (1.9) або (1.10) називається *однорідним*, якщо $f(x, y) \equiv 0$. \square

Зауваження 1.1. Оскільки класичний розв'язок рівняння в частинних похідних другого порядку є двічі неперервною функцією, в означенні 1.6 мішані похідні двох різновидів вважатимемо тотожними, отже у всіх наступних означеннях збережена тільки мішана похідна одного різновиду. \square

2 Відображення областей на площині

2.1 Умови взаємно-однозначного відображення

Розглянемо дві площини, на одній з яких уведена декартова система координат Oxy , а на іншій — $Q\xi\eta$ (рис. 2.1).

Нехай в площині з системою координат $Q\xi\eta$ (далі — площині $\xi\eta$) обрана деяка обмежена область \mathcal{G} , в якій визначені неперервні функції

$$\begin{cases} x = p_1(\xi, \eta), \\ y = q_1(\xi, \eta), \end{cases} \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{G}. \quad (2.1)$$

Якщо різним точкам області \mathcal{G} в площині $\xi\eta$, згідно (2.1), будуть відповідати різні точки в площині з системою координат Qxy (далі — площині xy), тоді у разі, коли точка з координатами (ξ, η) «пробігатиме» всю область \mathcal{G} , відповідна точка з координатами (x, y) «заповнюватиме» деяку область \mathcal{D}

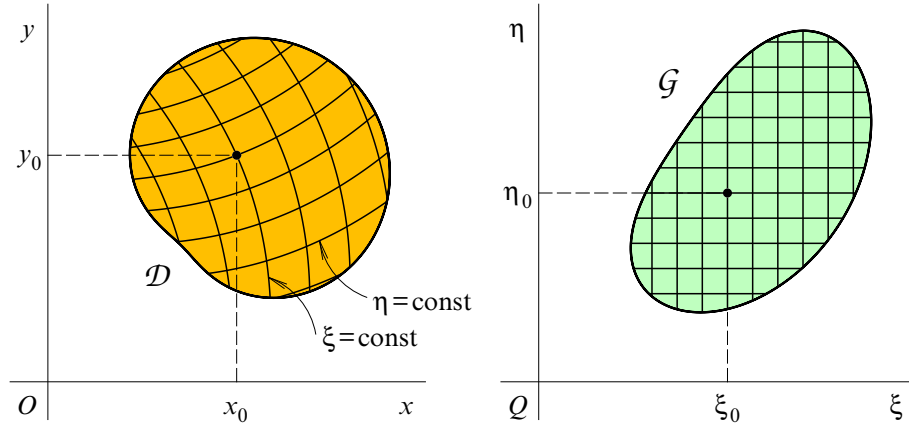


Рис. 2.1. Взаємно однозначне відображення (2.1) області \mathcal{G} в площині $\xi\eta$ на область \mathcal{D} в площині xy : 1) точка $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{G}$ відображається в точку $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$; 2) прямолінійна координатна сітка в площині $\xi\eta$ відображається в криволінійну координатну сітку в площині xy . Відстань між двома сусідніми лініями $\xi = \text{const}$ та $\eta = \text{const}$ на площині $\xi\eta$ дорівнює відповідно $\Delta\xi$ та $\Delta\eta$ (образи цих ліній показані також на площині xy)

в площині xy . Інакше кажучи, функції (2.1) взаємно однозначно відображують область \mathcal{G} в площині $\xi\eta$ на область \mathcal{D} в площині xy (рис. 2.1).

Оберемо довільно точку $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{G}$, якій, згідно (2.1), відповідає точка $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Якщо підставити значення ξ_0 в функції (2.1)

$$\begin{cases} x = p_1(\xi_0, \eta), \\ y = q_1(\xi_0, \eta), \end{cases}$$

матимемо рівняння лінії, називаної η -лінією (тому, що уздовж цієї лінії змінюється тільки координата η , а $\xi = \text{const}$); якщо ж підставити значення η_0

$$\begin{cases} x = p_1(\xi, \eta_0), \\ y = q_1(\xi, \eta_0), \end{cases}$$

матимемо рівняння лінії, називаної ξ -лінією (тому, що уздовж цієї лінії змінюється тільки координата ξ , а $\eta = \text{const}$). Обидві лінії проходять через точку (ξ_0, η_0) (рис. 2.1).

Припустимо, що існують функції

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y), \\ \eta = \psi_1(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in \mathcal{D}, \quad (2.2)$$

які однозначно відображують область \mathcal{D} в площині xy на область \mathcal{G} в площині $\xi\eta$. Якщо підставити значення x_0 в функції (2.2)

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x_0, y), \\ \eta = \psi_1(x_0, y), \end{cases}$$

матимемо рівняння лінії, названої y -лінією (тому, що уздовж цієї лінії змінюється тільки координата y , а $x = \text{const}$); якщо ж підставити значення y_0

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y_0), \\ \eta = \psi_1(x, y_0), \end{cases}$$

матимемо рівняння лінії, названої x -лінією (тому, що уздовж цієї лінії змінюється тільки координата x , а $y = \text{const}$). Обидві лінії проходять через точку (x_0, y_0) (рис. 2.2).

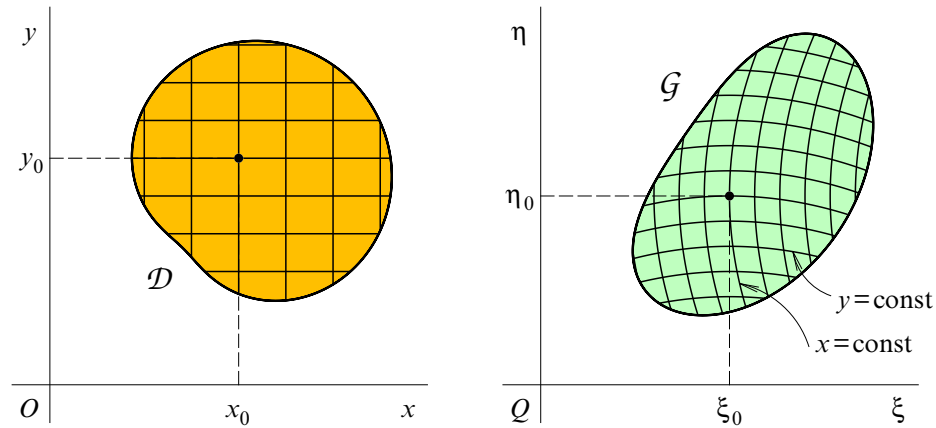


Рис. 2.2. Взаємно однозначне відображення (2.2) області \mathcal{D} в площині xy на область \mathcal{G} в площині $\xi\eta$: 1) точка $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ відображається в точку $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{G}$; 2) прямолінійна координатна сітка в площині xy відображається в криволінійну координатну сітку в площині $\xi\eta$. Відстань між двома сусідніми лініями $x = \text{const}$ та $y = \text{const}$ на площині xy дорівнює відповідно Δx та Δy (образи цих ліній показані також на площині $\xi\eta$)

Очевидно, що координати (ξ, η) точок області \mathcal{G} в площині $\xi\eta$ суть декартові ортогональні, а відповідні ξ - та η -лінії в площині xy суть «криволінійні» координатні в області \mathcal{D} ; так само координати (x, y) точок області \mathcal{D} в площині xy суть декартові ортогональні, а відповідні x - та y -лінії в площині $\xi\eta$ суть «криволінійні» координатні в області \mathcal{G} . Отже, задача взаємно однозначного відображення областей може бути тлумачена як задача уведення криволінійних координат замість декартових (такі криволінійні координати можуть бути більш зручними, ніж декартові, наприклад, через те,

що границя області, повністю або частково, буде утворена відповідними криволінійними координатними лініями).

Тобто, задача уведення криволінійних координат зводиться до відображення областей за допомогою функцій (2.1), (2.2). Для останніх недостатньо бути не тільки неперервними, а навіть неперервно диференційованими, насправді вони мають задовольняти певні умови, на які вказує відома з дійсного двовимірного аналізу локальна

Теорема 2.1. *Нехай:* 1) функції

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y), \\ \eta = \psi_1(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0), \quad (2.3)$$

задають *пряме* неперервно диференційоване відображення $\mathcal{O}(x_0, y_0) \rightarrow \mathcal{O}(\xi_0, \eta_0)$ (тоді окіл точки (x_0, y_0) *однозначно і неперервно* відображається на окіл точки (ξ_0, η_0)); 2) якобіан *прямого* відображення (або *прямого* перетворення координат)

$$J(x, y) = \left| \frac{\partial(\phi_1, \psi_1)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0), \quad (2.4)$$

не обертається в нуль або нескінченість в $\mathcal{O}(x_0, y_0)$; *тоді:* 1) існують обернені (взагалі *неявні*) функції

$$\begin{cases} x = p_1(\xi, \eta), \\ y = q_1(\xi, \eta), \end{cases} \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{O}(\xi_0, \eta_0), \quad (2.5)$$

які задають *обернене* неперервно диференційоване відображення $\mathcal{O}(\xi_0, \eta_0) \rightarrow \mathcal{O}(x_0, y_0)$; 2) якобіан *оберненого* відображення (або *оберненого* перетворення координат)

$$I(\xi, \eta) = \left| \frac{\partial(p_1, q_1)}{\partial(\xi, \eta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \xi} & \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial q_1}{\partial \xi} & \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \end{vmatrix}, \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{O}(\xi_0, \eta_0), \quad (2.6)$$

також не обертається в нуль або нескінченність, причому якобіани задовольняють тотожність

$$J(x, y) I(\xi, \eta) = 1, \quad (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0), \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{O}(\xi_0, \eta_0), \quad (2.7)$$

згідно (2.3), (2.5). \square

Зауваження 2.1. В теоремі 2.1 мова йде тільки про відображення функціями (2.3), (2.5) околів точок, тобто «малих» областей. У разі, якщо умови теореми задовільнені при відображенні функціями (2.1), (2.2) «великих» областей, бажано перевіряти «руками» взаємну однозначність перетворень, яка для «великих» областей може не справджуватися, оскільки теорема 2.1 є *короткозорою*, тобто враховує тільки локальну гладкість функцій (2.3), (2.5), проте, не *далекозорою*, тому зовсім не бере до уваги інші властивості цих функцій, як можуть заважати однозначності перетворення (*the blind leading the blind*), наприклад, періодичність (див. наведений нижче приклад 2.1). \square

Зауваження 2.2. Нагадаємо геометричне тлумачення якобіанів $J(x, y)$, $I(\xi, \eta)$. Перший виражає відношення площ околів $\mathcal{O}(\xi_0, \eta_0)$ та $\mathcal{O}(x_0, y_0)$, а другий — обернене відношення, звідки і впливає тотожність (2.7). Оскільки вказані околи на рис. 2.1 та рис. 2.2 не показані, їх можна уявити в такий спосіб — для відображення (2.5) за окіл $\mathcal{O}(\xi_0, \eta_0)$ взяти прямокутник з вершинами в точках $(\xi_0 \mp \Delta\xi, \eta_0 \mp \Delta\eta)$ (Δ означає прирости відповідних змінних), тоді околом $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ буде криволінійний прямокутник, утворений чотирма сітковими комірками, всередині якого знаходиться точка (x_0, y_0) (див. рис. 2.1); для відображення (2.3) за окіл $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ взяти прямокутник з вершинами в точках $(x_0 \mp \Delta x, y_0 \mp \Delta y)$, тоді околом $\mathcal{O}(\xi_0, \eta_0)$ буде криволінійний прямокутник, утворений чотирма сітковими комірками, всередині якого знаходиться точка (ξ_0, η_0) (див. рис. 2.2). \square

Зауваження 2.3. В теоремі 2.1, а також перед нею, позначення функцій, які уводять пряме та обернене перетворення змінних, мають показчик «1». Уведення показчика «1» необхідно через те, що надалі використаємо подвійне перетворення змінних, для чого додатково уведемо показчик «2» . \square

2.2 Приклади взаємно-однозначного відображення

Приклад 2.1. Нехай в площині введені декартові (x, y) і полярні $(\xi, \eta) \equiv (r, \varphi)$ координати (незалежні змінні), *тоді*, як відомо, існують перетворення (відображення): *обернене* $(r, \varphi) \rightarrow (x, y)$

$$\begin{cases} x = p_1(r, \varphi) = r \cos \varphi, \\ y = q_1(r, \varphi) = r \sin \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (2.8)$$

а також пряме $(r, \varphi) \leftarrow (x, y)$

$$\begin{cases} r = \phi_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, & -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \\ \varphi = \psi_1(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, y < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.9)$$

де скінчені, напівнескінчені або нескінчені проміжки вказують не відображувані області, на відміну від (2.1), (2.2), а відповідні області визначення функцій.

Якобіани перетворень (2.8), (2.9) відповідно суть такі

$$I(r, \varphi) = \left| \frac{\partial(p_1, q_1)}{\partial(r, \phi)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial r} & \frac{\partial p_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial q_1}{\partial r} & \frac{\partial q_1}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & +r \cos \phi \end{vmatrix} = r, \quad (2.10)$$

$$J(x, y) = \left| \frac{\partial(\phi_1, \psi_1)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & +\frac{x}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}. \quad (2.11)$$

Отже, перетворення (2.8) і (2.9), дозволяють відобразити взаємно однозначно окіл будь-якої точки площини xy на певний окіл відповідної точки площини (r, φ) , за винятком точки $(0, 0)$ в площині xy та відрізка $\{0\} \times [0, 2\pi)$ в площині $r\varphi$. А саме, точці $(0, 0)$ відповідає будь-яка точка відрізка та навпаки, будь-якій точці відрізка відповідає точка $(0, 0)$, тобто відсутня взаємно однозначна відповідність, на що, до речі, вказують нульове та нескінченне значення якобіанів (2.10) та (2.11).

Розглянемо існування прямого та оберненого перетворень деяких областей, в тому числі частково або повністю замкнених.

1. Оберемо в площині (r, φ) замкнений прямокутник $[c_1, c_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$, де $0 < c_1 < c_2 < \infty$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$. Внаслідок (2.8) прямокутник (*прообраз*, рис. 2.3, б) взаємно-однозначне відображується на кільцевий сектор площині xy (*образ*, рис. 2.3, а). Навпаки, внаслідок (2.9) прямокутник площини (r, φ) є образом кільцевого сектора (*прообраз*) площині xy .

Якобіан $I(r, \varphi)$ (2.10) не обертається в нуль або нескінченність в замкненому прямокутнику, а якобіан $J(x, y)$ (2.11) — в замкненому кільцевому секторі; в відповідних точках прямокутника і кільцевого сектора справджується тотожність (2.7) на с. 11.

2. Нехай необхідно побудувати взаємно-однозначне відображення повного кільця, внутрішній та зовнішній радіуси якого відповідно суть $r = c_1$, $r = c_2$, де $0 < c_1 < c_2 < \infty$. Якщо

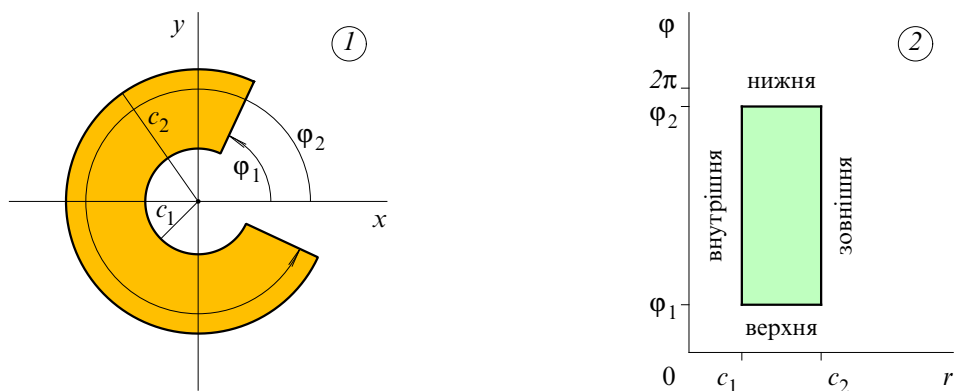


Рис. 2.3. Прямокутник $[c_1, c_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ площини (r, φ) (б) взаємно і однозначно відображається на кільцевий сектор (з радіусами c_1, c_2 між проміянами φ_1, φ_2) площини (x, y) (а). Підписи сторін прямокутника вказують, якій із сторін кільцевого сектора вони відповідають

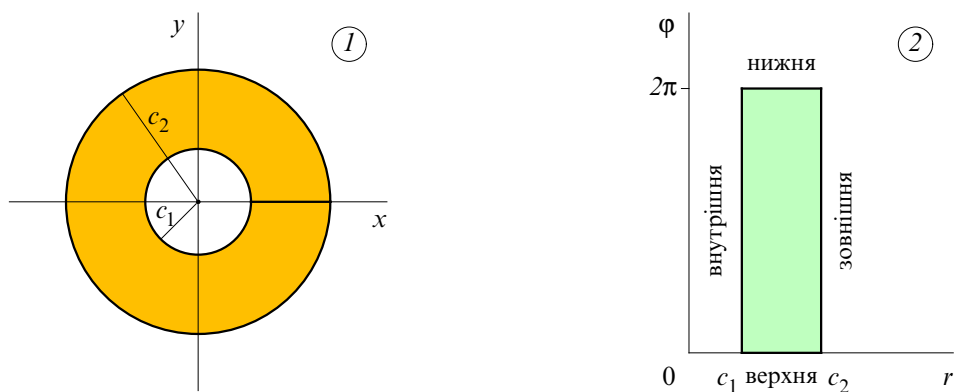


Рис. 2.4. Прямокутник $[c_1, c_2] \times [0, 2\pi]$ площини (r, φ) (б) однозначно відображається на кільце (з радіусами c_1, c_2) площини (x, y) (а). Обернене перетворення не є однозначним, оскільки горизонтальні сторони прямокутника $\varphi = 0$ і $\varphi = 2\pi$ відображаються на відрізок $[c_1, c_2]$ вісі x (зображений «жирною» лінією)

в площині змінних (r, φ) взяти прямокутник $c_1 \leq r \leq c_2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, (рис. 2.4), горизонтальні сторони $\varphi = 0$ і $\varphi = 2\pi$ прямокутника відображатимуться на той самий відрізок $[c_1, c_2]$ вісі x , отже, відображення кільця на прямокутник не є однозначним.

Виключимо тепер горизонтальну сторону $\varphi = 2\pi$ прямокутника, такий прямокутник однозначно відображається на кільце з розрізом уздовж відрізка $[c_1, c_2]$ вісі x (рис. 2.5) (яка з двох сторін розрізу належить кільцю?). Обернене перетворення також є однозначне.

Якобіани (2.10) і (2.11) не обертаються в нуль або нескінченність, відповідно в прямокутнику та кільці, зображених на рис. 2.4 і рис. 2.5, тотожність (2.7) на с. 11 також справджується.

3. Нехай необхідно побудувати взаємно-однозначне відображення диска радіуса c_2 . Для цього недостатньо взяти прямокутник $0 \leq r \leq c_2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, де $0 < c_2 < \infty$ (рис. 2.6), оскільки в прямокутнику та диску, зображених на рис. 2.6, існують множини точок, в яких якобіани (2.10) і (2.11) обертаються в нуль або нескінченність (див. задачу 5.1 на с. 45).

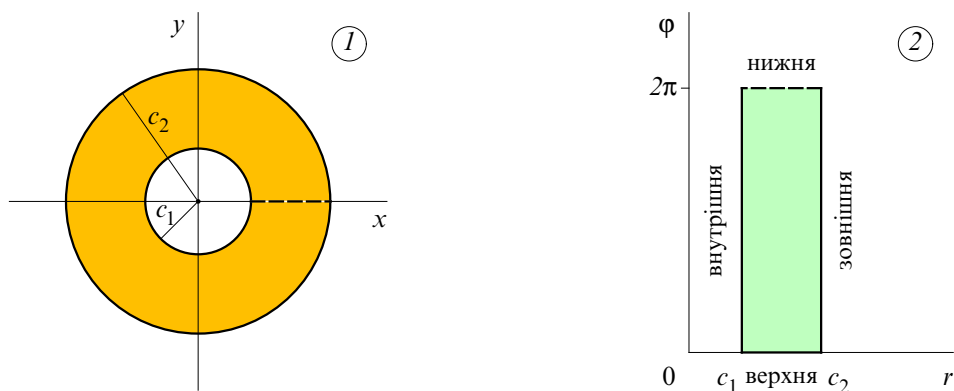


Рис. 2.5. Прямокутник $[c_1, c_2] \times [0, 2\pi]$ (з видаленою горизонтальною стороною $\varphi = 2\pi$) площини (r, φ) (б) взаємно і однозначно відображається на розрізане уздовж відрізка $[c_1, c_2]$ вісі x кільце (з радіусами c_1, c_2) площини (x, y) (а). Підписи сторін прямокутника вказують, якій із сторін кільця і уявного розрізу по вказаному відрізку (зображений «штриховою» лінією) вони відповідають

Чи справджується в таких точках тотожність (2.7) на с. 11?

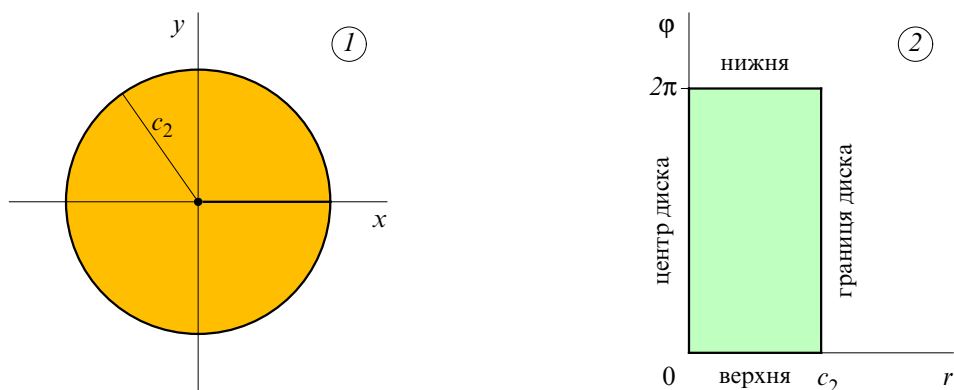


Рис. 2.6. Прямокутник $[0, c_2] \times [0, 2\pi]$ площини (r, φ) (б) однозначно відображається на диск радіуса c_2 площини (x, y) (а). Обернене перетворення не є однозначним, оскільки горизонтальні сторони прямокутника $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ відображаються на відрізок $[0, c_2]$ вісі x , а вертикальна сторона $r = 0$ — в центр диска. Підписи сторін прямокутника вказують, якій із сторін кільця і уявного розрізу по вказаному відрізку (зображений «жирною» лінією) вони відповідають

Для побудови взаємно-однозначного відображення диска радіуса c_2 вилучимо з замкненого прямокутника $[0, c_2] \times [0, 2\pi]$ (рис. 2.6) вертикальну $r=0$ і горизонтальну $\varphi = 2\pi$ сторони. У такому разі образом частково замкненого прямокутника $(0, c_2] \times [0, 2\pi)$ буде диск радіуса c_2 з розрізом уздовж відрізка $[0, c_2]$ вісі x (рис. 2.7).

Якобіани (2.10) і (2.11) не обертаються в нуль або нескінченність відповідно в прямокутнику та диску, зображених на рис. 2.7. ▲

Приклад 2.2. Нехай на площині: 1) уведена декартова система координат Oxy (див. приклад 2.1 на с. 11); 2) на осі Ox обрані дві точки $P_1(-a, 0)$, $P_2(+a, 0)$, називані по-

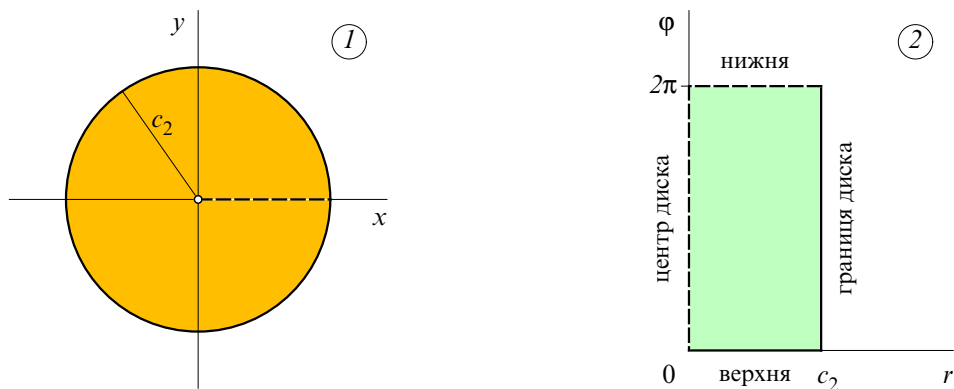


Рис. 2.7. Прямокутник $(0, c_2] \times [0, 2\pi]$ (з вдаленими горизонтальною $\varphi = 2\pi$ і вертикальною $r = 0$ сторонами) площини (r, φ) (б) взаємно і однозначно відображається на розрізаний уздовж відрізка $[0, c_2]$ вісі x диск радіуса c_2 площини (x, y) (а). Підписи сторін прямокутника прямокутника вказують, якій частині диска з розрізом (зображений «штриховою» лінією) вони відповідають

люсами і симетричні відносно точки O ; 3) положення довільної точки $P(x, y)$ на площині відносно полюсів визначено *локальними* полярними координатами (ρ_1, θ_1) та (ρ_2, θ_2) (див. рис. 2.8, 1), *тоді* величини

$$\begin{cases} \rho = \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}, \\ \theta = \pi + \theta_1 - \theta_2, \end{cases} \quad 0 \leq \rho_{1,2} < +\infty, \quad 0 \leq \theta_{1,2} < 2\pi, \quad (2.12)$$

називаються *біполярними* координатами точки P .

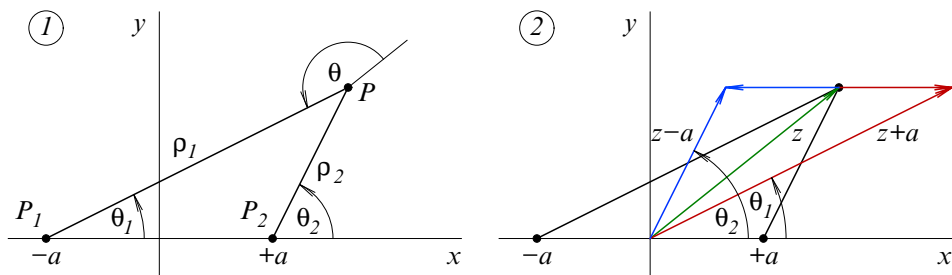


Рис. 2.8. До введення біполярних координат за допомогою формул (2.12) (1) і (2.13) (2): нахили θ_1 та θ_2 біполярних радіусів P_1P та P_2P до осі Ox такі самі, як нахили комплексних векторів $z + a$ та $z - a$ ($z = x + iy$)

Біполярна координата ρ набуває: 1) від'ємних значень в лівій півплощині ($x < 0$); 2) додатних — в правій півплощині ($x > 0$); 3) нульового значення — на прямій $x = 0$; 4) $-\infty < \rho < +\infty$. Біполярна координата θ набуває: 1) від'ємних значень в нижній півплощині ($y < 0$); 2) додатних — в верхній півплощині ($y > 0$); 3) нульового значення — на відрізку $[-a, +a]$ осі Ox ; 4) зовні відрізку $[-a, +a]$ потерпає розрив величини 2π (див. задачу 5.2 на с. 45).

Біполярні координати є також наслідком конформного перетворення площини комплексної змінної z

$$\tau = \ln \frac{a+z}{a-z} = \ln \frac{(x+a)+iy}{(x+a)-iy}, \quad z = x+iy, \quad \tau = \rho + i\theta. \quad (2.13)$$

Насправді, відділимо дійсну і уявну частину комплексної змінної τ

$$\tau = \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2} \exp \left\{ i \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} \right\}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2} \exp \left\{ i \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} \right\}} = \ln \frac{\rho_1 \exp(i\theta_1)}{\rho_2 \exp(i\theta_2)} = \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} + i\theta_1 - i\theta_2, \quad (2.14)$$

тоді матимемо *пряме* перетворення $(\rho, \theta) \leftarrow (x, y)$

$$\begin{cases} \rho = \phi_1(x, y) = \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}, \\ \theta = \psi_1(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} + \pi. \end{cases} \quad (2.15)$$

Тепер обернемо *пряме* перетворення (2.13) в комплексній формі

$$\frac{z}{a} = \frac{e^\tau - 1}{e^\tau + 1} = \frac{\exp\left(+\frac{\tau}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right)}{\exp\left(+\frac{\tau}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sh}\left(+\frac{\tau}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(+\frac{\tau}{2}\right)} = \operatorname{th}\left(+\frac{\tau}{2}\right) \quad (2.16)$$

і відділимо дійсну і уявну частину змінної z , тоді матимемо *обернене* перетворення $(\rho, \theta) \rightarrow (x, y)$

$$\begin{cases} x = p_1(\rho, \theta) = a \frac{\operatorname{sh} \rho}{\operatorname{ch} \rho + \cos \theta}, \\ y = q_1(\rho, \theta) = a \frac{\sin \theta}{\operatorname{ch} \rho + \cos \theta}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Обернене перетворення (2.17) дозволяє також увести перетворення $(r, \varphi) \leftarrow (\rho, \theta)$ (див. задачі 5.2, 5.3 та 5.4 на с. 45). ▲

3 Загальне перетворення незалежних змінних

Постановка та розв'язання граничних задач для лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку від двох незалежних змінних (1.11), (1.12) на с. 7

$$a_{1,1}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{2,2}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = \Phi_2, \quad (3.1)$$

$$\Phi_2 = f(x, y) - a_*(x, y) u - a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} - a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.2)$$

зазвичай потребують відповідного перетворення незалежних змінних.

3.1 Загальна заміна незалежних змінних в лінійному рівнянні

Нехай двічі неперервно диференційована в області \mathcal{D} площини (x, y) функція $u(x, y)$ справджує лінійне диференціальне рівняння другого порядку (3.1), (3.2). Поставимо задачу заміни незалежних змінних (x, y) на незалежні змінні (ξ, η) , принаймні в околі $\mathcal{O}(\xi_0, \eta_0)$ деякої точки (ξ_0, η_0) області \mathcal{D} . «Нові» незалежні змінні $\xi = \phi_1(x, y)$, $\eta = \psi_1(x, y)$, як функції «старих» (x, y) , мають задовольняти умови теореми 2.1.

Спочатку виразимо похідні функції $u(x, y)$ першого та другого порядків за змінними x, y в околі $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) через похідні функції $v(\xi, \eta) := u(\phi_1(\xi, \eta), \psi_1(\xi, \eta))$ за змінними ξ, η в околі $\mathcal{O}(\xi_0, \eta_0)$ точки (ξ_0, η_0) (безпосередньо при диференціюванні вважатимемо, що $u(x, y) := v(\phi_1(x, y), \psi_1(x, y))$, тобто застосуємо обернену заміну змінних (2.3), а саме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \xi}}_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \eta}}_2 \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \xi}}_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \eta}}_2 \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \\ &= \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \xi}}_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}}_{1,2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}}_{2,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \eta}}_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \xi}}_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \eta}}_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \\ &= \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \xi}}_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}}_{1,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}}_{2,1} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \eta}}_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \xi}}_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \eta}}_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \\ &= \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \xi}}_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}}_{1,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}}_{2,1} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \eta}}_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \xi}}_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \eta}}_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y}. \end{aligned}$$

Далі: 1) підставимо одержані вирази для похідних функції $u(x, y)$ за x, y в рівняння (3.1), (3.2); 2) проведемо групування членів з однаковими другими похідними функції $v(\xi, \eta)$ за ξ, η (тобто з однаковими парами показників $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ та $(2, 2)$), враховуючі при цьому рівність мішаних похідних другого порядку; і нарешті 3) запишемо рівняння в змінних ξ, η

$$b_{1,1} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \xi} + 2 b_{1,2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + b_{2,2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \eta} = \Psi_2 \left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta} \right), \quad (3.3)$$

де коефіцієнти *головної частини* перетвореного рівняння (яка складена з похідних функції $v(\xi, \eta)$ другого порядку) становлять такі вирази

$$\begin{cases} b_{1,1}^* = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y}, \\ b_{1,2}^* = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ b_{2,2}^* = a_{1,1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \end{cases} \quad (3.4)$$

всі інші члени (без приведення подібних членів) суть такі

$$\begin{aligned} \Psi_2^* = f - a_* v - a_1 \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)}_2 - a_2 \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)}_2 - \\ - a_{1,1} \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} \right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} \right)}_2 - 2a_{1,2} \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right)}_2 - a_{2,2} \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} \right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} \right)}_2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

а верхній індекс у вигляді зірочки вказує, що відповідні функції мають бути подані в «нових» незалежних змінних (ξ, η) , тобто змінні (x, y) мають бути замінені згідно (2.5) на с. 10.

Функція Ψ_2 після приведення подібних членів набуває такого виду

$$\begin{aligned} \Psi_2^* = f - a_* v - \left(a_{1,1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ - \left(a_{1,1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уведемо допоміжні диференціальні оператори

$$\begin{cases} R[\phi, \psi] = a_{1,1} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ S[\phi] = a_{1,1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \phi}{\partial y}, \end{cases} \quad (3.7)$$

за допомогою яких подамо коефіцієнти (3.4) головної частини та функцію (3.5), (3.6) перетвореного рівняння (3.3) в такому стислому запису

$$b_{1,1}^* = R[\xi, \xi], \quad b_{1,2}^* = R[\xi, \eta], \quad b_{2,2}^* = R[\eta, \eta], \quad b_1^* = S[\xi], \quad b_2^* = S[\eta], \quad (3.8)$$

$$\Psi_2^* = g - a_* v - b_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} - b_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}. \quad (3.9)$$

Зауваження 3.1. Наслідком загального невивордженого перетворення незалежних змінних в лінійному диференціальному рівнянні в частинних похідних (3.1), (3.2) є також лінійне рівняння (3.3), (3.6) (зверніться, за необхідності, до класифікації лінійних диференціальних рівнянь за їх будовою, поданою на с. 6). \square

Зауваження 3.2. Після перетворення лінійного диференціального рівняння (3.1), (3.2) в частинних похідних відносно незалежних змінних (x, y) до такого ж в незалежних змінних (ξ, η) (3.3) коефіцієнти $b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,2}$ (3.4) головної частини та функція Ψ_2 (3.5), (3.6) мають бути подані в «нових» незалежних змінних (ξ, η) (саме на це вказує верхній індекс у вигляді зірочки). Проте, з теореми 2.1 випливає лише існування *оберненого* перетворення (2.5), а не можливість його явного подання. Іншими словами, розв'язати залежності (2.3) відносно «старих» незалежних змінних (x, y) , тобто одержати залежності (2.5), не завжди можливо. \square

3.2 Приклади загальної заміни незалежних змінних

Приклад 3.1. Перетворимо рівняння *Лапласа* в декартових змінних

$$\Delta_{(x,y)} u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3.10)$$

на таке в полярних.

Виконаємо перетворення двома способами.

За *першим* способом повторимо перетворення на с. 17 в такій послідовності:

1) запишемо формули переходу від полярних координат до декартових прямокутних (2.8) на с. 11 та у зворотньому напрямі (2.9)

$$\begin{cases} x = p_1(r, \varphi) = r \cos \varphi, \\ y = q_1(r, \varphi) = r \sin \varphi, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \phi_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \psi_1(x, y) = \arctg \frac{y}{x}; \end{cases} \quad (3.11)$$

2) продиференціюємо обидві частини тотожності $u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: \dot{u}(r, \varphi)$ двічі за змінними x, y (тільки повторно, без мішаних похідних, причому враховуватимемо, що $\dot{u}(r, \varphi)$ при диференціюванні є складною функцією):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \end{cases}$$

причому похідні другого порядку запишемо також в «розгорнутому» виді

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \end{cases} \quad (3.12)$$

3) знайдемо похідні першого і другого порядку змінних (r, φ) (як залежних) за змінними (x, y)

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, & \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{x^2}{r^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = +\frac{y}{r^2} \frac{x}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, & \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{y^2}{r^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = +\frac{x}{r^2}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{x}{r^2} \frac{y}{r}; \end{cases} \quad (3.13)$$

4) підставимо вирази (3.13) в вирази похідних (3.12)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial r} \frac{x}{r} \frac{x}{r} - 2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial \varphi} \frac{x}{r} \frac{y}{r^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial \varphi} \frac{y}{r^2} \frac{y}{r^2} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right) + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{x}{r} \frac{y}{r^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial r} \frac{y}{r} \frac{y}{r} + 2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial \varphi} \frac{y}{r} \frac{x}{r^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial \varphi} \frac{x}{r^2} \frac{x}{r^2} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right) - \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{x}{r^2} \frac{y}{r}; \end{cases} \quad (3.14)$$

5) підставимо одержані вирази похідних (3.14) в рівняння *Лапласа* (3.10) в декартових змінних

$$\begin{aligned} 0 = \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial r} \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{y}{r} \frac{x}{r^2} - \frac{x}{r} \frac{y}{r^2} \right) + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial \varphi} \left(\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2}{r^4} \right) + \\ &+ \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{1}{r} \left(2 - \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} \right) + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \left(\frac{y}{r^2} \frac{x}{r} - \frac{x}{r^2} \frac{y}{r} \right), \end{aligned}$$

звідки після спрощення матимемо шукане подання рівняння *Лапласа* в полярних змінних

$$\Delta_{(r, \varphi)} \dot{u}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} = 0. \quad (3.15)$$

За *другим* способом:

1) прийнемо, що нові змінні суть $\xi = r$, $\eta = \varphi$;

2) врахуємо, що $a_{1,1} = a_{2,2} = 1$, $a_{1,2} = 0$, $a_1 = a_2 = 0$, $a_\star = 0$, $f(x, y) \equiv 0$;

3) скористаємося готовими формулами (3.3), (3.4), (3.8), (3.9), для яких всі необхідні похідні «нових» змінних за «старими» (3.13) вже обчислені (відсутність мішаних похідних не заважатиме, оскільки їм передуює коефіцієнт $a_{1,2} = 0$, див. також (3.6)), отже, матимемо коефіцієнти перетвореного рівняння *Лапласа*

$$\begin{cases} b_{1,1} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} = +\frac{x}{r} \frac{x}{r} + \frac{y}{r} \frac{y}{r} = 1, \\ b_{1,2} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{x}{r} \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r} \frac{x}{r^2} = 0, \\ b_{2,2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = +\frac{y}{r^2} \frac{y}{r^2} + \frac{x}{r^2} \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r^2}, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} b_1 = S[\phi] \stackrel{(3.11)}{=} a_{1,1} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + a_{2,2} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{r} \frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{y^2}{r^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{r} \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{1}{r}, \\ b_2 = S[\psi] \stackrel{(3.11)}{=} a_{1,1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = + \frac{y}{r^2} \frac{x}{r} - \frac{x}{r^2} \frac{y}{r} = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Порівняйте кількість арифметичних дій, необхідних для перетворення за двома способами. Спробуйте перетворити рівняння *Лапласа* в полярних змінних (3.15) на таке в декартових. ▲

4 Канонічне перетворення незалежних змінних

4.1 Канонічна заміна незалежних змінних в лінійному рівнянні

Поставимо задачу спрощення перетвореного рівняння (3.3), (3.4), (3.6) або (3.3), (3.8), (3.9) як задачу обернення в нуль одного або двох коефіцієнтів його *головної частини*. Наприклад, якщо увести незалежну змінну:

1) $\xi = \phi_1(x, y)$, де функція $\phi_1(x, y)$ є розв'язком нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку

$$R[\xi, \xi] = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0), \quad (4.1)$$

матимемо $b_{1,1} = 0$;

2) $\eta = \psi_1(x, y)$, де функція $\psi_1(x, y)$ є розв'язком нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку

$$R[\eta, \eta] = a_{1,1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + a_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0). \quad (4.2)$$

матимемо $b_{2,2} = 0$ (для того, щоб нелінійна природа рівнянь (4.1), (4.2) виявилася прозорою, слід ще раз звернутися до відповідних означень на с. 5).

У разі, якщо диференціальні рівняння (4.1) та (4.2) мають різні розв'язки (фактично це одне і те саме нелінійне рівняння, тому воно може мати більше, ніж один розв'язок), можна перетворити в нуль коефіцієнти $b_{1,1}$ та $b_{2,2}$, а якщо однакові — то тільки один з двох коефіцієнтів (будь-який з них, на вибір). На щастя, існує зв'язок між розв'язанням нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку (4.1), (4.2) та розв'язанням відповідного звичайного диференціального рівняння першого порядку. На цей зв'язок вказує така

Теорема 4.1. Для того, щоб розв'язком нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку

$$a_{1,1} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{2,2} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0), \quad (4.3)$$

була функція $z = \omega(x, y)$, *необхідно* та *достатньо*, щоб звичайне диференціальне рівняння в симетричній формі (тобто записане у вигляді *квадратичної форми* відносно диференціалів dx, dy змінних x, y , серед яких не обрані *залежна* і *незалежна*)

$$a_{1,1} dy dy - 2 a_{1,2} dy dx + a_{2,2} dx dx = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0), \quad (4.4)$$

мало 1-параметричну сім'ю розв'язків (*загальний розв'язок*) $\omega(x, y) = C$. \square

Доведення. Почнемо з обґрунтування *необхідності* твердження. Отже, *нехай* функція $z = \omega(x, y)$ є розв'язком рівняння в частинних похідних (4.3). Запишемо тотожність $\Omega(x, y) = \omega(x, y) - C = 0$, яку розглядатимемо:

1) як неявне подання функції $y = \vartheta(x)$, *тоді*

$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\omega}{\partial x} = -\frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} \neq 0, \quad (4.5)$$

2) як неявне подання функції $x = \theta(y)$, *тоді*

$$\frac{d\Omega}{dy} = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = -\frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{dx}{dy}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial x} \neq 0. \quad (4.6)$$

Далі підставимо вираз (4.5) для частинної похідної функції $\omega(x, y)$ за x в диференціальне рівняння в частинних похідних (4.3), звідки матимемо звичайне диференціальне рівняння відносно функції $y = \vartheta(x)$ (тобто тепер x — *незалежна* змінна, а y — *залежна*)

$$\underbrace{\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)}_{\neq 0} \left[a_{1,1} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2 a_{1,2} \left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{2,2} \right] = 0 \Rightarrow a_{1,1} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2 a_{1,2} \left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{2,2} = 0, \quad (4.7)$$

або вираз (4.6) для частинної похідної функції $\omega(x, y)$ за y , тоді матимемо звичайне диференціальне рівняння відносно функції $x = \theta(y)$ (тобто тепер y — *незалежна* змінна, а x — *залежна*)

$$\underbrace{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)}_{\neq 0} \left[a_{2,2} \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2 a_{1,2} \left(\frac{dx}{dy}\right) + a_{1,1} \right] = 0 \Rightarrow a_{2,2} \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2 a_{1,2} \left(\frac{dx}{dy}\right) + a_{1,1} = 0. \quad (4.8)$$

Обидва звичайних диференціальних рівняння можуть бути перетворені до симетричної форми (4.4): перше рівняння — після множення на $dx dx$, а друге — після множення на $dy dy$ (можливі також перетворення у протилежному напрямку: після ділення симетричної форми (4.4) на $dx dx$ одержимо

рівняння (4.7), а після ділення на $dy\,dy$ — рівняння (4.8)). Це означає, що *необхідність* твердження доведена.

Перейдемо до обґрунтування *достатності* твердження. Нехай $\omega(x, y) = C$ — 1-параметрична сім'я розв'язків звичайного диференціального рівняння (4.4), *тоді* тотожність $\Omega(x, y) = \omega(x, y) - C = 0$ визначає неявну функцію: 1) $y = \vartheta(x)$ або 2) $x = \theta(y)$, і для диференціалу залежної змінної відповідно матимемо:

1) вираз згідно (4.5)

$$dy = -\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial\omega}{\partial x} dx;$$

2) вираз згідно (4.6)

$$dx = -\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial\omega}{\partial y} dy.$$

Тепер підставимо знайдені вирази для dy та dx в звичайне диференціальне рівняння (4.4), звідки одержимо диференціальне рівняння в частинних похідних (4.3). Це означає, що *достатність* твердження доведена. ■

Означення 4.1. *Характеристиками* лінійного диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку (3.1), (3.2), називаються 1-параметричні сім'ї розв'язків звичайного диференціального рівняння (4.4) (тобто звичайних диференціальних рівнянь (4.7) або (4.8)); самі диференціальні рівняння (4.4), (4.7) та (4.8) називаються *рівняннями характеристик*. □

Тобто, теорема 4.1 зводить задачу розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку виду (4.1), (4.2) або (4.3) до задачі розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (4.7) або (4.8) другого степеня відносно похідних. Розв'яжемо останні рівняння відносно похідних за відомою формулою для квадратного алгебраїчного рівняння:

1) нехай $a_{1,1} \neq 0$, тоді з рівняння характеристик (4.7) матимемо

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mp} = \frac{a_{1,2} \mp \sqrt{D}}{a_{1,1}}; \quad (4.9)$$

2) нехай $a_{2,2} \neq 0$, тоді з рівняння характеристик (4.8) матимемо

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\mp} = \frac{a_{1,2} \mp \sqrt{D}}{a_{2,2}}; \quad (4.10)$$

вираз під коренем в (4.9), (4.10) роз'яснює таке

Означення 4.2. Величина

$$D(x, y) = a_{1,2}^2 - a_{1,1} a_{2,2} \quad (4.11)$$

називається *дискримінантом* лінійного диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку (3.1), (3.2). \square

Отже, знак дискримінанта (4.11) визначає кількість характеристик, а згідно теореми 4.1 — кількість розв'язків рівняння в частинних похідних першого порядку (4.3), на чому ґрунтується класифікація, подана в табл. 4.1. Внаслідок цього виникає запитання стосовно типу перетвореного рівняння, якщо його визначити за дискримінантом $E = b_{1,2}^2 - b_{1,1} b_{2,2}$?

Табл. 4.1. Локальна класифікація лінійних рівнянь другого порядку (3.1), (3.2) на с. 16 за знаком дискримінанту $D(x, y)$ (4.11)

$D = a_{1,2}^2 - a_{1,1} a_{2,2}$	кількість характеристик	тип рівняння
$D > 0$	дві дійсних	гіперболічний
$D = 0$	одна дійсна	параболічний
$D < 0$	дві комплексно-спряжені	еліптичний

Теорема 4.2. При невивроженому перетворенні (2.3), (2.5) незалежних змінних, дискримінанти рівнянь в «старих» і «нових» незалежних змінних зв'язані рівностями

$$\begin{cases} D(x, y) = a_{1,2}^2 - a_{1,1} a_{2,2} = I^2(\xi, \eta) (b_{1,2}^2 - b_{1,1} b_{2,2}) = I^2(\xi, \eta) E(\xi, \eta), \\ E^*(\xi, \eta) = b_{1,2}^2 - b_{1,1} b_{2,2} = J^2(x, y) (a_{1,2}^2 - a_{1,1} a_{2,2}) = J^2(x, y) D(x, y), \end{cases} \quad (4.12)$$

де $J(x, y)$, $I(\xi, \eta)$ — якобіани прямого (2.3) і оберненого (2.5) перетворень. \square

Доведення. Складемо вираз дискримінанта перетвореного рівняння (3.3) в «нових» незалежних змінних ξ, η

$$\begin{aligned}
E^*(\xi, \eta) \equiv b_{1,2}^2 - b_{1,1} b_{2,2} = & \left[a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]^2 - \\
& - \left[a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right] \times \\
& \times \left[a_{1,1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right],
\end{aligned}$$

звідки (після розкриття дужок та перегрупування доданків) матимемо другу рівність (4.12)

$$E^*(\xi, \eta) = \dots = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 (a_{1,2}^2 - a_{1,1} a_{2,2}) \equiv J^2(x, y) D(x, y).$$

Першу рівність (4.12) матимемо з щойно доведеної другої, з урахуванням тотожності $J(x, y) I(\xi, \eta) \equiv 1$ (2.7) на с. 11. ■

Теорема 4.3. При невиродженому перетворенні (2.3), (2.5) незалежних змінних тип лінійного диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку (3.1), (3.2) не змінюється. □

Доведення безпосередньо ґрунтується на рівностях (4.12), з яких випливає, що при невиродженому перетворенні незалежних змінних знак дискримінанта не змінюється. ■

Зауваження 4.1. Теореми 4.2 та 4.3 (твердження та доведення) «обертаються» навколо означення 4.2 дискримінанта рівняння характеристик, проте залишаються вірними для будь-якого невиродженого перетворення незалежних змінних, оскільки не ґрунтуються на означенні 4.1 характеристик. □

Зауваження 4.2. Нагадаємо, що перетворення незалежних змінних (2.3), (2.5) на с. 10 є локальним, тобто окіл $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) відображається на окіл $\mathcal{O}(\xi_0, \eta_0)$ точки (ξ_0, η_0) (див. також зауваження 2.1 на с. 11), отже локальною є також класифікація, уведена в табл. 4.1. У такому разі лінійне диференціального рівняння другого порядку (3.1), (3.2) має деякий певний тип в околі точки (x_0, y_0) , проте в околі іншої точки (x_1, y_1) , близької до (x_0, y_0) , рівняння може мати інший тип. У разі, коли знак дискримінанта зберігається в деякій «великій» області, в останній рівняння матиме певний тип. Можливо також, що рівняння матиме певний тип в області \mathcal{D} , в якій визначені його коефіцієнти та права частина, у разі, якщо в цій області знак дискримінанта не змінюється. □

Розглянемо наслідки невідродженого перетворення (2.3), (2.5) незалежних змінних, яке ґрунтується на розв'язках рівнянь характеристик (тобто керованого перетворення, на відміну від загального невідродженого перетворення).

В області гіперболічності рівняння характеристик (4.4) має дві дійсно-значні 1-параметричні сім'ї розв'язків $\phi_1(x, y) = C_1$, $\psi_1(x, y) = C_2$, де функції $\xi = \phi_1(x, y)$, $\eta = \psi_1(x, y)$, згідно твердження 4.1, задовольняють рівняння (4.1), (4.2): $R[\xi, \xi] = 0$, $R[\eta, \eta] = 0$. Отже, в нових незалежних змінних (ξ, η) перетворене рівняння (3.3), (3.4), (3.6) набуде такого подання

$$2b_{1,2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \Psi_2 \left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta} \right).$$

Поділивши обидві частини останнього рівняння на $2b_{1,2}$ (обґрунтуйте можливість цього) одержимо *перший канонічний вид* лінійного диференціального рівняння другого порядку (3.1), (3.2) в області гіперболічності

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \Psi_2^\circ \left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta} \right), \quad \Psi_2^\circ = \frac{\Psi_2}{2b_{1,2}}. \quad (4.13)$$

Уведемо ще одну пару незалежних змінних (α, σ)

$$\begin{cases} \xi = \alpha + \sigma, \\ \eta = \alpha - \sigma, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \\ \sigma = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \end{cases} \quad (4.14)$$

і залежну $w(\alpha, \sigma) := v(\xi(\alpha, \sigma), \eta(\alpha, \sigma))$, тоді для похідних функції $v(\xi, \eta) = w(\alpha(\xi, \eta), \sigma(\xi, \eta))$ матимемо такі вирази

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \xi} &= \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} &= \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \alpha} + \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma \partial \alpha} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \sigma} - \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma \partial \sigma} \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} \right). \end{aligned}$$

Після підстановки виразу для змішаної похідної функції $v(\xi, \eta)$ в (4.13) одержимо *другий канонічний вид* лінійного диференціального рівняння другого порядку (3.1), (3.2) в області гіперболічності

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} = \Psi_2^* \left(\alpha, \sigma, w, \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right), \quad (4.15)$$

де

$$\Psi_2^* = 4\Psi_2^\circ \left[\xi(\alpha, \sigma), \eta(\alpha, \sigma), v(\xi(\alpha, \sigma), \eta(\alpha, \sigma)), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right) \right].$$

В області *параболічності* рівняння характеристик (4.4) має одну дійснозначну 1-параметричну сім'ю розв'язків $\phi_1(x, y) = C$, де функція $\phi_1(x, y)$, згідно твердження 4.1, задовольняє тільки перше з двох рівнянь (4.1), (4.2): $R[\phi_1, \phi_1] = 0$, $R[\phi_1, \phi_1] \neq 0$. Введемо нові незалежні змінні $\xi = \phi_1(x, y)$, $\eta = \psi_1(x, y)$, де функцію $\psi_1(x, y)$ оберемо так, щоб якобіан J (2.4) *прямого* перетворення не обертався в нуль або нескінченність (це можна зробити багатьма способами), тоді перетворене рівняння (3.3), (3.4), (3.6) набуде такого подання

$$b_{2,2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Psi_2 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Поділивши обидві частини останнього рівняння на $b_{2,2}$ (обґрунтуйте можливість цього) одержимо *канонічний вид* лінійного диференціального рівняння другого порядку (3.1), (3.2) в області параболічності

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Psi_2^\circ \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad \Psi_2^\circ = \frac{\Psi_{2,P}}{b_{2,2}}. \quad (4.16)$$

В області *еліптичності* праві частини рівнянь характеристик (4.9), (4.10), розв'язаних відносно похідних, суть комплексно спряжені; звідки впливає комплексна спряженість 1-параметричних сімей розв'язків рівняння характеристик (4.4)

$$\begin{cases} \phi_1(x, y) = C, \\ \psi_1(x, y) \equiv \bar{\phi}_1(x, y) = \bar{C}, \end{cases}$$

а також відповідних «нових» незалежних змінних

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y) = \operatorname{Re}(\phi_1(x, y)) + i \operatorname{Im}(\phi_1(x, y)), \\ \eta = \bar{\phi}_1(x, y) = \operatorname{Re}(\phi_1(x, y)) - i \operatorname{Im}(\phi_1(x, y)). \end{cases}$$

Оскільки доведення теореми 4.1 не розрізняє дійсно- та комплекснозначні розв'язки рівняння характеристик (4.4), в нових змінних перетворене рівняння (3.3), (3.4), (3.6) набуватиме того ж самого канонічного виду, що і в області *гіперболічності*

$$2b_{1,2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \Psi_2 \left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta} \right),$$

причому коефіцієнт $b_{1,2}$ і функція Ψ_2 одержаного рівняння також суть комплекснозначні.

Проте, приведення рівняння еліптичного типу до канонічного виду з дійснозначними коефіцієнтами є можливим. Насправді, 1) уведемо *дійсні* незалежні змінні (α, σ)

$$\begin{cases} \xi = \alpha + i\sigma, \\ \eta = \alpha - i\sigma, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \frac{1}{2}(\phi_1(x, y) + \bar{\phi}_1(x, y)) = \phi_2(x, y), \\ \sigma = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = \frac{1}{2i}(\phi_1(x, y) - \bar{\phi}_1(x, y)) = \psi_2(x, y); \end{cases} \quad (4.17)$$

2) в виразах для коефіцієнтів $b_{1,1}$, $b_{1,2}$, $b_{2,2}$ (3.4) подамо похідні комплексних незалежних змінних (ξ, η) відносно «старих» незалежних змінних (x, y) *через* похідні дійсних незалежних змінних (α, σ) відносно (x, y)

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \sigma}{\partial x}, & \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} - i \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \sigma}{\partial y}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} - i \frac{\partial \sigma}{\partial y}; \end{cases}$$

3) утворимо добутки поданих вище похідних

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + i \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + i \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + i \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + i \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + i \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + i \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - i \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - i \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - i \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - i \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - i \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - i \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \end{cases}$$

та 4) підставимо ці добутки в вирази для коефіцієнтів $b_{1,1}$, $b_{1,2}$, $b_{2,2}$ (3.8)

$$\begin{cases} b_{1,1}^* = R[\xi, \xi] = R[\alpha, \alpha] - R[\sigma, \sigma] + 2i R[\alpha, \sigma] = 0, \\ b_{1,2}^* = R[\xi, \eta] = R[\alpha, \alpha] + R[\sigma, \sigma] \neq 0, \\ b_{2,2}^* = R[\eta, \eta] = R[\alpha, \alpha] - R[\sigma, \sigma] - 2i R[\alpha, \sigma] = 0, \end{cases}$$

звідки матимемо

$$R[\alpha, \alpha] = R[\sigma, \sigma] \neq 0, \quad R[\alpha, \sigma] = 0. \quad (4.18)$$

Тепер уведемо замість «старих» (x, y) «нові» незалежні змінні (α, σ) , причому перетворення змінних:

1) *пряме*

$$\begin{cases} \alpha = \phi_2(x, y), \\ \sigma = \psi_2(x, y), \end{cases} \quad (4.19)$$

2) *обернене*

$$\begin{cases} x = p_2(\alpha, \sigma), \\ y = q_2(\alpha, \sigma), \end{cases} \quad (4.20)$$

очевидно, задовольняють умовам теореми 2.1 на с. 10 (поясніть, чому). Далі запровадимо пряме перетворення незалежних змінних в лінійному диференціальному рівнянні другого порядку (3.1), (3.2) до (3.3), (3.4), (3.6) та замінимо позначення коефіцієнтів $b_{1,1}$, $b_{1,2}$, $b_{2,2}$, b_1 , b_2 відповідно на $c_{1,1}$, $c_{1,2}$, $c_{2,2}$, c_1 , c_2 та функції Ψ_2 — на Ω_2 , *тоді* матимемо

$$c_{1,1} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \alpha} + 2 c_{1,2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \sigma} + c_{2,2} \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma \partial \sigma} = \Omega_2 \left(\alpha, \sigma, w, \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right), \quad (4.21)$$

де $w(\alpha, \sigma) := u(x(\alpha, \sigma), y(\alpha, \sigma))$, а коефіцієнти рівняння та сукупний вираз для членів першого і нульового порядку, а також правої частини суть такі

$$c_{1,1}^* = R[\alpha, \alpha], \quad c_{1,2} = R[\alpha, \sigma] = 0, \quad c_{2,2}^* = R[\sigma, \sigma], \quad c_1^* = S[\alpha], \quad c_2^* = S[\sigma], \quad (4.22)$$

$$\Omega_2^* = f - a_* w - c_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha} - c_2 \frac{\partial w}{\partial \sigma}. \quad (4.23)$$

З урахуванням (4.18), (4.22) (тобто $c_{1,2} = R[\alpha, \sigma] = 0$, $c_{1,1}^* = R[\alpha, \alpha] = R[\sigma, \sigma] = c_{2,2}^* \neq 0$) впливає, що при уведенні дійсних незалежних змінних (α, σ)

$$c_{1,1} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + c_{2,2} \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma \partial \sigma} = \Omega_2 \left(\alpha, \sigma, w, \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right), \quad (4.24)$$

Поділивши обидві частини рівняння (4.25) на коефіцієнти $c_{1,1} = c_{2,2}$, одержимо *канонічний вид* лінійного диференціального рівняння другого порядку (3.1), (3.2) в області еліптичності, записаний в дійсних незалежних змінних

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} = \Omega_2^\circ \left(\alpha, \sigma, w, \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right), \quad \Omega_2^\circ = \frac{\Omega_2}{c_{1,1}} = \frac{\Omega_2}{c_{2,2}}. \quad (4.25)$$

4.2 Алгоритм канонічної заміни незалежних змінних

В даному підрозділі викладена вище теорія перетворення лінійного рівняння другого порядку

$$a_{1,1}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{2,2}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = \Phi_2, \quad (4.26)$$

$$\Phi_2 = f(x, y) - a_*(x, y) u - a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} - a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.27)$$

до канонічного виду подана як відповідний алгоритм, зручний для самостійної роботи з прикладами, наведеними на с. 34.

1. Запишемо коефіцієнти рівняння (4.26), (4.27), тобто $a_{1,1}(x, y)$, $a_{1,2}(x, y)$, $a_{2,2}(x, y)$, $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $a_0(x, y)$.

2. Складемо вирази для дискримінанта рівняння

$$D(x, y) = a_{1,2}^2(x, y) - a_{1,1}(x, y) a_{2,2}(x, y) \quad (4.28)$$

і знайдемо в площині змінних (x, y) області, в яких: а) $D(x, y) > 0$ (область *гіперболічності*); б) $D(x, y) = 0$ (область *параболічності*); в) $D(x, y) < 0$ (область *еліптичності*).

3. Складемо звичайне диференціальне рівняння характеристик (першого порядку другого степеня) одного з таких видів:

$$a_{1,1}(x, y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{1,2}(x, y) \left(\frac{dy}{dx} \right) + a_{2,2}(x, y) = 0; \quad (4.29)$$

$$a_{1,1}(x, y) - 2a_{1,2}(x, y) \left(\frac{dx}{dy} \right) + a_{2,2}(x, y) \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 = 0. \quad (4.30)$$

4. Розв'яжемо рівняння характеристик, як квадратне відносно похідної, наприклад, для рівняння (4.29) знайдемо два розв'язки в областях *гіперболічності* (дійсні) та *еліптичності* (комплексно спряжені)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mp} = \frac{a_{1,2}(x, y) \mp \sqrt{D(x, y)}}{a_{1,1}(x, y)} \quad (4.31)$$

і один розв'язок в області *параболічності*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{1,2}(x, y)}{a_{1,1}(x, y)}, \quad (4.32)$$

5. Проінтегруємо одержані рівняння характеристик (4.31), (4.32), тобто знайдемо відповідні сім'ї розв'язків (*загальні розв'язки*):

а) дві 1-параметричні сім'ї розв'язків в областях *гіперболічності* та *еліптичності*

$$\begin{cases} \phi_1(x, y) = C_1, \\ \psi_1(x, y) = C_2; \end{cases} \quad (4.33)$$

б) одну 1-параметричну сім'ю розв'язків $\phi_1(x, y) = C_1$ в області *параболічності*, яку доповнимо такою 1-параметричною сім'єю $\psi_1(x, y) = C_2$, щоб задовольнити умову невинороженості перетворення.

6. Введемо нові незалежні змінні

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y), \\ \eta = \psi_1(x, y), \end{cases} \quad (4.34)$$

після чого:

а) в областях *гіперболічності* та *параболічності* знайдемо похідні

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \frac{\partial \xi}{\partial y}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x}, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y}, \end{cases} \quad (4.35)$$

та запишемо рівняння (4.26), (4.27) в канонічному виді

$$b_{1,1} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \xi} + 2b_{1,2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + b_{2,2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \eta} = \Psi_2, \quad (4.36)$$

де коефіцієнти похідних функції v другого порядку суть

$$\begin{cases} b_{1,1}^* = R[\phi_1, \phi_1] = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y}, \\ b_{1,2}^* = R[\phi_1, \psi_1] = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ b_{2,2}^* = R[\psi_1, \psi_1] = a_{1,1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \end{cases} \quad (4.37)$$

а похідні функції v першого і нульового порядків та праву частину $g(\xi, \eta)$ подамо або зібрані разом (однією «пачкою»)

$$\begin{aligned} \Psi_2^* = & f - a_* v - a_1 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - a_2 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \\ & - a_{1,1} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} \right) - 2a_{1,2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) - a_{2,2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

або після приведення подібних

$$\Psi_2^* = f - a_* v - b_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} - b_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad (4.39)$$

де коефіцієнти b_1, b_2 похідних функції v першого порядку суть такі

$$\begin{cases} b_1^* = S[\phi_1] = a_{1,1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \xi}{\partial y}, \\ b_2^* = S[\psi_1] = a_{1,1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \eta}{\partial y}; \end{cases} \quad (4.40)$$

б) в області *еліптичності* ще раз уведемо нові незалежні змінні

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = \frac{\phi_1(x, y) + \psi_1(x, y)}{2} \equiv \phi_2(x, y), \\ \sigma = \frac{\xi - \eta}{2i} = \frac{\phi_1(x, y) - \psi_1(x, y)}{2i} \equiv \psi_2(x, y), \end{cases} \quad (4.41)$$

знайдемо похідні

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial y}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial y}, \end{cases} \quad (4.42)$$

та запишемо рівняння (4.26), (4.27) в канонічному виді

$$c_{1,1} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \alpha} + 2c_{1,2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \sigma} + c_{2,2} \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma \partial \sigma} = \Omega_2, \quad (4.43)$$

де коефіцієнти при похідних функції w другого порядку суть

$$\begin{cases} c_{1,1}^* = R[\phi_2, \phi_2] = a_{1,1} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \\ c_{1,2}^* = R[\phi_2, \psi_2] = a_{1,1} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \\ c_{2,2}^* = R[\psi_2, \psi_2] = a_{1,1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \end{cases} \quad (4.44)$$

а похідні функції w першого та нульового порядку та праву частину $h(\alpha, \sigma)$ подамо або зібрані разом (однією «пачкою»)

$$\begin{aligned} \Omega_2^* = f - a_* w - a_1 \left(\underbrace{\frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}}_1 + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}}_2 \right) - a_2 \left(\underbrace{\frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y}}_1 + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y}}_1 \right) - \\ - a_{1,1} \left(\underbrace{\frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial x}}_1 + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial x}}_2 \right) - 2a_{1,2} \left(\underbrace{\frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}}_1 + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}}_2 \right) - a_{2,2} \left(\underbrace{\frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial y}}_1 + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial y}}_2 \right), \end{aligned} \quad (4.45)$$

або після приведення подібних

$$\Omega_2^* = f - a_* w - c_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha} - c_2 \frac{\partial w}{\partial \sigma}, \quad (4.46)$$

де коефіцієнти c_1, c_2 , які передують похідним функції w першого порядку, суть такі

$$\begin{cases} c_1^* = S[\phi_2] = a_{1,1} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \\ c_2^* = S[\psi_2] = a_{1,1} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}. \end{cases} \quad (4.47)$$

Додамо до наведеного алгоритму пояснення.

1. Якщо рівняння (4.26), (4.27) є *однорідним*, то воно залишиться таким і після приведення до канонічного виду, те ж саме є вірним і у відношенні члена (похідної) нульового порядку: $a_* u \rightarrow a_* v$ або $a_* u \rightarrow a_* w$ (будь-яка заміна змінних не може «прибрати» або «створити» цей член рівняння); члени із похідними першого порядку можуть з'являтися або зникати внаслідок заміни незалежних змінних.

2. Загальна теорія приведення до канонічного виду однозначно вказує, що після перетворення незалежних змінних коефіцієнти похідних другого порядку, в рівнянні:

а) *гіперболічного* типу (4.36) суть $b_{1,1} = b_{2,2} = 0, b_{1,2} \neq 0$ (перший канонічний вид) або $b_{1,1} + b_{2,2} = 0, b_{1,2} = 0$ (другий канонічний вид);

б) *параболічного* типу (4.36) суть $b_{1,1} = b_{1,2} = 0, b_{2,2} \neq 0$, або $b_{1,1} \neq 0, b_{1,2} = b_{2,2} = 0$;

в) *еліптичного* типу (4.43) суть $c_{1,1} = c_{2,2} \neq 0, c_{1,2} = 0$,

проте, з метою перевірки правильності введення нових незалежних змінних, бажано обчислити всі коефіцієнти похідних другого порядку.

3. Коефіцієнти перетворених рівнянь (4.36) в «нових» змінних (ξ, η) або рівнянь (4.43) в «нових» змінних (α, σ) , визначені відповідно формулами (4.37) або (4.44), суть функції «старих» змінних (x, y) , отже всюди, де можливо, необхідно виконати відповідні заміни незалежних змінних

$$\begin{cases} x = p_1(\xi, \eta), \\ y = q_1(\xi, \eta), \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = p_2(\alpha, \sigma), \\ y = p_2(\alpha, \sigma), \end{cases} \quad (4.48)$$

які суть обернення «прямих» перетворень (4.34) або (4.41). Гладкі (неперервно диференційовані) функції (4.48) існують, як неявні, оскільки відповідні «прямі» перетворення змінних (4.34) або (4.41) задовольняють умову невиродженості, подану як відмінність від нуля або нескінченості якобіанів I або J , проте існування неявних функцій не означає безумовного існування їх явних подань (4.48).

4.3 Приклади канонічної заміни незалежних змінних

Всі приклади поділені на змістовні частини, номери яких відповідають крокам алгоритму з попереднього підрозділу.

Приклад 4.1. Для диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = 0 \quad (4.49)$$

знайдемо області, в яких рівняння зберігає тип, і в кожній такій області перетворимо рівняння до канонічного виду.

1. Коефіцієнти похідних другого порядку, суть $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 0$, $a_{2,2} = y$; похідні першого порядку і функція u відсутні, тому відповідні коефіцієнти тотожно дорівнюють нулю: $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_* = 0$; $f(x, y) \equiv 0$, отже однорodne рівняння визначене на всій площині.

2. За відомими коефіцієнтами обчислимо дискримінант $D = a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} = -y$. Отже, на площині змінних (x, y) існують дві області, в яких рівняння зберігає тип: **I)** $y < 0$ (область *гіперболічності*, $D > 0$); **II)** $y > 0$ (область *еліптичності*, $D < 0$). Хоча на прямій $y = 0$ дискримінант $D = 0$, рівняння не набуває параболічного типу, оскільки пряма лінія на площині не є областю. У такому разі говорять, що на прямій лінії $y = 0$, яка розділяє області еліптичності та гіперболічності, рівняння *параболічно вироджується*.

3. Складемо рівняння характеристик

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -y. \quad (4.50)$$

Далі алгоритм перетворення до канонічного виду розгалужується.

I) Перейдемо до області *гіперболічності*.

4. Розв'яжемо рівняння характеристик (4.50) відносно похідної у вигляді двох рівнянь *першого порядку першого степеня*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mp} = \mp \sqrt{-y}.$$

5. Відокремимо змінні в обох рівняннях та знайдемо безпосереднім інтегруванням відповідні 1-параметричні сімї розв'язків

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = \mp dx \quad \Rightarrow \quad -2\sqrt{-y} = \mp x + C_{\mp}.$$

6. Перенесемо змінні x, y до правих частин рівнянь одержаних сімей, уведемо нові незалежні змінні

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y) = 2\sqrt{-y} - x, \\ \eta = \psi_1(x, y) = 2\sqrt{-y} + x, \end{cases} \quad (4.51)$$

та знайдемо похідні першого та другого порядків змінних ξ, η (4.51) за x, y

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -1, & \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{-y}}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} = 0, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} = \frac{1}{2y\sqrt{-y}}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = +1, & \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{-y}}, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} = \frac{1}{2y\sqrt{-y}}. \end{cases}$$

Перед тим, як переходити до обчислення коефіцієнтів перетвореного до нових незалежних змінних (4.51) рівняння (4.49), складемо вираз якобіана (2.4) на с. 10 для перетворення (4.51)

$$J(x, y) = \left| \frac{\partial(\phi_1, \psi_1)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{\sqrt{-y}} \\ +1 & -\frac{1}{\sqrt{-y}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{-y}}. \quad (4.52)$$

Якобіан (4.52) обертається в нескінченість на прямій $y = 0$, де лінії сітки обох сімей суть дотичні, проте ця лінія не знаходиться в області гіперболічності, а є граничною.

Далі обчислимо коефіцієнти (4.37) на с. 31 похідних другого порядку функції v за ξ, η

$$\begin{cases} b_{1,1} = a_{1,1} \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\xi}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0, \\ b_{1,2} = a_{1,1} \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} = -2, \\ b_{2,2} = a_{1,1} \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

та функцію (4.38) на с. 32

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= -a_{1,1} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x}}_0 + \frac{\partial v}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x}}_0 \right) - 2a_{1,2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}}_0 + \frac{\partial v}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}}_0 \right) - a_{2,2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y}}_{\neq 0} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y}}_{\neq 0} \right) = \\ &= -\frac{y}{2y\sqrt{-y}} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \stackrel{(4.51)}{=} -\frac{2}{\xi + \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right), \end{aligned}$$

звідки одержимо перший канонічний вид рівняння (4.49) в області гіперболічності

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{1}{\xi + \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right). \quad (4.53)$$

II) Перейдемо до області еліптичності.

4. Розв'яжемо рівняння характеристик (4.50), як квадратне відносно похідної, у вигляді двох рівнянь першого порядку першого степеня з комплексно-спряженими правими частинами

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mp} = \mp i \sqrt{y}.$$

5. Відокремимо змінні в обох одержаних рівняннях і знайдемо, внаслідок інтегрування, відповідні 1-параметричні комплексно спряжені сім'ї розв'язків

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \mp i dx \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{y} = \mp ix + C_{\mp}.$$

6. Введемо, ґрунтуючись на одержаних сім'ях, нові комплексні незалежні змінні

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y) = 2\sqrt{y} + ix, \\ \eta = \psi_1(x, y) = 2\sqrt{y} - ix, \end{cases} \quad (4.54)$$

після чого, у відповідності до правила введення нових дійсних незалежних змінних (4.41), покладемо

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = 2\sqrt{y} = \phi_2(x, y), \\ \sigma = \frac{\xi - \eta}{2i} = x = \psi_2(x, y). \end{cases} \quad (4.55)$$

Перед тим, як переходити до обчислення коефіцієнтів перетвореного до нових незалежних змінних (4.55) рівняння (4.49), складемо вираз якобіана (2.4) на с. 10 для перетворення (4.55)

$$J(x, y) = \left| \frac{\partial(\phi_2, \psi_2)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{y}}. \quad (4.56)$$

Якобіан (4.56) обертається в нескінченність на прямій $y = 0$, де уздовж α лінії сітки перетворення перестає бути диференційованим, проте ця лінія не знаходиться в області еліптичності, а є граничною.

Далі знайдемо вирази для похідних першого та другого порядку змінних α, σ за x, y

$$\begin{cases} \frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0, & \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}, & \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial x} = 0, & \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y} = 0, & \frac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial y} = -\frac{1}{2y\sqrt{y}}, \\ \frac{\partial\sigma}{\partial x} = 1, & \frac{\partial\sigma}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial x} = 0, & \frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} = 0, & \frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial y} = 0, \end{cases}$$

обчислимо коефіцієнти (4.44) похідних другого порядку функції w за змінними α, σ

$$\begin{cases} c_{1,1} = a_{1,1} \frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{\partial\alpha}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \frac{\partial\alpha}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial\alpha}{\partial y} \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 1, \\ c_{1,2} = a_{1,1} \frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{\partial\sigma}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{\partial\sigma}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \frac{\partial\sigma}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial\alpha}{\partial y} \frac{\partial\sigma}{\partial y} = 0, \\ c_{2,2} = a_{1,1} \frac{\partial\sigma}{\partial x} \frac{\partial\sigma}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x} \frac{\partial\sigma}{\partial y} + \frac{\partial\sigma}{\partial y} \frac{\partial\sigma}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial\sigma}{\partial y} \frac{\partial\sigma}{\partial y} = 1, \end{cases}$$

і функцію (4.45)

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= -a_{1,1} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \underbrace{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial x}}_0 + \frac{\partial w}{\partial \sigma} \underbrace{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial x}}_0 \right) - 2a_{1,2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \underbrace{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}}_0 + \frac{\partial w}{\partial \sigma} \underbrace{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}}_0 \right) - a_{2,2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \underbrace{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial y}}_{\neq 0} + \frac{\partial w}{\partial \sigma} \underbrace{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial y}}_0 \right) = \\ &= -a_{2,2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = -y \left(-\frac{1}{2} y^{-3/2} \right) \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \frac{y}{y\sqrt{y}} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \stackrel{(4.55)}{=} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Остаточно матимемо канонічний вид рівняння (4.49) в області *еліптичності*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}. \quad (4.57)$$

Отже, рівняння (4.49) має перший канонічний вид (4.53) в області гіперболічності ($y < 0$) та канонічний вид (4.57) в області еліптичності ($y > 0$), а на прямій лінії $y = 0$ відбувається параболічне виродження (див. задачу 5.13 на с. 47). ▲

Приклад 4.2. Для диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.58)$$

знайдемо області, в яких рівняння зберігає тип, і в кожній такій області перетворимо рівняння до канонічного виду.

1. Коефіцієнти рівняння (4.58) суть $a_{1,1}=1$, $a_{1,2}=-x$, $a_{2,2}=x^2$, $a_1=0$, $a_2=-2$, $a_*=0$, $f(x,y) \equiv 0$; отже рівняння визначене на всій площині.

2. Вираз для дискримінанта $D(x,y) = a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} = x^2 - x^2 \equiv 0$ свідчить про *параболічність* рівняння у всій його області визначення. На прямій $x = 0$ (на осі y) два з трьох коефіцієнтів головної частини рівняння обертаються в нуль, проте в жодній точці площини *всі* коефіцієнти головної частини *разом* в нуль не обертаються.

3. Складемо рівняння характеристик

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} + x^2 = 0. \quad (4.59)$$

4. Розв'яжемо рівняння (4.59) відносно похідної у вигляді одного рівняння першого порядку першого степеня (квадратне рівняння $z^2 + 2xz + x^2 = 0$ з параметром x має один корінь $z_{1,2} = -x$ кратності два)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mp} = -x. \quad (4.60)$$

5. Відокремимо змінні в останньому диференціальному рівнянні та знайдемо безпосереднім інтегруванням 1-параметричну сім'ю розв'язків

$$dy = -x dx \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2y = C_1. \quad (4.61)$$

6. 1-параметрична сім'я розв'язків (4.61) рівняння характеристик (4.60) дозволяє ввести лише одну нову незалежну змінну, наприклад $\xi = \phi(x,y)$, а іншу змінну, відповідно $\eta = \psi(x,y)$, додамо *руками* так, щоб перетворення від (x,y) до (ξ,η) було невивірженим. Геометрично це означає, що 1-параметричні сім'ї ліній $\phi(x,y) = C_1$ та $\psi(x,y) = C_2$ мають перетинатися на всій площині, проте не дотикатися в жодній точці площини.

Геометричне тлумачення невивірженості перетворення $(x,y) \leftrightarrow (\xi,\eta)$ спрощує введення «руками» відповідної функції $\psi(x,y)$. Наприклад, перетворення

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x,y) = x^2 + 2y, \\ \eta = \psi_1(x,y) = y, \end{cases} \quad J(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x, \quad (4.62)$$

виявляється *виродженим*, оскільки лінії $\xi = \text{const}$ та $\eta = \text{const}$ перетинаються на всій площині, окрім точок вісі y , де лінії обох сімей дотикаються. Навпаки, перетворення

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x,y) = x^2 + 2y, \\ \eta = \psi_1(x,y) = x, \end{cases} \quad J(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \quad (4.63)$$

виявляється *невиродженим*, оскільки лінії обох сімей $\xi = \text{const}$ та $\eta = \text{const}$ перетинаються на всій площині, проте ніде не дотикаються.

Отже, введемо нові незалежні змінні перетворенням (4.63) (див. задачу 5.14 на с. 47) та знайдемо похідні змінних ξ, η за змінними x, y першого та другого порядку

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial \xi}{\partial y} = 2, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} = 2, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, & \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} = 0. \end{cases}$$

Далі обчислимо коефіцієнти (4.40) похідних другого порядку функції v за ξ, η

$$\begin{cases} b_{1,1} = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 4x^2 - 2x \cdot 4x + 4x^2 = 0, \\ b_{1,2} = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2x - 2x = 0, \\ b_{2,2} = a_{1,1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1, \end{cases}$$

коефіцієнти (4.40) похідних першого порядку функції v за ξ, η

$$\begin{cases} b_1 = a_{1,1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = -1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2, \\ b_2 = a_{1,1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = -2 \cdot 0 = 0, \end{cases}$$

та функцію (4.39)

$$\Psi_2 = -b_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} - b_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} = 2 \frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Отже, можемо остаточно записати канонічний вид рівняння (4.58)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 2 \frac{\partial v}{\partial \xi}. \quad (4.64)$$

Яке рівняння нагадує одержане рівняння (4.64)? В якому виді належить подати рівняння (4.64), щоб це стало очевидним? ▲

Приклад 4.3. Для диференціального рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.65)$$

знайдемо області, в яких рівняння зберігає тип, і в кожній такій області перетворимо рівняння до канонічного виду.

1. Коефіцієнти рівняння (4.65) суть $a_{1,1} = x^2$, $a_{1,2} = 0$, $a_{2,2} = -y^2$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2y$, $a_* = 0$, $f(x, y) \equiv 0$; отже рівняння визначене на всій площині.

2. Вираз для дискримінанта $D = a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} = x^2y^2 \geq 0$ вказує на *гіперболічний* тип рівняння на всій площині, окрім прямих ліній $x = 0$ та $y = 0$ (тобто в чотирьох квадрантах, або чвертях, площини). На вказаних прямих лініях рівняння *параболічно* вироджується.

3. Складемо рівняння характеристик (поясніть, чому ділення на x можливе)

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \left(\frac{y}{x} \right)^2. \quad (4.66)$$

4. Розв'яжемо рівняння характеристик (4.66) відносно похідної у вигляді двох рівнянь першого порядку першого степеня

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mp} = \mp \frac{y}{x}.$$

5. Відокремимо змінні в обох останніх рівняннях і проінтегруємо

$$\frac{dy}{y} = \mp \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| \pm \ln|x| = \ln|C_{\mp}| \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} xy = C_- , \\ \frac{y}{x} = C_+ . \end{cases} \quad (4.67)$$

6. За знайденими двома 1-параметричними сім'ями розв'язків (4.67) уведемо нові незалежні характеристичні змінні ξ, η

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y) = xy , \\ \eta = \psi_1(x, y) = \frac{y}{x} , \end{cases} \quad (4.68)$$

і знайдемо похідні першого та другого порядку змінних ξ, η за змінними x, y

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = y , & \frac{\partial \xi}{\partial y} = x , & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} = 0 , & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 1 , & \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} = 0 , \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} , & \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{x} , & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} = 2 \frac{y}{x^3} , & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} , & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} = 0 . \end{cases}$$

Далі обчислимо коефіцієнти (4.40) похідних другого порядку функції v за ξ, η ,

$$\begin{cases} b_{1,1} = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} = x^2 y^2 - y^2 x^2 = 0 , \\ b_{1,2}^* = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -x^2 \frac{y^2}{x^4} - y^2 \frac{1}{x^2} = -2y^2 , \\ b_{2,2} = a_{1,1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x^2 \frac{y^2}{x^2} - y^2 = 0 , \end{cases}$$

коефіцієнти (4.40), які передують першим похідним функції v ,

$$\begin{cases} b_1^* = a_{1,1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = -2xy , \\ b_2 = a_{1,1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2x^2 \frac{y}{x^3} - y^2 \cdot 0 - 2y \frac{1}{x} = 0 , \end{cases}$$

і функцію (4.39)

$$\Psi_2^* = -b_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} - b_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} = 2xy \frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Нарешті запишемо рівняння (4.65) в змінних ξ, η (частково, оскільки коефіцієнти ще подані як функції (x, y))

$$2(-2y^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 2xy \frac{\partial v}{\partial \xi},$$

виконаємо очевидні скорочення в лівій та правій частинах

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{2} \frac{x}{y} \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

та виразимо відношення змінних x і y через змінну η (4.68)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad (4.69)$$

на чому знаходження першого канонічного виду рівняння (4.65) завершено (див. задачу 5.15 на с. 47). ▲

Приклад 4.4. Для рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.70)$$

знайдемо області, в яких рівняння зберігає тип, і в кожній такій області перетворимо рівняння до канонічного виду.

1. Коефіцієнти рівняння (4.70) суть $a_{1,1} = x^2$, $a_{1,2} = xy$, $a_{2,2} = y^2$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_* = 0$, $f(x, y) \equiv 0$; отже рівняння визначене на всій площині.

2. Вираз для дискримінанта $D(x, y) = a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} = x^2y^2 - x^2y^2 \equiv 0$ свідчить про *параболічність* рівняння у всій його області визначення, проте необхідні деякі пояснення. Так, на прямих $x = 0$ (на вісі y) та $y = 0$ (на вісі x) два з трьох коефіцієнтів головної частини рівняння обертаються в нуль, проте рівняння зберігає свій тип. Однак на перетині цих прямих (в точці $(0, 0)$) рівняння *вироджується*, оскільки *всі* коефіцієнти головної частини рівняння *разом* обертаються в нуль.

3. Складемо рівняння характеристик

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0,$$

або, після ділення на x^2 , у такому поданні

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2 \left(\frac{y}{x} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right) + \left(\frac{y}{x} \right)^2 = 0. \quad (4.71)$$

4. Розв'яжемо рівняння (4.71) відносно похідної у вигляді одного рівняння першого порядку першого степеня (квадратне рівняння $z^2 - 2pz + p^2 = 0$ з параметром p має один корінь $z_{1,2} = p$ кратності два)

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mp} = \frac{y}{x}. \quad (4.72)$$

5. Відокремимо змінні в (4.72) та знайдемо безпосереднім інтегруванням 1-параметричну сім'ю розв'язків рівняння характеристик

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow d \ln |y| = d \ln |x| + d \ln |C| \Rightarrow y = C_1 x, \quad C_1 \in (-\infty, +\infty). \quad (4.73)$$

6. 1-параметрична сім'я розв'язків (4.73) рівняння характеристик (4.71) дозволяє ввести лише одну нову незалежну змінну, наприклад $\xi = \phi(x, y) = \frac{y}{x}$ (зазначимо, що це не єдиний спосіб введення функції $\phi(x, y)$, див. далі), а іншу змінну, відповідно $\eta = \psi(x, y)$, маємо додати *руками* так, щоб перетворення від (x, y) до (ξ, η) було не виродженим.

Розглянемо *пряме* канонічне перетворення

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y) = \frac{y}{x}, \\ \eta = \psi_1(x, y) = x, \end{cases} \quad J(x, y) = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}, \quad (4.74)$$

та його *обернене*

$$\begin{cases} x = p_1(\xi, \eta) = \eta, \\ y = q_1(\xi, \eta) = \xi\eta, \end{cases} \quad I(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \eta & \xi \end{vmatrix} = -\eta, \quad (4.75)$$

які суть *вироджені* на прямій $x = 0$, оскільки лінія $\eta = 0$ (її прообразом є пряма $x = 0$) співпадає з граничними лініями $\xi = \mp\infty$ (їх прообразами також є пряма $x = 0$). Якщо перетворене за (4.74) рівняння (4.70) розглядати зовні образа прямої $x = 0$, перетворення (4.74) є допустимим.

Розглянемо *пряме* канонічне перетворення

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y) = \frac{y}{x}, \\ \eta = \psi_1(x, y) = y, \end{cases} \quad J(x, y) = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2}, \quad (4.76)$$

та його *обернене*

$$\begin{cases} x = p_1(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\xi}, \\ y = q_1(\xi, \eta) = \eta, \end{cases} \quad I(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} -\frac{\eta}{\xi^2} & \frac{1}{\xi} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\xi}, \quad (4.77)$$

які також суть *вироджені*, оскільки лінія $\eta = 0$ (її прообразом є пряма $y = 0$) співпадає з лінією $\xi = 0$ (її прообразами також є пряма $y = 0$), крім того лінії $\xi = \mp\infty$ мають однаковий прообраз $x = 0$. обох сімей $\xi = \text{const}$ та $\eta = \text{const}$ перетинаються на всій площині, проте ніде не дотикаються. Якщо перетворене за (4.76) рівняння (4.70) розглядати зовні образів прямих $x = 0$, $y = 0$, перетворення (4.76) є допустимим.

Якщо ж 1-параметричну сім'ю розв'язків (4.73) рівняння характеристик подати в інший спосіб

$$x = C_2 y, \quad C_2 \in (-\infty, +\infty), \quad (4.78)$$

тоді можливі: 1) такий аналог *прямого* канонічного перетворення (4.74)

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y) = \frac{x}{y}, \\ \eta = \psi_1(x, y) = x, \end{cases} \quad J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +\frac{x}{y^2}, \quad (4.79)$$

та його оберненого

$$\begin{cases} x = p_1(\xi, \eta) = \eta, \\ y = q_1(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\xi}, \end{cases} \quad I(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\eta}{\xi^2} & \frac{1}{\xi} \end{vmatrix} = +\frac{\eta}{\xi^2}, \quad (4.80)$$

та 2) такий аналог *прямого* канонічного перетворення (4.76)

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y) = \frac{x}{y}, \\ \eta = \psi_1(x, y) = y, \end{cases} \quad J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{y}. \quad (4.81)$$

та його оберненого

$$\begin{cases} x = p_1(\xi, \eta) = \xi\eta, \\ y = q_1(\xi, \eta) = \eta, \end{cases} \quad I(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \eta & \xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +\eta. \quad (4.82)$$

Канонічні перетворення (4.79), (4.81) усувають вади перетворень (4.74), (4.76), проте «відзеркаленням» останніх уводять нові.

Виникає запитання щодо можливості уведення канонічного перетворення, яке є невідродженим на всій площині. Відповідь на це запитання є стверджувальною. Насправді, розглянемо канонічне перетворення

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y) = \frac{y}{x}, \\ \eta = \psi_1(x, y) = x^2, \end{cases} \quad J(x, y) = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad (4.83)$$

та його обернене

$$\begin{cases} x = p_1(\xi, \eta) = \mp\sqrt{\eta}, \\ y = q_1(\xi, \eta) = \mp\sqrt{\eta}\xi, \end{cases} \quad I(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} 0 & \mp\frac{1}{2\sqrt{\eta}} \\ \mp\sqrt{\eta} & \mp\frac{\xi}{2\sqrt{\eta}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \quad (4.84)$$

визначник якого ніде не обертається в нуль, більше того, він є сталою величиною (див. задачу 5.16 на с. 47).

Для того, щоб порівняти уведені канонічні перетворення, перетворимо рівняння (4.70) за деякими з них (див. також задачу 5.16 на с. 47). Спочатку знайдемо похідні змінних ξ, η (4.74) за змінними x, y першого та другого порядку

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{x}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} = +\frac{2y}{x^3}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, & \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} = 0. \end{cases}$$

за якими обчислимо коефіцієнти (4.40) похідних другого порядку функції v за ξ, η

$$\begin{cases} b_{1,1} = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \\ b_{1,2} = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \\ b_{2,2}^* = a_{1,1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x^2, \end{cases}$$

та коефіцієнти (4.40) перших похідних функції v за ξ, η

$$\begin{cases} b_1^* = a_{1,1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{x+y}{x^2}, \\ b_2 = a_{1,1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1. \end{cases}$$

Отже, можемо записати канонічний вид рівняння (4.70) (не в остаточному поданні)

$$x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{x+y}{x^2} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

Остаточний канонічний вид рівняння одержимо після запису коефіцієнтів в канонічних змінних

$$\eta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{1+\xi}{\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0. \quad (4.85)$$

Далі знайдемо похідні змінних ξ, η (4.76) за x, y першого та другого порядку

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{x}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} = +\frac{2y}{x^3}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} = 0, \end{cases}$$

за якими обчислимо коефіцієнти (4.37) похідних другого порядку функції v за ξ, η

$$\begin{cases} b_{1,1} = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \\ b_{1,2} = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \\ b_{2,2}^* = a_{1,1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = y^2, \end{cases}$$

та коефіцієнти (4.40) перших похідних функції v за ξ, η

$$\begin{cases} b_1^* = a_{1,1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{x+y}{x^2}, \\ b_2 = a_{1,1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = -1. \end{cases}$$

Отже, можемо записати канонічний вид рівняння (4.70) (не в остаточному поданні)

$$y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{x+y}{x^2} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

Остаточний канонічний вид рівняння одержимо після запису коефіцієнтів в канонічних змінних

$$\eta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{(1+\xi)\xi^2}{\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0. \quad (4.86)$$

Нарешті знайдемо похідні змінних ξ, η (4.83) за x, y першого та другого порядку

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{x}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} = +\frac{2y}{x^3}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} = 2, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} = 0, \end{cases}$$

за якими обчислимо коефіцієнти (4.37) похідних другого порядку функції v за ξ, η

$$\begin{cases} b_{1,1} = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \\ b_{1,2} = a_{1,1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \\ b_{2,2}^* = a_{1,1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{2,2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4x^4, \end{cases}$$

та коефіцієнти (4.40) перших похідних функції v за ξ, η

$$\begin{cases} b_1^* = a_{1,1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{x+y}{x^2}, \\ b_2^* = a_{1,1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + a_{2,2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2x(1+x). \end{cases}$$

Отже, можемо записати канонічний вид рівняння (4.70) (не в остаточному поданні)

$$4x^4 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{x+y}{x^2} \frac{\partial v}{\partial \xi} + 2x(1+x) \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

Остаточний канонічний вид рівняння одержимо після запису коефіцієнтів в канонічних змінних

$$4\eta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \mp \frac{(1+\xi)}{\sqrt{\eta}} \frac{\partial v}{\partial \xi} \mp \frac{1+\xi}{\sqrt{\eta}} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0. \quad (4.87)$$

Яке рівняння нагадує одержане рівняння (4.87)? В якому виді належить подати рівняння (4.86), щоб це стало очевидним? ▲

5 Задачі для самостійної роботи

Задача 5.1. Для полярних координат (r, φ) з прикладу 2.1 на с. 11 побудуйте r - та φ -лінії на площині xy , а також x - та y -лінії на площині $r\varphi$ (образи відповідних координатних сіток в площинах $r\varphi$ та xy). Вкажіть в площинах xy та $r\varphi$ множини точок, в яких якобіани $J(x, y)$ та $I(r, \varphi)$ обертаються в нуль або нескінченість. Поясніть це, а також властивість (2.7) на с. 11 з геометричної точки зору. ▲

Задача 5.2. Для біполярних координат (ρ, θ) з прикладу 2.2 на с. 14 вкажіть області на площині $\rho\theta$, які взаємно однозначно відображаються на відповідні області площини xy . Доведіть, що координата θ потерпає розрив величини 2π зовні відрізка $[-a, +a]$ осі Ox .

Задача 5.3. Для біполярних координат (ρ, θ) з прикладу 2.2 на с. 14 доведіть, що лінії $\rho = \text{const}$ та $\theta = \text{const}$ мають відповідно рівняння

$$(x - a \operatorname{cth} \rho)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sh} \rho} \right)^2,$$
$$x^2 + (y - a |\operatorname{ctg} \theta|)^2 = \left(\frac{a}{\sin \theta} \right)^2,$$

а також дайте геометричне тлумачення вказаним лініям, при цьому візьміть до уваги множину значень біполярних координат.

Задача 5.4. Для біполярних координат (ρ, θ) з прикладу 2.2 на с. 14 виведіть формули перетворення до полярних координат (r, φ) і обернених до них.

Задача 5.5. Для заданих функцій

$$\begin{cases} x = p_1(\xi, \eta) = \xi \eta, \\ y = q_1(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\xi}, \end{cases}$$

1) визначте області на площині $\xi\eta$, які взаємно однозначно відображаються на відповідні області площини xy ; 2) знайдіть для таких областей обернені відображення; 3) для прямих та обернених відображень побудуйте координатні сітки в площинах xy та $\xi\eta$; 4) знайдіть образ прямокутника $(x, y) \in (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$, $0 < a_1 < a_2 < +\infty$, $0 < b_1 < b_2 < +\infty$. ▲

Задача 5.6. Для заданих функцій

$$\begin{cases} x = p_1(\xi, \eta) = \xi + \eta, \\ y = q_1(\xi, \eta) = (\eta + \eta)^2, \end{cases}$$

з'ясуйте, чи існують області на площині $\xi\eta$, які взаємно однозначно відображаються на відповідні області площини xy .

Задача 5.7. Перетворіть рівняння Лапласа в декартових змінних (3.10) на с. 19 на таке

$$\Delta_{(\rho, \theta)} v(\rho, \theta) = \left(\frac{\operatorname{ch} \rho + \cos \theta}{a} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

в біполярних змінних (ρ, θ) з прикладу 2.2 на с. 14. ▲

Задача 5.8. Перетворіть рівняння *Лапласа* в декартових змінних (3.10) на с. 19 на таке в змінних (ξ, η) із задачі 5.5. ▲

Задача 5.9. Перетворіть рівняння *Лапласа* в полярних змінних (3.15) на с. 20 до канонічного виду. ▲

Задача 5.10. Для лінійного диференціального рівняння другого порядку (4.26), (4.27) на с. 30 із змінними коефіцієнтами:

- 1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0;$
- 2) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 5 \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0;$
- 3) $x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 5 \frac{\partial u}{\partial y} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 6u = 0;$
- 4) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 8xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} - 8 \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0;$
- 5) $\text{sign } y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \text{sign } x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 5 \frac{\partial u}{\partial y} + 7u = 0;$
- 6) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (4 - \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 9 \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0;$
- 7) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2x\sqrt{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$
- 8) $\frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{x}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$
- 9) $\sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 5u = 0;$
- 10) $-\sin^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \cos y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0;$
- 11) $x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2y^2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3x \frac{\partial u}{\partial y} + 6u = 0;$
- 12) $\cos^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2 \cos y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - 3u = 0;$
- 13) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 3y \frac{\partial u}{\partial x} + 4xy \frac{\partial u}{\partial y} - 5u = 0;$

$$14) y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 7 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0;$$

$$15) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x^2 - y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0;$$

$$16) \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 3u = 0;$$

$$17) -\frac{x}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{y^2}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 7 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0;$$

знайдіть області, в яких рівняння зберігає тип, і перетворить рівняння до канонічного виду в кожній такій області. ▲

Задача 5.11. Лінійне диференціальне рівняння другого порядку (4.26), (4.27) на с. 30 із сталими коефіцієнтами гіперболічного типу перетворено до *першого* канонічного виду в нових незалежних змінних $\xi = y + x$, $\eta = y - x$. Знайдіть коефіцієнти $a_{1,2}$ і $b_{1,2}$. Якими є коефіцієнти $a_{1,1}$, $a_{2,2}$? ▲

Задача 5.12. Лінійне диференціальне рівняння другого порядку (4.26), (4.27) на с. 30 із сталими коефіцієнтами еліптичного типу перетворено до канонічного виду в нових незалежних змінних $\alpha = y - x$, $\sigma = x$. Якими є знаки коефіцієнта $a_{1,1}$ та добутку $a_{1,1} a_{2,2}$? Подайте дискримінант D через один із коефіцієнтів рівняння. ▲

Задача 5.13. Для лінійного диференціального рівняння (4.49) другого порядку з прикладу 4.1 на с. 34 знайдіть *другий* канонічний вид в області гіперболічності. ▲

Задача 5.14. Запропонуйте декілька 1-параметричних сімей функцій $\psi(x, y) = C_2$, які доповнюють 1-параметричні сім'ю $\phi(x, y) = C_1$ (4.61) в прикладі 4.2 на с. 37 до невідродженого перетворення незалежних змінних $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, при перетворенні лінійного диференціального рівняння параболічного типу (4.58) другого порядку до канонічного виду, та знайдіть відповідні канонічні види. ▲

Задача 5.15. Для лінійного диференціального рівняння (4.65) другого порядку з прикладу 4.3 на с. 38 знайдіть *другий* канонічний вид в областях гіперболічності. ▲

Задача 5.16. Надайте пояснення щодо того, в який спосіб канонічне перетворення (4.83) для лінійного диференціального рівняння (4.70) параболічного типу з прикладу 4.4 на с. 40 усуває виродженість канонічного перетворення (4.74), від якого деякою мірою «походить». Побудуйте лінії рівних значень незалежних змінних (x, y) на площині (ξ, η) і змінних (ξ, η) на площині (x, y) (координатні сітки). Запропонуйте інші невідроджені канонічні перетворення для рівняння (4.70). Запишіть відповідні канонічні види рівняння (4.70). Запишіть також відповідні канонічні види рівняння (4.70) для перетворень (4.79), (4.81). ▲

Бібліографічний опис

1. *Бобик О. І.* Рівняння математичної фізики: навчальний посібник / *О. І. Бобик, І. О. Бобик, В. В. Литвин.* — Львів: Вид-во «Новий Світ–2000», 2024. — 256 с.
2. *Бондаренко В. Г.* Рівняння математичної фізики: навчальний посібник для студентів спеціальності 124 «системний аналіз» / *В. Г. Бондаренко.* — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — 100 с.
3. *Бугрій О. М.* Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі: навчальний посібник / *О. М. Бугрій, О. М. Процах, Н. В. Бугрій.* — Львів, Видавець І. Е. Чижигов, 2011. — 348 с. — (Університетська бібліотека)
4. *Вайсфельд Н. Д.* Рівняння математичної фізики: навчально-методичний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика» / *Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут.* — Одеса: Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, 2018. — 194 с.
5. *Курпа Л. В.* Рівняння математичної фізики: навчальний посібник / *Л. В. Курпа, Г. Б. Лінник.* — Харків: Вид-во «Підручник НТУ ХП», 2011. — 312 с.
6. *Лопушанська Г. П.* Диференціальні рівняння та рівня математичної фізики / *Г. П. Лопушанська, О. М. Бугрій, А. О. Лопушанський.* — 2-е вид., випр. і допов. — Львів.: Видавець І. Е. Чижигов, 2017. — 372 с.
7. *Ляшко І. І.* Математичний аналіз: у 2-х ч.: підручник для математичних спеціальностей ун-тів. Частина 1 / *І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук.* — К.: Вища школа, 1992. — 495 с.
8. *Ляшко І. І.* Математичний аналіз: у 2-х ч.: підручник для математичних спеціальностей ун-тів. Частина 2 / *І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук.* — К.: Вища школа, 1993. — 376 с.
9. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння: підручник для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів / *А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк.* — 2-ге вид., перероб. і доп. — К.: Либідь, 2003. — 600 с.