Н. В. Парфінович, В. М. Трактинська

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ЧАСТИНА 1

2023

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу та оптимізації

Н. В. Парфінович, В. М. Трактинська

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ЧАСТИНА 1

Дніпро
2023

УДК 517(075.8)
П 18

Посібник написано відповідно до програми курсу математичного аналізу для студентів математичних та природничих спеціальностей. У ньому подано елементи теорії множин та дійсних чисел, детально розглянуто теорію границь та неперервність функцій однієї змінної, наведено приклади розв'язування задач. Для студентів університету денної та заочної форм навчання, що вивчають курс «Математичний аналіз», «Математичний аналіз: функції однієї змінної».

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
(*протокол № 2 від 17 жовтня 2023 р.*)

Рецензенти: д-р. фіз.-мат. наук, доцент О. О. Пипка
канд. фіз.-мат. наук, доцент Т. В. Величко

Парфінович Н В, Трактинська В. М.
П 18 Конспект лекцій з математичного аналізу. Ч. 1. – Дніпро: ЛІРА, 2023. – 76 с.

ISBN 978-966-981-824-9

Навчальне видання

Наталія Вікторівна Парфінович
Вікторія Миколаївна Трактинська

Конспект лекцій з математичного аналізу. Частина 1

ISBN 978-966-981-824-9
© Парфінович Н. В., Трактинська В. М. 2023

ПЕРЕДМОВА

Математичний аналіз веде свою історію з XVII століття і сьогодні є однією з найважливіших дисциплін у підготовці не лише математиків, але і тих фахівців, яких математика цікавить з погляду застосувань.

Даний навчальний посібник написано відповідно до програми курсу математичного аналізу, який читається студентам факультету прикладної математики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Він також може бути корисним студентам, що здобувають освіту за спеціальностями Математика, Статистика, Середня освіта: математика, природничими та технічними спеціальностями, а також викладачам, що читають відповідний курс.

ВСТУП

Надамо спочатку деякі загальноприйняті скорочені записи, якими будемо користуватись у подальшому.

Скорочений запис	Назва	Повний запис
$\forall$	квантор загальності	“для кожного”, “для всіх”, “для будь-якого”
$\exists$	квантор існування	“існує”, “знайдеться”, “є принаймні один”
$\exists!$	символ єдиності	“існує єдиний”
$\neg A$	символ заперечення	“не A”
$A \vee B$	символ диз’юнкції	“A або B”
$A \wedge B$	символ кон’юнкції	“A і B”
$A \Rightarrow B$	символ імплікації	“із A випливає B”, “якщо A, то B”
$A \Leftrightarrow B$	символ еквівалентності	“ A рівносильне B”, “A еквівалентне B”, “A тоді і лише тоді, коли B”, “ для того, щоб A необхідно і достатньо, щоб B ”
$:$	–	“такий що”
$:=$	–	“дорівнює за означенням”

Розділ 1. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

1.1. Множини. Основні поняття

1.1.1. Поняття множини. Приклади множин

Поняття ***множини*** є первинним поняттям математики, тобто таким, що не підлягає визначенню через інші поняття.

Приклади множин:

– множина студентів академічної групи;
– множина стільців в аудиторії;
– множина цеглин у будівлі.

Об'єкти, що утворюють множину, називають її ***елементами.*** Множина цілком визначається набором своїх елементів.

Використовують такі записи: $x \in X$ або $X \ni x$ (x є елементом X, x належить X, X містить x).

Заперечення факту $x \in X$ часто записують: $x \notin X$.

Об'єкти поєднують у множини згідно певним властивостям. Отже, множину вважають описаною, якщо про кожний об'єкт, що розглядається, можна сказати, належить або не належить він цій множині.

Задати множину можна такими способами:

– перелічити всі її елементи, наприклад, $A = \{a, b, c, d\}$;
– описати за допомогою властивості, наприклад, $A = \{x \in X\colon\ P(x)\}$, де запис $P(x)$ означає, що елемент x має властивість P.

Множина, яка не містить жодного елемента називається ***порожньою*** і позначається: $\emptyset$. Існування порожньої множини постулюється.

Ми будемо мати справу здебільшого з числовими множинами. Наведемо приклади таких множин:

– $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;
– $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;
– $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел;
– $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел;

– $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ –замкнений інтервал (відрізок);
– $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ – відкритий інтервал;
– $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$ – напівзамкнений (напіввідкритий) інтервал;
– $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$ – напівзамкнений (напіввідкритий) інтервал;
– $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2,3\}$;
– $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 1 = 0\} = \emptyset$.

1.1.2. Порівняння множин. Операції з множинами

Означення 1.1.1. *Множину A називають* ***підмножиною*** *множини B (і записують $A \subset B$), якщо кожен елемент множини A належить множині B.*

Вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Означення 1.1.2. *Множини A і B називають* ***рівними*** *(і записують $A = B$), якщо $A \subset B$ і $B \subset A$ водночас.*

Означення 1.1.3. ***Об'єднанням*** *множин A і B називають множину $A \cup B$, яка містить усі елементи, що належать хоча б одній з множин A, B, і не містить інших елементів.*

Означення 1.1.4. ***Перетином*** *множин A і B називають множину $A \cap B$, яка складається з елементів, що належать кожній з множин A, B, і не містить інших елементів.*

Означення 1.1.5. ***Різницею*** *множин A і B називають множину $A \setminus B$, яка складається з усіх тих елементів множини A, які не належать множині B.*

Означення 1.1.6. *Якщо $A \subset B$, то* ***доповненням*** *множини A до множини B називають множину $C_B A = B \setminus A$.*

Означення 1.1.7. *Множину $A \times B := \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}$ називають* ***декартовим добутком*** *множин A і B.*

1.1.3. Множина дійсних чисел

Множина $\mathbb{R}$ називається множиною дійсних чисел, а її елементи дійсними числами, якщо виконується наступний комплекс умов, які називаються аксіомами дійсних чисел.

1. ***Аксіоми додавання.***

1.1. Існує нейтральний елемент 0 (нуль) відносно додавання, тобто такий елемент $0 \in \mathbb{R}$, що

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x.$$

1.2. Для кожного дійсного числа існує протилежний елемент, тобто

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, (-x) \in \mathbb{R}: x + (-x) = 0.$$

1.3. Додавання асоціативне, тобто

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

1.4. Додавання комутативне, тобто

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \;\; x + y = y + x.$$

2. ***Аксіоми множення.***

2.1. Існує нейтральний елемент 1 (одиниця) відносно множення, тобто такий елемент $1 \in \mathbb{R}$, що

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = x.$$

2.2. Існує обернений елемент відносно множення

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \;\; (x \neq 0) \;\; \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} \quad x \cdot x^{-1} = 1.$$

2.3. Множення асоціативне, тобто

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \;\; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

2.4. Множення комутативне, тобто $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \;\; x \cdot y = y \cdot x$.

(1,2) ***Зв'язок множення і додавання.***

Множення дистрибутивне відносно додавання:

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

3. ***Аксіоми порядку.***

Між елементами $\mathbb{R}$ існує відношення $\leq$, тобто для довільних елементів $x, y \in \mathbb{R}$ визначено, чи виконується співвідношення $x \leq y$, чи ні. При цьому:

3.1. $\forall\, x \in \mathbb{R} \;\; x \leq x$.

3.2. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ \ (x \leq\ y) \wedge\ (y \leq\ x) \Rightarrow (x = y)$.

3.3. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}\ \ (x \leq\ y) \wedge\ (y \leq\ z) \Rightarrow (x \leq z)$.

3.4. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ \ \ (x \leq y) \vee\ (y \leq x)$.

(1, 3) ***Зв'язок додавання і порядку***.

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}\ \ (x \leq y) \Rightarrow\ (x + z \leq\ y + z).$$

(2, 3) ***Зв'язок множення і порядку***.

$$\forall\ \ x, y \in \mathbb{R}\ \ (0 \leq\ x) \wedge\ (0 \leq\ y) \Rightarrow\ (0 \leq x \cdot\ y).$$

4. ***Аксіома повноти (неперервності)***.

Якщо X і Y – непорожні підмножини множини $\mathbb{R}$, такі, що

$$\forall x \in X\ \wedge\ \forall\, y \in Y\ (x \leq\ y),$$

то

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in X\ i\ \forall y \in Y\ (x \leq c \leq y).$$

Зазначимо, що множину $\mathbb{R}$ часто ототожнюють з ***числовою прямою***, а її елементи (дійсні числа) – з ***точками числової прямої***.

Означення 1.1.8.

1) $(b \geq a) \coloneqq (a \leq b)$;
2) $(a < b) \coloneqq (a \leq b) \wedge (a \neq b)$;
3) $(a > b) \coloneqq (b < a)$;
4) $(a - \text{додатне}) \coloneqq (a > 0)$;
5) $(a - \text{невід}'\text{ємне}) \coloneqq (a \geq 0)$;
6) $(a - \text{від}'\text{ємне}) \coloneqq (a < 0)$;
7) $(a - \text{недодатне}) \coloneqq (a \leq 0)$

Наведемо наслідки із аксіом множини дійсних чисел:

1) (єдиність нуля) $\exists!\, 0 \in \mathbb{R}$;
2) (єдиність протилежного елемента) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists!\, (-a) \in \mathbb{R}$;
3) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists!\, x \in \mathbb{R}: a + x = b$;
4) (єдиність одиниці) $\exists!\, 1 \in \mathbb{R}$;
5) (єдиність оберненого елемента) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists!\, a^{-1} \in \mathbb{R}$;

6) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ \forall b \in \mathbb{R} \ \exists! \, x \in \mathbb{R}: \ a \cdot x = b$;

7) $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 0 = 0$;

8) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \ a \cdot b = 0 \ \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$;

9) $\forall a \in \mathbb{R} \ \ (-1) \cdot a = -a$;

10) $\forall a \in \mathbb{R} \ (-1) \cdot (-a) = a$;

11) $\forall a \in \mathbb{R} \ (-a) \cdot (-a) = a \cdot a$;

12) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ справджується одне і лише одне зі співвідношень:

$$a < b; a = b; a > b;$$

13) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a < b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a < c)$;

14) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c)$;

15) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a < b) \Rightarrow (a + c < b + c)$;

16) $\forall a \in \mathbb{R}: a < 0 \Rightarrow \ -a > 0$;

17) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}: (a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a + c \leq b + d)$;

18) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}: (a \leq b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a + c < b + d)$;

19) $(0 < a) \wedge (0 < b) \Rightarrow (0 < a \cdot b)$;

20) $(a < 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow (0 < a \cdot b)$;

21) $(a < 0) \wedge (0 < b) \Rightarrow (a \cdot b < 0)$;

22) $(a < b) \wedge (0 < c) \Rightarrow (a \cdot c < b \cdot c)$;

23) $(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow (b \cdot c < a \cdot c)$;

24) $0 < 1$;

25) $0 < a \Rightarrow 0 < a^{-1}$.

1.2. Верхні та нижні межі

1.2.1. Поняття обмеженості числових множин

Означення 1.2.1. *Множина $X \subset \mathbb{R}$ називається* ***обмеженою зверху****, якщо*

$$\exists b \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in X \quad x \leq b.$$

При цьому говорять, що число b обмежує множину X зверху, або b – верхня межа множини X.

Приклад 1.2.1. Розглянемо множину

$$X = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots\right\}.$$

Очевидно, що 0 – верхня межа X.

Будь-яка обмежена зверху множина має безліч верхніх меж.

Означення 1.2.2. *Елемент* $x^* \in X$ *називається* ***максимальним елементом*** *множини* X*, якщо* $x \leq x^*,\ \forall x \in X$.

Позначення: $x^* = \max X$.

Очевидно, що x^* буде однією з верхніх меж множини X.

Означення 1.2.3. *Множина* $X \subset \mathbb{R}$ *називається* ***необмеженою зверху****, якщо*

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists x \in X: \quad x > b.$$

Приклад1.2.2. Множина $\mathbb{N}$ необмежена зверху.

Означення 1.2.4. *Множина* $X \subset \mathbb{R}$ *називається* ***обмеженою знизу****, якщо*

$$\exists a \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in X \quad x \geq a.$$

При цьому говорять, що число a обмежує множину X знизу, або a – нижня межа множини X.

Приклад 1.2.3. Розглянемо множину

$$X = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots\right\}$$

Очевидно, що $a = -1$ – нижня межа X.

Будь-яка обмежена знизу множина має безліч нижніх меж.

Означення 1.2.5. *Елемент* $x^{**} \in X$ *називається* ***мінімальним елементом*** *множини* X*, якщо* $x \geq x^{**},\ \forall x \in X$.

Позначення: $x^{**} = \min\ X$.

Очевидно, що x^{**} буде однією з нижніх меж множини X.

Означення 1.2.6. *Множина* $X \subset \mathbb{R}$ *називається* ***необмеженою знизу****, якщо*

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in X: \quad x < a.$$

Приклад 1.2.4. Множина від’ємних цілих чисел необмежена знизу.

Означення 1.2.7. *Множина* $X \subset \mathbb{R}$ *називається* ***обмеженою****, якщо вона обмежена і зверху, і знизу, тобто*

$$\exists a, b \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in X \quad a \leq x \leq b,$$

або

$$\exists K > 0: \quad \forall x \in X \quad |x| \leq K.$$

Приклад 1.2.5. Множина $X = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ обмежена, оскільки всі її елементи належать проміжку [0,1].

1.2.2. Поняття точних меж.

Означення 1.2.8. ***Точною верхньою межею*** *непорожньої обмеженої зверху множини $X \subset \mathbb{R}$ називається найменша з її верхніх меж.*

Позначення: $\sup X$.

Виникає **питання**: чи завжди така найменша верхня межа існуватиме? Тобто, чи коректне наше означення? Адже, мінімальний елемент в нескінченній множині може і не існувати. Відповідь на це питання ми дамо дещо пізніше.

Запишемо розгорнуте означення $\sup X$.

Означення 1.2.9. Число M називається ***точною верхньою межею*** *непорожньої обмеженої зверху множини $X \subset \mathbb{R}$, якщо виконуються наступні умови:*

1) $\forall x \in X \quad x \leq M$;
2) $\forall M' < M \;\; \exists x_1 \in X: \;\; x_1 > M'$,

або

$2')\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_\varepsilon \in X: \;\; x_\varepsilon > M - \varepsilon$.

Якщо в множині X є максимальний елемент, то, очевидно,

$$\max X = \sup X.$$

Аналогічно введемо поняття точної нижньої межі.

Означення 1.2.10. ***Точною нижньою межею*** *непорожньої обмеженої знизу множини $X \subset \mathbb{R}$ називається найбільша з її нижніх меж.*

Позначення: $\inf X$.

Запишемо розгорнуте означення $\inf X$.

Означення 1.2.11. Число m називається ***точною нижньою межею*** *непорожньої обмеженої знизу множини $X \subset \mathbb{R}$, якщо виконуються наступні умови:*

1) $\forall x \in X \quad x \geq m$;
2) $\forall m' > m \ \exists x_2 \in X\colon \ x_2 < m'$,

або

$2')\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x_\varepsilon \in X\colon \ \ x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Якщо в множині X є мінімальний елемент, то, очевидно,

$$\min X = \inf X.$$

Приклад 1.2.6. Розглянемо множину $X = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$.

Очевидно, що $\min X$ не існує, $\inf X = 0, \max X = \sup X = 1$.

1.2.3. Властивості точних меж.

Теорема 1.2.1 (єдиності). *Числова множина не може мати більше ніж одну точну верхню (нижню) межу.*

Доведення проведемо для випадку точної верхньої межі.

Припустимо супротивне. Нехай множина X має 2 супремуми M і M',

$M \neq M'$. Нехай для визначеності $M' < M$.

Оскільки $M = \sup X$, то, за умовою 2) розгорнутого означення, для числа $M' < M \ \exists x_1 \in X\colon x_1 > M'$. Але тоді M' не є точною верхньою межею X. Отримана суперечність означає хибність припущення про існування двох точних верхніх меж.

■

Вправа 1.2.1. Довести теорему 1.2.1 для $\inf X$.

Повернемось тепер до питання, яке виникло раніше: чи коректні наші означення точних меж? Зазначимо, що в умовах теореми не припускається існування sup (inf). Теорема стверджує, що якщо sup (inf) існує, то він єдиний.

Теорема 1.2.2 (існування). *Будь-яка непорожня обмежена зверху (знизу) числова множина має точну верхню (нижню) межу.*

Доведення проведемо для випадку точної верхньої межі.

Нехай A – непорожня обмежена зверху множина. Розглянемо непорожню множину B, елементами якої є всі числа b, які обмежують множину A зверху.

Тоді

$$a \leq b, \qquad \forall a \in A, \qquad \forall b \in B.$$

За аксіомою неперервності,

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon\ a \leq c \leq b,\ \ \forall a \in A,\ \forall b \in B. \tag{1.1.1}$$

Покажемо, що $\sup A = c$.

Перша умова розгорнутого означення $\sup A$ виконується в силу лівої нерівності (1.1.1):

$$a \leq c,\ \ \forall a \in A.$$

Покажемо, що виконується і друга умова.

Нехай $c' < c$. Тоді $c' \notin B$, оскільки для кожного елемента з B виконується права з нерівностей (1.1.1). Тому c' не є верхньою межею множини A, тобто

$$\exists \tilde{a} \in A\colon\ \tilde{a} > c',$$

тобто друга умова розгорнутого означення також виконується.

Отже, $\mathrm{c} = \sup A$. ■

Задача 1.2.2. Довести теорему 1.2.2 для $\inf X$.

Досить часто буває зручно доповнити множину $\mathbb{R}$ елементами, які позначаються $+\infty$ і $-\infty$ та називаються «плюс»- і «мінус»-нескінченністю відповідно.

Означення 1.2.12. ***Розгорнутою множиною дійсних чисел*** $\overline{\mathbb{R}}$ *називається*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\},$$

тобто елементами множини $\overline{\mathbb{R}}$ *є всі дійсні числа і ще два елементи* $+\infty$ і $-\infty$.

Вважаємо при цьому, що

$$-\infty < a < +\infty, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Іноді буває зручно доповнити множину $\mathbb{R}$ лише одним елементом ∞ (нескінченністю без знака). В цьому випадку ∞ вже не пов'язана співвідношенням порядку з елементами $\mathbb{R}$.

Означення 1.2.13. *Нескінченності* $+\infty$, $-\infty$, ∞ *називають також* ***нескінченно віддаленими точками числової прямої****, на відміну від всіх її інших точок, які називаються* ***скінченними точками*** $\overline{\mathbb{R}}$.

Якщо множина X необмежена зверху, то в неї не існує супремума в сенсі введеного нами означення. В цьому випадку будемо вважати, за означенням, що

$$\sup X = +\infty.$$

Аналогічно, $\inf X = -\infty$, якщо множина X необмежена знизу.

Тоді, завдяки цій угоді і теоремі 1.2.2, будь-яка непорожня числова множина має $\sup$ ($\inf$) скінченний, якщо вона обмежена зверху (знизу); і нескінченний, якщо вона необмежена зверху (знизу).

1.3. Принципи Архімеда та математичної індукції

1.3.1. Принцип Архімеда

Теорема 1.3.1.

$$\forall a \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N}\colon\; n > a.$$

Доведення. Припустимо, що твердження теореми не виконується. Це означає, що

$$\exists a \in \mathbb{R}\colon\;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n \leq a.$$

Тобто число a обмежує зверху множину $\mathbb{N}$ і, за теоремою 1.2.2,

$$\exists b \in \mathbb{R}\colon\;\; b = \sup \mathbb{N}.$$

Тоді, за означенням $\sup$, для числа $b' = b - 1 < b$ $\exists n \in \mathbb{N}\colon\; n > b - 1$, звідки $n + 1 > b$. Оскільки $n + 1 \in \mathbb{N}$, то остання нерівність суперечить тому, що $b = \sup \mathbb{N}$.

Ця суперечність доводить теорему. ■

1.3.2. Принцип математичної індукції.

Теорема 1.3.2. *Нехай множина* $A \subset \mathbb{N}$ *задовольняє такі умови:*

1) $A \ni 1$;
2) $A \ni n \Longrightarrow A \ni n+1$.

Тоді $A = \mathbb{N}$.

Доведення. Оскільки $A \ni 1$, то, за умовою 2), $2 = 1 + 1 \in A$, далі

$3 = 2 + 1 \in A, \ldots$ Таким чином, $A \supset \mathbb{N}$. З іншого боку, $A \subset \mathbb{N}$ за умовою теореми. Отже, $A = \mathbb{N}$. ■

1.3.3. Метод математичної індукції

Саме на принципі математичної індукції базується, так званий, ***метод математичної індукції***. Він застосовується, коли виникає потреба довести деяке твердження для всіх натуральних чисел (або для всіх натуральних чисел, починаючи з деякого натурального $\mathbb{N}$).

Доведення за допомогою метода математичної індукції проводиться в 3 етапи:

1. Базис індукції. На цьому етапі перевіряємо істинність твердження для найменшого значення натуральної змінної ($n = 1$ або $n = N$);
2. Припущення індукції. Ми припускаємо, що твердження правильне при деякому $n = k \in \mathbb{N}$;
3. Індуктивний перехід. Враховуючи припущення, зроблене на другому етапі доведення, перевіряємо істинність твердження при $n = k + 1$.

Наприкінці, спираючись на принцип математичної індукції, робимо висновок, що твердження правильне для всіх натуральних чисел (або для $n \geq N$).

Приклад 1.3.1. Довести:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання.

1. Базис індукції:
$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$
2. Припущення індукції: припустимо, що рівність виконується для деякого $n = k \in \mathbb{N}$, тобто правильно, що

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

3. <u>Індуктивний перехід</u>: доведемо, що рівність виконується при $n = k + 1$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Для цього розглянемо суму, яка стоїть в лівій частині цієї рівності, та скористаємось припущенням індукції:

$$(1^2 + 2^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k+1}{6}(k(2k+1) + 6(k+1)) = \frac{k+1}{6}(2k^2 + 7k + 6) =$$

$$= \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3).$$

Спираючись на принцип математичної індукції, робимо висновок, що рівність виконується для всіх натуральних чисел.

Приклад 1.3.2. Довести нерівність Бернуллі:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,, \;\; \forall x \geq -1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання.

1. <u>Базис індукції</u> ($n = 1$):

$$1 + x = 1 + x.$$

2. <u>Припущення індукції</u>: припустимо, що нерівність виконується для деякого $n = k \in \mathbb{N}$, тобто вірно, що

$$(1+x)^k \geq 1 + kx\,, \;\; \forall x \geq -1\,. \tag{1.3.1}$$

3. <u>Індуктивний перехід</u>: доведемо, що нерівність виконується при $n = k + 1$:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x\,, \;\; \forall x \geq -1. \tag{1.3.2}$$

Вочевидь (1.3.2) є тривіально правильною при $x = -1$.

Розглянемо тепер $x > -1$. Домножимо нерівність (1.3.1) на $1 + x > 0$. Отримаємо:

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x,$$

тобто нерівність (1.3.2) правильна.

Нерівність Бернуллі виконується, за принципом математичної індукції.

Приклад 1.3.3. Довести, що число $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ ділиться націло на 11 при будь-якому натуральному n.

Розв'язання.

1. <u>Базис індукції</u> ($n=1$):
$$6^0+3^2+3^0=11 \vdots 11.$$
2. <u>Припущення індукції</u>: припустимо, що для деякого $n=k\in\mathbb{N}$ число
$$(6^{2k-2}+3^{k+1}+3^{k-1}) \vdots 11.$$
3. <u>Індуктивний перехід</u> ($n=k+1$): доведемо, що число
$$\left(6^{2(k+1)-2}+3^{(k+1)+1}+3^{(k+1)-1}\right) \vdots 11.$$

Дійсно,

$$6^{2(k+1)-2}+3^{(k+1)+1}+3^{(k+1)-1}=6^{2k}+3^{k+2}+3^{k}=$$
$$=6^2\cdot 6^{2k-2}+3\cdot 3^{k+1}+3\cdot 3^{k-1}=$$
$$=33\cdot 6^{2k-2}+3\cdot(6^{2k-2}+3^{k+1}+3^{k-1}).$$

Очевидно, що перший доданок ділиться на 11. За припущенням індукції, другий також ділиться на 11. Таким чином,

$$\left(6^{2(k+1)-2}+3^{(k+1)+1}+3^{(k+1)-1}\right) \vdots 11.$$

За принципом математичної індукції, число $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ ділиться націло на 11 при будь-якому натуральному n.

Розділ 2. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

2.1. Основні поняття

2.1.1. Поняття околу точки

Спочатку введемо поняття околу точки розширеної числової прямої.

Почнемо із скінченних точок: $-\infty < a < +\infty$.

Означення 2.1.1. ***Околом*** $\boldsymbol{O(a)}$ ***точки*** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ *називається будь-який інтервал, який містить цю точку.*

Приклад 2.1.1. Інтервал $(1{,}7; 2{,}2)$ є околом точки 2.

Якщо окіл симетричний відносно точки a, то його називають ***симетричним околом точки*** $\boldsymbol{a}$***.***

Зазвичай такий окіл задають за допомогою додатного числа $\varepsilon > 0$, який називають ***радіусом околу.***

Означення 2.1.2. $\boldsymbol{\varepsilon}$ ***– околом точки*** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ *називають інтервал*

$$O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Приклад 2.1.2.

$$O_{0,4}(-4{,}2) = (-4{,}6;\ -3{,}8).$$

Розглянемо тепер нескінченно віддалені точки.

Означення 2.1.3. ***Околом*** $\boldsymbol{O(\infty)}$ ***нескінченно віддаленної точки*** *називається множина точок числової прямої, які лежать зовні будь-якого замкненого проміжку.*

Приклад 2.1.3.

$$O(\infty) = (-\infty; 3) \cup (5;\ +\infty) = \mathbb{R} \backslash [3; 5].$$

Означення 2.1.4. ***Симетричним околом*** ∞ *називається множина точок числової прямої, які лежать зовні будь-якого проміжку, симетричного відносно точки 0.*

Приклад 2.1.4.

$$(-\infty; -3) \cup (3;\ +\infty) = \mathbb{R} \backslash [-3; 3].$$

Зазвичай такий окіл задають за допомогою додатного числа $E > 0$.

Означення 2.1.5. ***E-околом*** ∞ *називається множина*

$$\mathbb{R}\backslash[-E; E] = (-\infty; -E) \cup (E;\ +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ ||x| > E\}.$$

Означення 2.1.6. ***Околом*** $+\infty$ *називається інтервал виду* $(\mathrm{c};\ +\infty), c \in \mathbb{R}$.

Якщо задавати окіл $+\infty$ за допомогою додатного числа E, то отримаємо промінь $O_E(+\infty) = (E;\ +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > E\}$, який називають ***E-околом*** $+\infty$.

Аналогічно, окіл $-\infty$ – це промінь $(-\infty; d), d \in \mathbb{R}$, ***E-окіл*** $-\infty$ – це множина

$$O_E(-\infty) = (-\infty; -E) = \{x \in \mathbb{R}\ |x < -E\}.$$

2.1.2. Початкові відомості про топологію числової прямої

Означення 2.1.7. *Точка* x_0 *називається* ***граничною точкою*** *множини* X, *якщо будь-який її окіл містить принаймні одну точку множини* X, *відмінну від самої точки* x_0. *Точка* x_0 *називається* ***ізольованою точкою*** *множини* X, *якщо існує такий її окіл, який не містить жодної точки множини* X, *окрім самої точки* x_0.

З означення випливає, що будь-який окіл граничної точки містить безліч точок даної множини. Сама гранична точка може як належати, так і не належати даній множині.

Приклад 2.1.5. Знайдемо всі граничні точки множини $X = [-1; 2) \cup \{3\}$. Очевидно, що множина граничних точок X – це проміжок $[-1; 2]$.

Означення 2.1.8. *Множина, яка містить всі свої граничні точки, називається* ***замкненою***.

Означення 2.1.9. *Точка* x_0 *називається* ***внутрішньою точкою*** *множини* X, *якщо вона належить множині X разом із деяким своїм околом.*

Означення 2.1.10. *Множина, всі точки якої є внутрішніми, називається* ***відкритою.***

Приклад 2.1.5. $[0; 12]$ – замкнена множина, $(0; 12)$ – відкрита множина.

2.1.3. Поняття числової послідовності та її границі

Якщо кожному $n \in \mathbb{N}$ поставити у відповідність число $x_n \in \mathbb{R}$, то отримаємо числову множину, елементи якої занумеровані: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

У цьому випадку говорять, що задана ***послідовність чисел***, або ***числова послідовність.***

Позначення: $\{x_n\}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Елементи такої множини називаються ***членами послідовності***, x_n – ***загальним***, або ***n-м членом***.

Оскільки значення x_n залежить від n, то x_n є функцією від n. Тому числова послідовність є функцією натурального аргументу.

Означення 2.1.11. *Число (символ)* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *називається* ***границею послідовності*** $\{\boldsymbol{x_n}\}$, *якщо який би не був окіл* $O(a)$, *починаючи з деякого номера* N, *усі члени послідовності опиняться в цьому околі.*

Тобто, за межами будь-якого околу точки a знаходиться лише скінченна кількість членів $\{x_n\}$.

Позначення: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Якщо окіл $O(a)$ симетричний, то означення 2.1.11 можна переписати в інший спосіб.

$\lim_{n\to\infty} x_n := a \in \mathbb{R}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

$\lim_{n\to\infty} x_n := \infty$, якщо

$$\forall E > 0 \quad \exists N = N(E) \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N \quad |x_n| > E.$$

Вправа 2.1.1. Записати означення $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ та $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ мовою «$\varepsilon - N$».

Означення 2.1.12. *Послідовність називається* ***збіжною****, якщо вона має скінченну границю. В іншому випадку вона називається* ***розбіжною****.*

Вправа 2.1.2. Записати, що означає $\lim_{n\to\infty} x_n \neq a,\ a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Приклад 2.1.6. Доведемо, що $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Запишемо спочатку, користуючись означенням, що потрібно довести:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ та знайдемо для нього номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, починаючи з якого буде виконуватись нерівність $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Для цього розглянемо ліву частину останньої нерівності і скористаємось умовою $n \geq N$ для номерів n. Отримаємо:

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}.$$

Якщо буде виконуватись нерівність

$$\frac{1}{N} < \varepsilon, \tag{2.1.1}$$

то

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$

Розв'язуючи нерівність (2.1.1) відносно N, ми отримаємо умову, якій повинен задовольняти номер N:

$$\frac{1}{N} < \varepsilon \Leftrightarrow N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Зрозуміло, що множина таких номерів нескінченна. Ми можемо вказати найменший номер $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Для цього наведемо спочатку деякі означення.

Означення 2.1.13. ***Цілою частиною числа*** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ *називається найбільше ціле число, що не перевищує* x.

Позначення: $[x]$.

Цілу частину числа ще називають «антьє», від французького «entiere» (цілий).

Приклад 2.1.7. $[-2{,}3] = -3$, $[2{,}3]=2$.

Означення 2.1.14. *Різницю між числом та його цілою частиною називають* ***дробовою частиною*** *числа* $x \in \mathbb{R}$ *і позначають через* $\{x\}$.

Тобто, $\{x\} = x - [x]$. Очевидно з означення випливає, що

$$0 \leq \{x\} < 1, \qquad x = [x] + \{x\}.$$

Дробову частину називають ще «мантисою» від латинського «mantissa» (додача, добавка).

Приклад 2.1.8. $\{-2{,}3\} = 0{,}7;\ \ \{2{,}3\} = 0{,}3.$

Повернемось тепер до прикладу 2.1.6 і вкажемо найменший номер N, який задовольняє нерівності $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Використовуючи поняття цілої частини числа, ми отримуємо, що це буде число $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Приклад 2.1.9. Доведемо, що $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = 1$.

За означенням, ми повинні показати, що

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad \left|\frac{n+1}{n+3} - 1\right| < \varepsilon.$$

Будемо проводити доведення за схемою, наведеною в прикладі 2.1.6. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо ліву частину останньої нерівності:

$$\left|\frac{n+1}{n+3} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n-3}{n+3}\right| = \frac{2}{n+3} < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon \Longrightarrow N > \frac{2}{\varepsilon}\ , N_{min} = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Вправа 2.1.3. Довести:

а) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$;

б) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$;

в) $\lim_{n\to\infty} q^n = 0,\ \ |q| < 1$;

г) $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty,\ \ |q| > 1$.

Приклад 2.1.10. Покажемо, що послідовність $\{(-1)^n\}$ не має границі.

Зазначимо спочатку, що елементи цієї послідовності приймають лише два значення:

$$x_{2k} = 1, \quad x_{2k-1} = -1, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Це означає, що максимальна відстань між довільними членами послідовності дорівнює 2. З цього факту випливає, що жодне число A не може бути границею цієї

послідовності, оскільки, наприклад, окіл $(A-1,\ A+1)$ не буде містити всі члени послідовності, починаючи з деякого номера.

Вправа 2.1.4. Довести, що послідовність $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$ не має границі.

2.2. Властивості границі послідовності

2.2.1. Загальні властивості границі послідовності

Означення 2.2.1. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***сталою, або стаціонарною****, якщо* $\exists a \in \mathbb{R}$: $x_n = a,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Означення 2.2.2. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***фінально сталою****, якщо* $\exists a \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N\quad x_n = a$.

Означення 2.2.3. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***обмеженою****, якщо*

$$\exists M > 0:\ \forall n \in \mathbb{N}\quad |x_n| \leq M.$$

Теорема 2.2.1. *Фінально стала послідовність є збіжною.*

Вправа 2.2.1. Довести теорему 2.2.1.

Теорема 2.2.2 (про єдиність границі). *Якщо послідовність збіжна, її границя єдина.*

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що послідовність має 2 границі:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = B,\ \ A \neq B.$$

Візьмемо $0 < \varepsilon < \frac{|A-B|}{2}$. Тоді, за означенням границі послідовності, для цього ε будемо мати:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Longrightarrow\ \exists N_1 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N_1\quad |x_n - A| < \frac{|A-B|}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = B \Longrightarrow\ \exists N_2 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N_2\quad |x_n - B| < \frac{|A-B|}{2}.$$

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді $\forall n \geq N$ будуть виконуватись обидві нерівності:

$$|x_n - A| < \frac{|A-B|}{2},\quad |x_n - B| < \frac{|A-B|}{2}.$$

Тобто члени послідовності $\{x_n\}$ з номерами $n \geq N$ одночасно опиняться в двох околах, які не перетинаються.

Ця суперечність доводить теорему ■

Теорема 2.2.3. *Збіжна послідовність обов'язково обмежена.*

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ – збіжна числова послідовність, тобто

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A < \infty.$$

Візьмемо в означенні границі $\varepsilon = 1$. Тоді

$$\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |x_n - A| < 1.$$

Скориставшись відомою нерівністю

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b| \leq |a| + |b|, \tag{2.2.1}$$

отримаємо:

$$\big||x_n| - |A|\big| \leq |x_n - A| < 1 \implies \big||x_n| - |A|\big| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -1 < |x_n| - |A| < 1 \implies |x_n| < |A| + 1,\ \ \forall n \geq N.$$

Візьмемо $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, |A| + 1\}$. Тоді, очевидно, виконуються нерівності

$$|x_n| \leq M,\ \ \forall n < N,$$

$$|x_n| < |A| + 1 \leq M,\ \ \forall n \geq N.$$

Об'єднавши ці нерівності, отримаємо, що

$$|x_n| \leq M,\ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

звідки робимо висновок, що $\{x_n\}$ обмежена. ■

Зазначимо, що обернене твердження не є правильним.

Приклад 2.2.1. Послідовність $\{(-1)^n\}$ обмежена, але не має границі.

Теорема 2.2.4. *Якщо*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A < \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}|x_n| = |A|.$$

Доведення.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \;\; \forall n \geq N \quad |x_n - A| < \varepsilon.$$

Враховуючи нерівність (2.2.1), маємо:

$$\big||x_n| - |A|\big| \leq |x_n - A| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \big||x_n| - |A|\big| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N.$$

Це означає, що

$$\lim_{n\to\infty}|x_n| = |A|. \qquad \blacksquare$$

2.2.2. Властивості границь, пов'язані з нерівностями

Теорема 2.2.5. *Нехай*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A < \infty, \qquad A < B \;\; (A > B).$$

Тоді

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad x_n < B \;\; (x_n > B).$$

Доведення проведемо для випадку $A < B$. В означенні границі послідовності візьмемо $\varepsilon = B - A > 0$. Тоді,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \; \forall n \geq N \quad |x_n - A| < B - A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; -B + A < x_n - A < B - A \Longrightarrow x_n - A < B - A \Leftrightarrow x_n < B, \quad \forall n \geq N. \qquad \blacksquare$$

Вправа 2.2.2. Довести теорему 2.2.5 для випадку $A > B$.

Теорема 2.2.6 (про граничний перехід в нерівностях). *Нехай*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A < \infty, \lim_{n\to\infty} y_n = B < \infty \;\; \textit{та}\; x_n \leq y_n\,, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$A = \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n = B.$$

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді $\lim_{n\to\infty} x_n = A > A - \varepsilon$ і, за теоремою 2.2.5,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad x_n > A - \varepsilon.$$

Аналогично:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = B < B + \varepsilon \implies \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad y_n < B + \varepsilon.$$

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді $\forall n \geq N$ будуть виконуватись обидві нерівності:

$$A - \varepsilon < x_n \leq y_n < B + \varepsilon \implies A - \varepsilon < B + \varepsilon \implies A - B < 2\varepsilon.$$

Остання нерівність буде виконуватись при будь-якому $\varepsilon > 0$, звідки робимо висновок, що $A - B \leq 0 \Leftrightarrow A \leq B$. ■

Зауваження 2.2.1. Якщо $x_n < y_n$, $\forall n \geq N$, то при граничному переході буде виконуватись лише нестрога нерівність $A \leq B$. Строгу нерівність гарантувати не можна.

Приклад 2.2.2. $x_n = -\frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n} \implies x_n < y_n$, $\forall n \geq N$.

Але $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Теорема 2.2.7 (принцип двостороннього обмеження). *Нехай задані три послідовності чисел* $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$, *причому* $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Якщо*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A,$$

то $\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

Доведення. Візьмемо $\varepsilon > 0$ та зафіксуємо його. Скористаємось означенням границі послідовності:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \implies \exists N_1 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_1 \quad |x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - A < \varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A \implies \exists N_2 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_2 \quad |z_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < z_n - A < \varepsilon.$$

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді $\forall n \geq N$ будуть виконуватись обидві нерівності:

$$A - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < A + \varepsilon \implies A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon \Leftrightarrow |y_n - A| < \varepsilon, \forall n \geq N.$$

Звідки, за означенням, $\lim_{n\to\infty} y_n = A$. ■

Зауваження 2.2.2. Теореми 2.2.6 і 2.2.7 мають місце і в тих випадках, коли нерівності в умовах теорем виконуються не для всіх $n \in \mathbb{N}$, а починаючи з деякого номера N.

2.3. Нескінченно малі та нескінченно великі величини

2.3.1. Поняття нескінченно малої величини.

Означення 2.3.1. *Послідовність* $\{\alpha_n\}$ *називається* ***нескінченно малою****, якщо* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Теорема 2.3.1. $\lim_{n\to\infty} x_n = A < \infty \iff x_n = A + \alpha_n$, *де* α_n *– нескінченно мала.*

Доведення. 1) Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = A < \infty$. Тоді, за означенням,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \geq N \quad |x_n - A| < \varepsilon.$$

Позначимо $\alpha_n = x_n - A$, тобто $x_n = A + \alpha_n$. Тоді $|\alpha_n| < \varepsilon,\ \forall n \geq N \Longrightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Нехай тепер $x_n = A + \alpha_n,$ де α_n – нескінченно мала, тобто

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \geq N \quad |\alpha_n| = |x_n - A| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = A. \qquad \blacksquare$$

2.3.2. Властивості нескінченно малих величин

Теорема 2.3.2. *Будь-яка нескінченно мала є обмеженою величиною.*

Ця теорема є наслідком теореми 2.2.3.

Теорема 2.3.3. *Сума, різниця та добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малими послідовностями.*

Доведення. Нехай $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ – нескінченно малі. Візьмемо $\varepsilon > 0$ та зафіксуємо його. За означенням,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Longrightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \geq N_1 \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \Longrightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \geq N_2 \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді $\forall n \geq N$ будуть виконуватись обидві нерівності. З урахуванням нерівності (2.2.1) ми отримаємо:

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n) = 0,$$

$|\alpha_n\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon^2}{4}, \forall n \geq N \ \Longrightarrow \ \lim_{n\to\infty}(\alpha_n\beta_n) = 0.$ $\blacksquare$

Вправа 2.3.1. 1) За допомогою метода математичної індукції довести, що алгебраїчна сума та добуток будь-якої **скінченної (!)** кількості нескінченно малих є величини нескінченно малі.

2) Навести приклади, які показують, що ця властивість не виконується для нескінченної кількості нескінченно малих величин.

Зауваження 2.3.1. Частка двох нескінченно малих не завжди є нескінченно малою величиною.

Приклад 2.3.1. Розглянемо нескінченно малі величини $\alpha_n = \frac{1}{n},\ \beta_n = \frac{1}{n^2}$.

Тоді $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = n$ не є нескінченно малою, а $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{1}{n}$ – нескінченно мала.

Приклад 2.3.2. Розглянемо нескінченно малі величини $\alpha_n = \frac{2}{n},\ \beta_n = \frac{1}{n}$.

Тоді $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = 2$ і $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{1}{2}$ – не є нескінченно малими.

Висновок: *у загальному випадку частка двох нескінченно малих є невизначеністю виду* $\frac{0}{0}$.

Теорема 2.3.4. *Добуток обмеженої величини на нескінченно малу є величина нескінченно мала. Зокрема, добуток нескінченно малої на сталу є нескінченно малою величиною.*

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ – нескінченно мала, а $\{y_n\}$ – обмежена.

Тоді, за означенням обмеженої величини,

$$\exists M > 0\colon\ \forall n \in \mathbb{N} \quad |y_n| \le M.$$

З означення нескінченно малої,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \ge N \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тоді

$$|x_n y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,\ \forall n \ge N \implies \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0. \qquad \blacksquare$$

Приклад 2.3.3. $\alpha_n = \sin n$ – обмежена величина, $\beta_n = \frac{1}{n}$ – нескінченно мала. За теоремою 2.3.4, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

2.3.3. Нескінченно великі величини та їхні властивості

Означення 2.3.2. *Послідовність* $\{\beta_n\}$ *називається* ***нескінченно великою****, якщо*

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty \ (\pm\infty).$$

Теорема 2.3.5. *Величина, обернена до нескінченно малої, є величиною нескінченно великою.*

Доведення. Нехай α_n – нескінченно мала. Покажемо, що β_n – нескінченно велика.

За означенням нескінченно малої,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Longrightarrow \forall E > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \forall n \geq N \ \ |\alpha_n| < \frac{1}{E} \ \Longrightarrow \ \frac{1}{|\alpha_n|} = |\beta_n| > E \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty.$$

Теорема доведена.

Теорема 2.3.6. *Величина, обернена до нескінченно великої, є величиною нескінченно малою.*

Вправа 2.3.2. Довести теорему 2.3.6.

Теорема 2.3.7. *Якщо* α_n *– обмежена,* β_n *– нескінченно велика, то* $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ *– нескінченно мала.*

Твердження теореми є наслідком теорем 2.3.4 і 2.3.6.

Теорема 2.3.8. *Добуток двох нескінченно великих є величина нескінченно велика.*

Вправа 2.3.3. Довести теорему 2.3.8.

Теорема 2.3.9. *Якщо* $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ *– нескінченно великі одного знаку, то їх сума теж є величиною нескінченно великою.*

Доведення. Нехай

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = +\infty\,.$$

Тоді, за означенням, $\forall E > 0$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \geq N_1 \quad \alpha_n > \frac{E}{2},$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \geq N_2 \quad \beta_n > \frac{E}{2}.$$

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді $\forall n \geq N$ будуть виконуватись обидві нерівності, тому

$$\alpha_n + \beta_n > \frac{E}{2} + \frac{E}{2} = E, \qquad \forall n \geq N \implies \lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = +\infty\,.$$

Доведення для випадку

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = -\infty$$

проводиться аналогічно. ■

Вправа 2.3.4. Довести теорему 2.3.9 у випадку, коли

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = -\infty.$$

Зауваження 2.3.2. *Якщо* $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ *– нескінченно великі різних знаків, то неможливо нічого стверджувати про їх суму.*

Приклад 2.3.4. Розглянемо нескінченно великі величини $\alpha_n = n,\ \beta_n = -n + \frac{1}{2}$. Тоді $\alpha_n + \beta_n = \frac{1}{2}$ є сталою величиною.

Приклад 2.3.5. Розглянемо нескінченно великі величини $\alpha_n = 2n,\ \beta_n = -n$. Тоді $\alpha_n + \beta_n = n$ є нескінченно великою величиною.

Приклад 2.3.6. Розглянемо нескінченно великі величини $\alpha_n = n + (-1)^n$, $\beta_n = -n$. Тоді $\alpha_n + \beta_n = (-1)^n$ не має границі.

Зауваження 2.3.2. В цьому випадку говорять, що ***має місце невизначеність виду*** $\infty - \infty$, розуміючи при цьому, що в загальному випадку неможливо сказати, що собою являє сума нескінченно великих різного знаку.

Крім того, оскільки $\frac{0}{0}$ – невизначеність, то $\infty \cdot 0$ ***і*** $\frac{\infty}{\infty}$ ***також будуть невизначеностями.*** Дійсно, якщо α_n і β_n – нескінченно малі, то

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \left(\frac{0}{0}\right) = \alpha_n \cdot \frac{1}{\beta_n} = (0 \cdot \infty),$$

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{\frac{1}{\beta_n}}{\frac{1}{\alpha_n}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

2.4. Арифметичні дії над числовими послідовностями

2.4.1. Операції над числовими послідовностями

Означення 2.4.1. *Сумою числових послідовностей* $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *називають числову послідовність* $\{z_n\}$ *таку, що* $z_n = x_n + y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Означення 2.4.2. *Різницею числових послідовностей* $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *називають числову послідовність* $\{z_n\}$ *таку, що* $z_n = x_n - y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Означення 2.4.3. *Добутком числових послідовностей* $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *називають числову послідовність* $\{z_n\}$ *таку, що* $z_n = x_n y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Означення 2.4.4. *Часткою числових послідовностей* $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$, $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, *називають числову послідовність* $\{z_n\}$ *таку, що* $z_n = x_n / y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

2.4.2. Властивості границь, пов'язані з арифметичними діями над числовими послідовностями

Теорема 2.4.1. *Нехай* $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *- числові послідовності. Якщо*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A < \infty, \lim_{n\to\infty} y_n = B < \infty,$$

то виконуються рівності:

а) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = A \pm B$;

б) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = AB$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{A}{B}, y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad B \neq 0.$

Доведення. Оскільки $\lim_{n\to\infty} x_n = A < \infty$, то, за теоремою 2.3.1, існує нескінченно мала α_n така, що $x_n = A + \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Аналогічно,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = B < \infty \implies \exists\, \beta_n\colon \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \qquad y_n = B + \beta_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

а) Розглянемо алгебраїчну суму послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$:

$$x_n \pm y_n = (A + \alpha_n) \pm (B + \beta_n) = (A \pm B) + (\alpha_n \pm \beta_n) = (A \pm B) + \gamma_n,$$

де $\gamma_n = \alpha_n \pm \beta_n$ є нескінченно малою, за теоремою 2.3.3.

З отриманої рівності, користуючись теоремою 2.3.1, робимо висновок, що

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B.$$

б) $x_n y_n = (A + \alpha_n)(B + \beta_n) = AB + \alpha_n B + \beta_n A + \alpha_n \beta_n = AB + \gamma_n,$

де $\gamma_n = \alpha_n B + \beta_n A + \alpha_n \beta_n$ є нескінченно малою, за теоремами 2.3.3 і 2.3.4.

З отриманої рівності, користуючись теоремою 2.3.1, робимо висновок, що

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = AB.$$

в) Оскільки $\lim_{n\to\infty} y_n = B < \infty$, то, за теоремою 2.2.4, $\lim_{n\to\infty} |y_n| = |B|$. За означенням, для

$$\varepsilon = \frac{|B|}{2} > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}\colon \;\; \forall n \geq N \;\; \big||y_n| - |B|\big| < \frac{|B|}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; -\frac{|B|}{2} < |y_n| - |B| < \frac{|B|}{2} \;\; \Rightarrow |y_n| > \frac{|B|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|B|}, \qquad \forall n \geq N. \tag{2.4.1}$$

Розглянемо тепер різницю

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha_n}{B + \beta_n} - \frac{A}{B} = \frac{AB + B\alpha_n - AB - A\beta_n}{(B + \beta_n)B} = \frac{1}{(B + \beta_n)B} \cdot (B\alpha_n - A\beta_n) = \gamma_n.$$

Величина $z_n = \frac{1}{(B+\beta_n)B}$ обмежена. Дійсно, враховуючи нерівність (2.4.1), отримаємо:

$$|z_n| = \left|\frac{1}{(B+\beta_n)B}\right| = \frac{1}{|y_n|\cdot|B|} < \frac{2}{|B|}\cdot\frac{1}{|B|} = \frac{2}{B^2}\ , \qquad \forall n \geq N.$$

Тоді

$$|z_n| = \left|\frac{1}{(B+\beta_n)B}\right| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

де $M = \max\left\{|z_1|, \dots, |z_{N-1}|, \frac{2}{B^2}\ \right\}$.

Величина $B\alpha_n - A\beta_n$ – нескінченно мала, за теоремами 2.3.3 і 2.3.4. Тоді величина $\gamma_n = \frac{1}{(B+\beta_n)B}\cdot(B\alpha_n - A\beta_n)$ теж є нескінченно малою, за теоремою 2.3.4. Користуючись теоремою 2.3.1, робимо висновок, що $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{A}{B}$. ■

Приклад 2.4.1. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3 - 5n^2 + 1}{2n^3 + 4}.$$

Розв'язання. Очевидно, що величини, які стоять у чисельнику і знаменнику, є нескінченно великими, тому маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Ця невизначеність розкривається шляхом ділення чисельника та знаменника на нескінченно велику, яка прямує до нескінченності найшвидше. В даному прикладі такою нескінченно великою є найбільший степінь змінної n, тобто n^3. Поділимо чисельник та знаменник на n^3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3 - 5n^2 + 1}{2n^3 + 4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6n^3}{n^3} - 5\frac{n^2}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3} + \frac{4}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{6 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{4}{n^3}}.$$

Оскільки величини $\frac{5}{n}, \frac{1}{n^3}, \frac{4}{n^3}$ є нескінченно малими, то, використовуючи теорему 2.4.1, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{4}{n^3}} = \frac{6 - 0 + 0}{2 + 0} = 3.$$

Приклад 2.4.2. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}.$$

Розв'язання. Знову маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-5\cdot 5^n}{2\cdot 2^n+25\cdot 5^n}.$$

Нескінченно великою, яка прямує до нескінченності найшвидше, є величина 5^n. Поділимо чисельник та знаменник на неї:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{5^n}-5\cdot\frac{5^n}{5^n}}{2\cdot\frac{2^n}{5^n}+25\cdot\frac{5^n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n-5}{2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+25}.$$

Оскільки величина $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ є нескінченно малою (див. вправу 2.1.3(в)), то, використовуючи теорему 2.4.1, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n-5}{2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+25}=\frac{0-5}{0+25}=-\frac{1}{5}.$$

Зауваження 2.4.1. Якщо порівняти поведінку графіків показникової функції a^x $(a>1)$, степеневої x^p $(p>0)$ і логарифмічної $\log_a x$ $(a>1)$, то можна зробити такий висновок (який пізніше ми строго доведемо): найповільніше зростає логарифмічна функція, а найшвидше – показникова.

Приклад 2.4.3. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}.$$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3^n}{n+3\cdot 3^n}.$$

Враховуючи зауваження 2.4.1, ми можемо стверджувати, що нескінченно велика 3^n прямує до нескінченності швидше за нескінченно великі n і n^3. Тому поділимо чисельник та знаменник на 3^n. Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{3^n}+1}{\frac{n}{3^n}+3}.$$

За зауваженням 2.4.1, величини $\frac{n}{3^n}$,$\frac{n^3}{3^n}$ є нескінченно малими, тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{3^n}+1}{\frac{n}{3^n}+3}=\frac{0+1}{0+3}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 2.4.4. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right).$$

Розв'язання. В цьому прикладі маємо невизначеність виду $\infty-\infty$. Домножимо та поділимо на вираз $\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}$, спряжений до $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1-n^2+1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{2}{1+1}=1.$$

Приклад 2.4.5. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

Розв'язання. Цей приклад принципово відрізняється від попередніх тим, що містить суму нефіксованої кількості доданків: з ростом n кількість доданків теж зростає. Тому теорему 2.4.1 застосувати до такої суми не можна. Спробуємо спочатку обчислити суму, границю якої потрібно знайти. Для цього перетворимо доданки в такий спосіб:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}\ldots+\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{3}{2\cdot 3}-\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 4}-\frac{3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{(n+1)}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.$$

Приклад 2.4.6. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Доведення. Розглянемо послідовність із загальним членом n і запишемо його таким чином:

$$n=\left(1+\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\right)^n.$$

Далі скористаємось формулою біному Ньютона:

$$n=\left(1+\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\right)^n=1+n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2+\cdots+\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n>$$

$$>\frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n>\frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2\ \Rightarrow\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2<\frac{2}{n-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\le\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\sqrt{\frac{2}{n-1}}\,. \qquad (2.4.2)$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0,$$

то з нерівності (2.4.2), використовуючи принцип двостороннього обмеження (теорема 2.2.7), отримуємо, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=0 \;\; \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

2.5. Границя монотонної послідовності

2.5.1. Поняття монотонної послідовності

Означення 2.5.1. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***строго монотонно зростаючою****, якщо* $x_n < x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Позначення: $\{x_n\} \uparrow\uparrow$.

Означення 2.5.2. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***монотонно неспадною****, якщо* $x_n \le x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Позначення: $\{x_n\} \uparrow$.

Означення 2.5.3. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***монотонно спадною****, якщо* $x_n > x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Позначення: $\{x_n\} \downarrow\downarrow$.

Означення 2.5.4. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***монотонно незростаючою****, якщо* $x_n \ge x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Позначення: $\{x_n\} \downarrow$.

Послідовності всіх визначених типів об’єднуються в клас ***монотонних послідовностей.***

Приклад 2.5.1.

а) Послідовність

$$1, 2, \dots, n, \dots$$

монотонно зростаюча.

б) Послідовність

$$1, 1, 2, 2, \dots, n, n, \dots$$

неспадна.

в) Послідовність

$$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

не є монотонною.

2.5.2. Границя монотонної послідовності.

Означення 2.5.5. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***обмеженою знизу****, якщо множина її значень обмежена знизу, тобто*

$$\exists M \in \mathbb{R}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \geq M.$$

Означення 2.5.6. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***необмеженою знизу****, якщо*

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ x_n < M.$$

Означення 2.5.7. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***обмеженою зверху****, якщо множина її значень обмежена зверху, тобто*

$$\exists M \in \mathbb{R}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \leq M.$$

Означення 2.5.8. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***необмеженою зверху****, якщо*

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ x_n > M.$$

Зазначимо, що будь-яка неспадна послідовність обмежена знизу своїм першим членом:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \cdots \quad \Longrightarrow \quad x_n \geq x_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Зверху вона може бути необмежена.

Приклад 2.5.2.

а) Послідовність $x_n = 2^n$ необмежена зверху.

б) Послідовність $y_n = 1 - \frac{1}{n}$ обмежена зверху.

Будь-яка незростаюча послідовність обмежена зверху своїм першим членом:

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \cdots \quad \Longrightarrow \quad x_n \leq x_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Знизу вона може бути необмежена.

Приклад 2.5.3.

а) Послідовність $x_n = \frac{1}{2^n}$ обмежена знизу.

б) Послідовність $y_n = -n^2$ необмежена знизу.

Наведемо теорему, яка дає зв'язок між обмеженістю та збіжністю монотонної послідовності.

Теорема 2.5.1 (Вейєрштрасса). *Будь-яка монотонна послідовність має границю в* $\overline{\mathbb{R}}$. *Причому, неспадна послідовність, яка обмежена зверху, має скінченну границю, а необмежена зверху має границю* $+\infty$. *Незростаюча послідовність, яка обмежена знизу, має скінченну границю, а необмежена знизу має границю* $-\infty$.

Доведення проведемо для неспадної послідовності (у випадку незростаючої послідовності доведення аналогічне).

Розглянемо два випадки.

I. Послідовність $\{x_n\}$ неспадна і обмежена зверху. Тоді, оскільки множина значень послідовності непорожня та обмежена зверху, то, за теоремою 1.2.2 про існування точної верхньої межі,

$$\exists a \in \mathbb{R}: \ \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = a < \infty.$$

Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задане у відповідності з розгорнутим означенням sup:

1) $x_n \le a, \ \forall n \in \mathbb{N}$;

2)$\varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \ x_N > a - \varepsilon$.

Оскільки $\{x_n\} \uparrow$, то

$$a - \varepsilon < x_N \le x_n \le a, \qquad \forall n \ge N.$$

Тоді

$$a - \varepsilon < x_n \le a \ \ \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a \le 0 < \varepsilon \ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon, \qquad \forall n \ge N.$$

За означенням границі послідовності, отримуємо, що $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

II. Розглянемо тепер неспадну і необмежену зверху послідовність $\{x_n\}$. Покажемо, що в цьому випадку $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, тобто

$$\forall E > 0 \;\; \exists N = N(E) \in \mathbb{N}\colon \; \forall n \geq N \;\; x_n > E.$$

Оскільки $\{x_n\}$ необмежена зверху, то, за означенням,

$$\forall E \in \mathbb{R} \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; x_N > E.$$

Оскільки $\{x_n\} \uparrow$, то $x_n \geq x_N > E, \; \forall n \geq N$.

Таким чином, ми отримали, що

$\forall E > 0 \;\; \exists N = N(E) \in \mathbb{N}\colon \; \forall n \geq N \;\; x_n > E \;\; \Longrightarrow \; \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$ ■

Вправа 2.5.1. Довести теорему Вейєрштрасса у випадку незростаючої послідовності.

2.6. Число e.

Розглянемо послідовність $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$. Покажемо, що вона має скінченну границю, використовуючи теорему Вейєрштрасса.

Для доведення скористаємось нерівністю Бернуллі (див. приклад 1.3.2):

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx\,, \;\; \forall x \geq -1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо допоміжну послідовність:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

Ця послідовність обмежена знизу:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що вона спадна:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \left(\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{(n^2-1)+1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{(n^2+n-1)n}{(n^2-1)(n+1)}=\frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1}>1, n>1, \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y_{n-1}>y_n, \qquad n>1, \qquad \Rightarrow y_n \downarrow\downarrow.$$

За теоремою Вейєрштрасса, існує скінченна границя послідовності y_n. Оскільки $y_n \in (2,4]$, то значення границі належить проміжку $[2,4]$.

Повернемось тепер до послідовності x_n. Покажемо, що вона бути мати таку ж саму границю, як і послідовність y_n:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty} y_n := e.$$

Тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n := e. \tag{2.6.1}$$

Число e ірраціональне, $e=2{,}718\ldots$

Зазначимо, що в лівій частині рівності (2.6.1) ми маємо невизначеність виду 1^∞. В подальшому невизначеності такого виду ми будемо розкривати за допомогою рівності (2.6.1).

Приклад 2.6.1. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n.$$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду 1^∞. Для знаходження границі цієї послідовності скористаємось (2.6.1):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n=(1^\infty)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{3}}\right)^{\left(-\frac{n}{3}\right)\cdot(-3)}=e^{-3}.$$

Приклад 2.6.2. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^n.$$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду 1^∞. Для знаходження границі цієї послідовності знову скористаємось (2.6.1):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^n=(1^\infty)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)+2}{n+2}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{2}\cdot\frac{2n}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2n}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2}{1+\frac{2}{n}}}=e^2.$$

2.7. Підпослідовності

2.7.1. Поняття підпослідовності

Означення 2.7.1. *Нехай* $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ *– зростаюча послідовність натуральних чисел. Тоді послідовність* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ *називається* ***підпослідовністю*** *послідовності* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

У підпослідовності роль номера, який набуває всіх натуральних значень поспіль, відіграє вже не n, а k.

Приклад 2.7.1. Послідовність 1, 3, 5, 7, … є підпослідовністю послідовності натуральних чисел, а послідовність 1, 5, 3, 7, … не є підпослідовністю $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Користуючись означенням, можна отримати наступні властивості підпослідовностей.

Теорема 2.7.1. *Якщо послідовність обмежена, то будь-яка її підпослідовність теж обмежена.*

Вправа 2.7.1. Довести теорему 2.7.1.

Теорема 2.7.2. *Якщо* $\lim_{n\to\infty} x_n = a \le \infty$, *то будь-яка підпослідовність послідовності* x_n *також має границю, яка дорівнює* a.

Доведення проведемо у випадку, коли $\lim_{n\to\infty} x_n = a < \infty$.

За означенням границі маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \ge N \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Оскільки x_{n_k} – підпослідовність, то

$$\forall n_k \ge N \quad \left|x_{n_k} - a\right| < \varepsilon.$$

Враховуючи, що $\{n_k\}$ – строго зростаюча нескінченно велика, отримуємо, що

$$\exists K \in \mathbb{N}\colon\ \forall k \ge K\ \ n_k \ge N \ \implies\ \left|x_{n_k} - a\right| < \varepsilon.$$

Тоді, за означенням, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. ■

Вправа 2.7.2. Довести теорему 2.7.2 для $a = \infty$.

Із теореми 2.7.2 випливає, що відкидання скінченної кількості перших членів послідовності не впливає ані на збіжність, ані на величину границі (у разі збіжності).

Крім того, якщо послідовність містить дві підпослідовності, які мають різні границі, то така послідовність не має границі.

Приклад 2.7.2. Послідовність $(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, не має границі, оскільки

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = -1.$$

Таким чином, якщо послідовність не має границі, це не виключає можливості існування границі для її підпослідовностей.

2.7.2. Часткові границі послідовності. Верхня і нижня границі послідовності

Означення 2.7.2. *Число* a *або символ* $\pm\infty$ *називається* ***частковою границею послідовності****, якщо існує підпослідовність, границя якої дорівнює* a *або* $\pm\infty$.

Означення 2.7.3. ***Верхньою границею послідовності*** *називається найбільша з часткових границь в* $\overline{\mathbb{R}}$.

Позначення:$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Означення 2.7.4. ***Нижньою границею послідовності*** *називається найменша з часткових границь в* $\overline{\mathbb{R}}$.

Позначення: $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Якщо послідовність має границю, то всі її часткові границі дорівнюють одна одній, верхня і нижня границя співпадають та дорівнюють границі послідовності:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \leq \infty \implies \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Теорема 2.7.3. Будь-яка послідовність дійсних чисел $\{x_n\}$ має верхню (нижню) границю, яка дорівнює скінченному числу або $+\infty$ $(-\infty)$.

Доведення. Для будь-якої послідовності існують дві можливості: вона або обмежена, або необмежена.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\{x_n\}$ необмежена. Тоді вона необмежена принаймні з однієї сторони: або зверху, або знизу. Покажемо, що будь-яка послідовність, яка необмежена зверху (знизу), містить підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, для якої $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$ $(-\infty)$.

<u>Перший випадок</u>. Нехай $\{x_n\}$ необмежена зверху. Покажемо, що існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, для якої $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

Оскільки $\{x_n\}$ необмежена зверху, то, за означенням,

$$\forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N}\colon\; x_n > M.$$

Тоді для $M = 1$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$: $x_{n_1} > 1$. Відкинемо всі члени послідовності $\{x_n\}$, закінчуючи x_{n_1}. В послідовності, яка залишиться, номери членів більші за n_1, і ця послідовність необмежена. Аналогічно:

$$M = 2 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}: \ n_2 > n_1, \qquad x_{n_2} > 2,$$

$$M = 3 \quad \exists n_3 \in \mathbb{N}: n_3 > n_2, \qquad x_{n_3} > 3,$$

……..

$$M = k \quad \exists n_k \in \mathbb{N}: n_k > n_{k-1}, \qquad x_{n_k} > k,$$

……..

Таким чином, отримаємо підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, члени якої задовольняють умову $x_{n_k} > k, \ \forall k \in \mathbb{N}$. Звідси маємо, що $\{x_{n_k}\}$ – додатна нескінченно велика, тобто $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

<u>Другий випадок</u>. Послідовність $\{x_n\}$ необмежена знизу. Аналогічно можна довести, що існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, яка задовольняє умову $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$.

<u>Третій випадок</u>. Нехай $\{x_n\}$ тепер обмежена зверху. Покажемо, що в цьому випадку існує скінченна верхня границя цієї послідовності.

Немає сенсу розглядати послідовність, яка має лише одну часткову границю. В цьому випадку послідовність збігається і твердження теореми очевидне. Нехай послідовність $\{x_n\}$ має принаймні 2 часткові границі (може мати і безліч). Позначимо через $B = \{b\}$ множину всіх часткових границь послідовності $\{x_n\}$. Покажемо, що B – обмежена зверху множина.

Оскільки $\{x_n\}$ обмежена зверху, то, за означенням,

$$\exists M \in \mathbb{R}: \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \le M.$$

Тому

$$\forall \{x_{n_k}\} \qquad x_{n_k} \le M. \tag{2.7.1}$$

З іншого боку, за означенням множини B,

$$\forall b \in B \quad \exists \{x_{n_k}\}: \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = b.$$

Застосуємо теорему 2.2.6 про граничний перехід в нерівностях до (2.7.1). Отримаємо:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = b \le M,$$

тобто множина B обмежена зверху. Очевидно, що вона непорожня. Тому, за теоремою 1.2.2, вона має скінченну точну верхню межу $\sup B = b^* < \infty$. Покажемо, що b^* – одна з часткових границь послідовності $\{x_n\}$. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що $b^* \notin B$, тобто b^* не є частковою границею.

Зазначимо, що якщо b^* –часткова границя послідовності $\{x_n\}$, то в будь-якому околі точки b^* міститься безліч членів x_{n_k} (а тому і членів x_n).

Якщо b^* не є частковою границею, то існує такий окіл точки b^*, який містить лише скінченну кількість членів послідовності $\{x_n\}$.

З іншого боку, $b^* = \sup B$, тому, за означенням точної верхньої межі,

$\exists b \in B$: $b < b^*$ і b належить вказаному околу. Але b – часткова границя, тому будь-який окіл точки b містить безліч членів послідовності $\{x_n\}$. Суперечність.

<u>Четвертий випадок</u>. $\{x_n\}$ обмежена знизу. Аналогічно можна довести, що в цьому випадку існує скінченна нижня границя цієї послідовності. ■

Вправа 2.7.3. Провести доведення теореми 2.7.3 у другому і четвертому випадках.

Зазначимо, що з доведення теореми 2.7.3 випливає, по-перше, якщо послідовність обмежена зверху (знизу), то її верхня (нижня) границя скінченна. По-друге, з будь-якої необмеженої зверху (знизу) числової послідовності можна виділити підпослідовність, яка прямує до $+\infty$ $(-\infty)$.

У випадку необмеженої послідовності $\{x_n\}$ іноді виявляється неможливим виділення збіжної послідовності. Навпаки, для обмеженої послідовності має місце таке твердження, яке є наслідком теореми 2.7.3.

Теорема 2.7.4 (Больцано-Вейєрштрасса). *Кожна обмежена послідовність містить збіжну підпослідовність.*

Приклад 2.7.3. Знайти $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ і $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, якщо

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

Розв'язання. Вочевидь перший доданок є нескінченно малою величиною. Оскільки вираз $(-1)^n$ набуває різних значень в залежності від парності номера n, то значення другого доданку теж залежать від парності n. Тому має сенс розглянути дві підпослідовності:

$$x_{2k} = \frac{1}{2k} + 1, \qquad x_{2k-1} = -\frac{1}{2k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Знайдемо їхні границі:

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2k} + 1\right) = 1,$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{2k-1}\right) = 0.$$

Вочевидь будь-яка інша збіжна підпослідовність матиме одну із знайдених границь. Тому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 0.$$

2.8. Необхідна та достатня умова збіжності числової послідовності

2.8.1. Поняття необхідної та достатньої умов

Означення 2.8.1. *Якщо висловлення $A \Longrightarrow B$ істинне, то A називається* ***достатньою умовою*** *для B, а B –* ***необхідною умовою*** *для A.*

Приклад 2.8.1. А: «Тарас вміє читати», В: «Тарас знає абетку».

Вочевидь $A \Longrightarrow B$. Тому А – достатня умова для В, а В – необхідна умова для А.

Приклад 2.8.2. А: «Натуральні числа a і b непарні», В: «Добуток ab натуральних чисел – непарне число».

Вочевидь $A \Longrightarrow B$, $B \Longrightarrow A$. Тобто A – необхідна та достатня умова для B, а B – необхідна й достатня умова для A (позначення $A \Leftrightarrow B$).

2.8.2. Критерій Коші.

Означення 2.8.2. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***фундаментальною, або послідовністю Коші,*** *якщо*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall m, n \geq N \quad |x_m - x_n| < \varepsilon. \qquad (2.8.1)$$

Умова (2.8.1) *називається* ***умовою Коші****.*

Теорема 2.8.1 (критерій Коші). *Для того щоб послідовність дійсних чисел була збіжною, необхідно та достатньо, щоб вона була фундаментальною.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що $\lim_{n\to\infty} x_n = a < \infty$, тобто послідовність $\{x_n\}$ збіжна. Покажемо, що вона фундаментальна. За означенням границі послідовності маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $m, n \geq N$. Тоді $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ і $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Розглянемо

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Це означає, що послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна.

Достатність. Припустимо тепер, що послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна, і доведемо, що вона збіжна.

За означенням 2.8.2,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall m, n \geq N \quad |x_m - x_n| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ -\varepsilon < x_m - x_n < \varepsilon \ \Leftrightarrow \quad x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N.$$

Зафіксуємо $m \geq N$. Тоді отримаємо, що всі члени x_n з номерами $n \geq N$ містяться в інтервалі $(x_m - \varepsilon,\ x_m + \varepsilon)$. Неважко розширити межі інтервалу так, щоб охопити й перші $N - 1$ члени $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$. Це означає, що послідовність $\{x_n\}$ обмежена. Тобто ми довели, що фундаментальна послідовність обмежена. Тоді, за теоремою 2.7.4, можна виділити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a < \infty$. Покажемо, що $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. З умови Коші:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}: \quad \forall m, n \geq N_1 \quad |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

З іншого боку, $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a$. Тоді, за означенням,

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}: \quad \forall n_k \geq N_2 \quad \left|x_{n_k} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді для $\forall n, n_k \geq N$ будуть виконуватись обидві нерівності, тому

$$|x_n - a| = \left|x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a\right| \leq \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Це і означає, що $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Зауваження 2.8.1. Припустимо, що в умові (2.8.1) $m > n$. Тоді $m = n + p$, $p \in \mathbb{N}$, і умова Коші може бути записана таким чином:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \exists p \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N \quad \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon.$$

Розділ 3.

ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

3.1. Функція. Основні поняття.

3.1.1. Загальне поняття функції

Нехай X і Y – довільні множини.

Означення 3.1.1. *Якщо кожному елементу $x \in X$ поставлено у відповідність один і лише один елемент y із множини Y, то будемо говорити, що на множині X задано* ***функцію (відображення, відповідність)*** *зі значеннями в множині Y.*

Якщо позначити цю функцію буквою f, то можна записати $f: X \to Y$. Через $f(x)$ позначають значення функції f на елементі x, тобто той елемент $y \in Y$, який поставлено у відповідність елементу $x \in X$, і пишуть $y = f(x)$.

Елемент $x \in X$ називають ***аргументом***, або ***незалежною змінною***, а елемент $y \in Y: y = f(x)$ – ***значенням*** функції в точці x, або ***залежною змінною***. До того ж множина X називається ***областю визначення*** функції f, а множина $Y_f \subset Y$, $Y_f = \{y: y = f(x),\ x \in X\}$ – ***областю значень*** функції f. Для позначення функції, окрім запису $f: X \to Y$, використовують також $y = f(x)$, $x \longmapsto f(x)$.

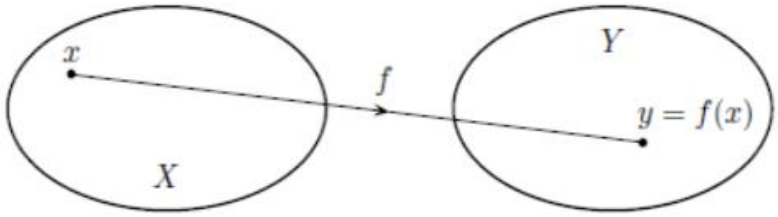


Рис. 3.1.1. Функція $f: X \to Y$

3.1.2. Образи і прообрази

Якщо при відображенні $f: X \to Y$ елементу $x \in X$ відповідає елемент $y \in Y$, то говорять, що елемент y є ***образом*** елемента x (і пишуть $y = f(x)$), а елемент x у цьому випадку називають ***прообразом*** елемента y (і пишуть $x = f^{-1}(y)$).

Якщо $E \subset X$, то множина $f(E) \coloneqq \{y \in Y: y = f(x),\ x \in E\}$ називається ***образом множини*** E. Зокрема, $Y_f = f(X)$.

Якщо $D \subset Y$, то множина $f^{-1}(D) \coloneqq \{x \in X: f(x) \in D\}$ називається ***прообразом множини*** D.

Приклад 3.1.1.

Нехай $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, тоді $f(\mathbb{R}) = [0; +\infty)$;

$f([-2; 2]) = [0; 4]$, $\quad f^{-1}([1; 9]) = [-3; -1] \cup [1; 3]$.

3.1.3. Композиція функцій

Нехай функція g визначена на множині Y, а функція f – на множині X, причому $f(X) \subset Y$. Тоді ***складна функція*** (***суперпозиція, композиція*** цих функцій) $g \circ f$ визначається на X в такий спосіб:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big), \ \ x \in X.$$

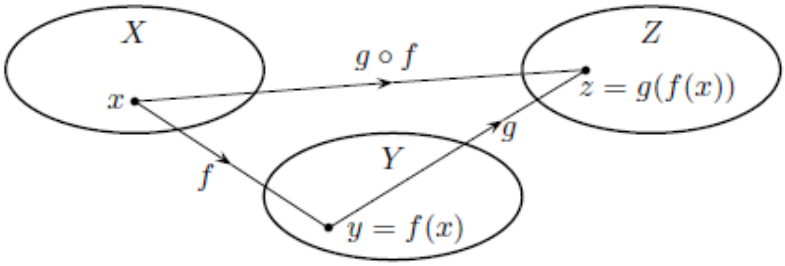


Рис. 3.1.2. Композиція функцій

Приклад 3.1.2.

1. Нехай $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.
Тоді $(f \circ f)(x) = x^4, x \in \mathbb{R}$; $\qquad (f \circ g)(x) = x, x \in \mathbb{R}_+$;
$(g \circ f)(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$; $\quad (g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}, x \in \mathbb{R}_+$.
2. Нехай $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; +\infty), \\ 0, & x \in (-\infty; 0); \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$
Тоді $(f \circ g)(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$; $\qquad (g \circ f)(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$;
$(f \circ f)(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$; $\qquad (g \circ g)(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$.

Функція називається ***числовою***, якщо її значеннями є дійсні числа.

Означення 3.1.2. *Числова функція* $f: X \to \mathbb{R}$ *називається* ***обмеженою (зверху, знизу)****, якщо множина її значень* $f(X)$ *є обмеженою (зверху, знизу).*

Означення 3.1.3. $\sup f \coloneqq \sup f(X)$ $(\inf f \coloneqq \inf f(X))$ *називається* ***точною верхньою (нижньою) межею*** *числової функції.*

Вправа 3.1.1. Визначити точну верхню і точну нижню межі функції $f(x)$, якщо

1) $f(x) = x^2, x \in [-2; 5)$;
2) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

3.1.4. Елементарні функції та їх класифікація

Основними елементарними функціями називаються функції:

- стала ($y = C, c - const$);
- показникова ($a^x, a > 0$);
- логарифмічна ($\log_a x, a > 0, a \neq 1$);
- тригонометричні ($\sin x, \cos x, \mathrm{tg} x, \mathrm{ctg} x$);
- обернені тригонометричні ($\arcsin x, \arccos x, \mathrm{arctg}\, x, \mathrm{arcctg}\, x$).

Функції, отримані з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних дій та скінченної кількості композицій, називаються ***елементарними***.

Елементарні функції поділяються на алгебраїчні та трансцендентні.

Алгебраїчною називається функція, в якій над аргументом здійснюється скінченна кількість арифметичних дій.

Алгебраїчні функції поділяються на:

- цілі раціональні (многочлени);
- дробово-раціональні (відношення двох многочленів);
- ірраціональні (якщо серед операцій над аргументом є добування кореня).

Цілі і дробово-раціональні функції складають множину ***раціональних*** функцій.

Будь-яка неалгебраїчна функція називається ***трансцендентною***. До трансцендентних функцій відносяться тригонометричні, обернені тригонометричні, показникові, логарифмічні функції.

3.1.5. Однозначні та багатозначні функції

Якщо кожному елементу $x \in X$ за деяким законом поставлено у відповідність не один, а декілька або навіть безліч елементів $y \in Y$, то функцію називають ***багатозначною***.

Наприклад, $y = \pm\sqrt{x}$ – двозначна функція (часто замість цієї двозначної функції розглядають окремо дві однозначні функції, $y = \sqrt{x}$ і $y = -\sqrt{x}$, – дві гілки двозначної функції).

Математичний аналіз вивчає однозначні функції. Але ми будемо розглядати і багатозначні функції, оскільки методами математичного аналізу можна, наприклад, знаходити довжини дуг кривих, які є графіками багатозначних функцій, площі фігур, обмежених такими кривими.

Багатозначним функціям притаманне завдання їх в неявній (параметричній формі), у системах координат, відмінних від декартової (зокрема, в полярній системі координат).

3.1.6. Полярна система координат

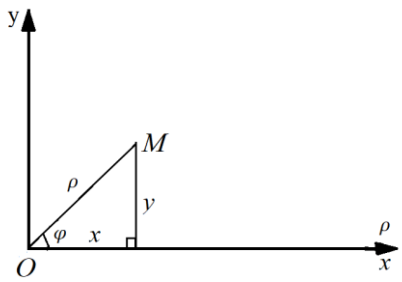
Для визначення положення точки на площині разом з декартовою системою часто використовується полярна система координат.

Нехай на площині задано точку O (назвемо її ***полюсом***) та промінь з початком в точці O (назвемо його ***полярною віссю***), а також вказана одиниця масштабу.

Будемо визначати положення довільної точки M площини по відношенню до полюса і полярної осі. Відрізок OM назвемо ***полярним радіусом*** точки M, а кут φ між вектором $\overline{OM}$ і полярною віссю – ***полярним кутом*** точки M. Полярний кут вимірюється у напрямку «проти годинникової стрілки» (цей напрямок ми вважаємо додатним). Крім того, домовимось кут φ брати в межах $0 \le \varphi < 2\pi$ (інколи варто брати φ в межах $-\pi < \varphi \le \pi$). Тоді, вочевидь, кожній точці M площини відповідає єдина пара чисел (ρ, φ) (винятком є полюс, для якого $\rho = 0$, а φ – довільний). З іншого боку, кожній парі чисел (ρ, φ) ($\rho \ge 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$ або $-\pi < \varphi \le \pi$) відповідає єдина точка площини, для якої ρ є полярним радіусом, а φ – полярним кутом. Полярний радіус і полярний кут точки M будемо називати її ***полярними координатами***. Полярні координати домовимось писати в дужках після літери, яка позначає точку, вказуючи спочатку ρ, а потім φ: $M(\rho, \varphi)$.

Вправа 3.1.2. Побудувати $M(2, \frac{3\pi}{4})$, $A(1, -\frac{\pi}{2})$.

Установимо зв'язок між декартовими і полярними координатами заданої точки M.



Нехай задано декартову систему координат OXY і полярну систему координат з полюсом в початку координат O і полярною віссю OP, яка співпадає з віссю абсцис OX. Позначимо через (x, y) декартові координати довільної точки M, а через (ρ, φ) – її полярні координати.

Тоді

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Формули (3.1.1) є формулами переходу від полярної системи координат до декартової.

Щоб знайти полярні координати, коли відомі декартові, піднесемо до квадрату рівняння (3.1.1), а потім додамо їх. Отримаємо: $x^2 + y^2 = \rho^2$, звідки $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Далі з (3.1.1) отримаємо $tg\, \varphi = \frac{y}{x}$. За останньою формулою визначається тангенс полярного кута φ , при цьому ми отримаємо два значення φ (оскільки $0 \le \varphi < 2\pi$ або $-\pi < \varphi \le \pi$), які належать різним чвертям. Оскільки $y = \rho \sin \varphi$, то з цих двох значень потрібно вибрати те, для якого синус має той самий знак, що і y. Отже, з урахуванням наведених зауважень, маємо формули переходу від декартової системи координат до полярної:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \frac{y}{x}. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Приклад 3.1.3. Нехай точку $M(1, -1)$ задано в декартовій системі координат, тоді в полярній системі вона матиме координати: $M(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$.

Для введених нами полярних координат $\rho \ge 0$, $-\pi < \varphi \le \pi$. Але таке обмеження незручне при побудові кривих. У подальшому будемо вважати, що ρ і φ

можуть набувати будь-яких дійсних значень. У такому разі побудову точки за її полярними координатами домовимось проводити таким чином.

Повернемо полярну вісь на кут φ, здійснюючи, якщо потрібно, декілька повних обертів, та відкладемо від полюса відрізок OM довжини $|\rho|$ у напрямку вектора $\overline{OM}$, якщо $\rho > 0$, і у протилежному напрямку, якщо $\rho < 0$. За такої побудови будь-якій парі дійсних чисел (ρ, φ) відповідатиме єдина точка M. Саме тому ці числа і вважаються координатами точки.

Вправа 3.1.3. Побудувати точки $A(-1, \frac{9\pi}{2})$; $B(2, -\frac{17\pi}{4})$.

Зазначимо, що формули (3.1.1) залишаються правильними і в цьому випадку. Формули (3.1.2) набудуть вигляду:

$$\begin{cases} \rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}, \end{cases}$$

Причому φ вибирається таким чином, щоб $\sin\varphi$ мав той самий знак, що і $y\rho$.

Вправа 3.1.4. Побудувати криві у полярній системі координат

1) $\rho = 2$;
2) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$;
3) $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$ ($\rho = a(1 + \cos\varphi)$ – кардіоїда, крива, яка описується фіксованою точкою кола радіуса a, що котиться ззовні по нерухомому колі такого самого радіуса);
4) $\rho = 3\sin 4\varphi$ (чотирипелюсткова троянда);
5) $\rho = 10\sin 3\varphi$ (трипелюсткова троянда);
6) $\rho^2 = 36\cos 2\varphi$ (лемніската Бернуллі);
7) $\rho = \varphi$ (спіраль Архімеда).

3.1.7. Параметричне завдання функцій

Нехай задано два рівняння:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [T_1, T_2] \tag{3.1.3}$$

Кожному значенню t відповідає єдине значення x і y. Якщо розглядати x і y як координати точки на координатній площині Oxy, то кожному значенню t буде відповідати певна точка площини. Коли t змінюється від T_1 до T_2, ця точка на

площині описує певну криву. Рівняння (3.1.3) називається ***параметричним рівнянням*** кривої, t називається ***параметром***, а такий спосіб завдання кривої – ***параметричним***.

Приклад 3.1.4.

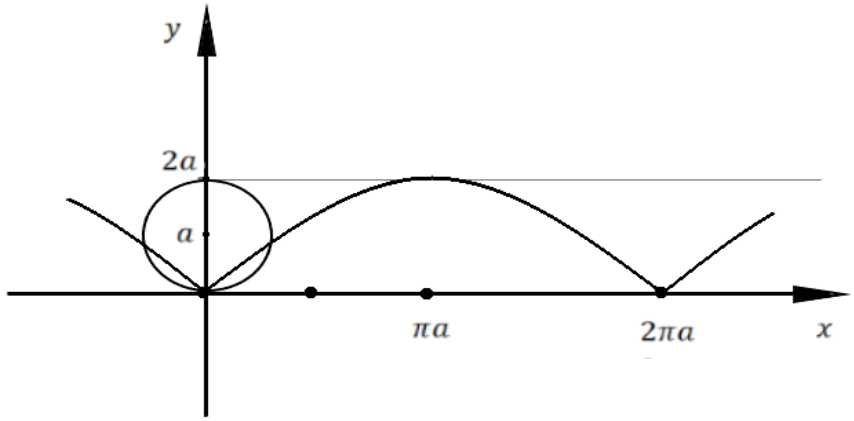
1) Розглянемо коло $x^2 + y^2 = R^2$. Декартові координати, пов'язані з полярними рівняннями: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$ Тоді $\rho^2 = R^2$, або $\rho = R$, отже, $\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi. \end{cases}$ Якщо позначити φ через t, отримаємо: $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases}$ – параметричні рівняння кола.

2) Циклоїда – це крива, яка описує траєкторію точки кола радіуса a, що котиться без ковзання по прямій (осі Ox): $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Побудуємо цю криву. Для цього складемо таблицю декількох значень змінних t і (x, y):

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$	πa	$a\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right)$	$2\pi a$
y	0	a	$2a$	a	0

На підставі даних таблиці виконаємо побудову:



3.1.8. Неявне завдання функцій

Припустимо, що значення двох змінних x і y пов'язані одне з одним рівнянням, яке в загальному випадку має вигляд:

$$F(x, y) = 0. \qquad (3.1.4)$$

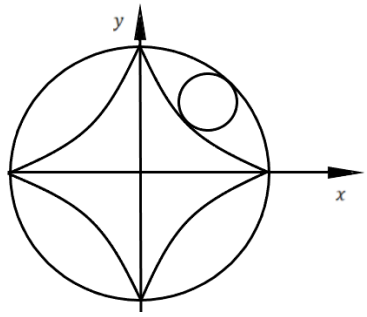
Тут $F(x, y)$ – функція двох змінних, яка задана в деякій області. Якщо для кожного значення x в деякому проміжку існує одне або декілька значень y, які разом з x задовольняють рівняння (3.1.4), то цим визначається однозначна або багатозначна функція $y = f(x)$.

Зазначимо, що не кожне рівняння $F(x, y) = 0$ задає функцію. Наприклад, жодна пара дійсних чисел (x, y) не задовольняє рівняння $x^2 + y^2 = -1$, тобто це рівняння не задає неявну функцію.

Приклад 3.1.5.

1) $x^2 + y^2 = 1$ – неявно задана функція $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, $|x| \leq 1$;

2) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, – астроїда (гіпоциклоїда). Це крива, яка описує траєкторію точки кола, що котиться без ковзання по колу вчетверо більшого радіуса, дотикаючись до нього зсередини.



Її параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t\,, \\ y = a\sin^3 t\,, \end{cases}$$
$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Зазначимо, що не завжди можливо привести неявну функцію до явного виду.

3.2. Поняття границі функції

3.2.1. Означення границі функції в точці

Означення 3.2.1. ***Проколотим околом*** *точки $a \in \mathbb{R}$ називається її окіл, з якого вилучено саму цю точку.*

Якщо $O(a)$ – позначення околу точки a, то проколотий окіл цієї точки будемо позначати символом $O^\circ(a)$.

Приклад 3.2.1. $(-1,2) \setminus \{0\} = (-1,0) \cup (0,2)$ – проколотий окіл точки 0.

Означення 3.2.2. ***Проколотим ε-околом*** *точки x_0 називається ε-окіл точки x_0, з якого видалено точку x_0:*

$$O_\varepsilon^\circ(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon) = \{x: 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Приклад 3.2.2. $(-1,1) \setminus \{0\} = (-1,0) \cup (0,1)$ – проколотий 1-окіл точки 0.

Нехай задано деяку множину $X \subset \mathbb{R}$.

Нехай тепер $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$, x_0 – гранична точка множини X.

Існують два еквівалентні означення границі функції в точці.

Означення 3.2.3 (за Коші, або мовою околів)**.** *Нехай* $f : X \to \mathbb{R}$, x_0 *– гранична точка множини* X. *Число* A *називається границею функції* f *в точці* x_0, *якщо*

$$\forall O(A)\ \exists O(x_0): \forall x \in O^\circ(x_0) \cap X\ \ f(x) \in O(A).$$

Для симетричних околів це означення набуває такого вигляду

Означення 3.2.4. *Нехай* $f : X \to \mathbb{R}$, x_0 *– гранична точка множини* X. *Число* A *називається границею функції* f *в точці* x_0, *якщо*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X\ (0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

Це означення називають ***означенням «мовою*** $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$***».***

Означення 3.2.5 (за Гейне, або «мовою послідовностей»). *Нехай* $f : X \to \mathbb{R}$, x_0 *– гранична точка множини* X. *Число* A *називається границею функції* f *в точці* x_0, *якщо для довільної послідовності* x_n, *що задовольняє вимоги:* $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in X$, $x_n \neq x_0$ *і* $x_n \to x_0,\ n \to \infty$, *виконується співвідношення* $f(x_n) \to A,\ n \to \infty$.

Зауваження 3.2.1. Означення 3.2.3, 3.2.4 і 3.2.5 є еквівалентними.

Вправа 3.2.1. Довести еквівалентність означень 3.2.3, 3.2.4 і 3.2.5.

Зауваження 3.2.2. Зазвичай для доведення того, що $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, використовують означення за Коші, а для доведення того, що $\nexists \lim_{n \to \infty} f(x)$, користуються означенням за Гейне.

Приклад 3.2.3. Довести, що $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = 2$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbb{R}\ \left(0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow\ \left|\frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} - 2\right| < \varepsilon\right).$$

Дійсно, для обраного $\varepsilon > 0$ оцінимо $\left|\frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} - 2\right|$:

$$\left|\frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} - 2\right| = \left|\frac{3x^2 - 4x + 1 - 2x + 2}{x - 1}\right| = \left|\frac{3x^2 - 6x + 3}{x - 1}\right| = 3|x - 1| < 3\delta \leq \varepsilon,$$

тобто достатньо взяти $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Приклад 3.2.4. Довести, що $\nexists \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$.

Розглянемо дві послідовності $x_n' = \frac{1}{\pi n}$ і $x_n'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$. Обидві послідовності прямують до 0, якщо $n \to \infty$, проте $\sin\frac{1}{x_n'} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, і $\sin\frac{1}{x_n''} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, звідки випливає, що $\nexists \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Зауваження 3.2.3. Зазначимо, що границя функції в точці залежить лише від поведінки функції в околі цієї точки та не залежить від значення функції в точці (функція може, навіть, не бути визначеною в цій точці).

3.2.2. Загальні властивості границі функції

Існують глобальні і локальні властивості функції. Глобальні властивості відображають поведінку функції на всій області визначення, а локальні характеризують поведінку функції лише в околі певної точки.

Існування границі функції в точці – це локальна властивість, яка характеризує лише поведінку в околі даної точки, а не в усій області визначення.

Використовуючи означення границі функції в точці мовою послідовностей та властивості границь послідовностей, можна отримати властивості границі функції.

Якщо певна властивість функції виконується в деякому проколотому околі точки x_0, то кажуть, що ця властивість виконується ***фінально*** при $x \to x_0$. Наприклад, функція $f(x)$ називається ***сталою*** на множині X, якщо для всіх $x \in X$ $f(x) = c,\ c$ – фіксоване дійсне число. Функція $f(x)$ називається ***фінально сталою*** при $x \to x_0$, якщо вона є сталою в деякому проколотому околі точки x_0.

Теорема 3.2.1 (Загальні властивості границі функції).

1. *Якщо* $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$, *то функція* $f(x)$ *є фінально обмеженою при* $x \to x_0$.

2. *Якщо існує границя функції* $f(x)$ *в точці* x_0, *то вона єдина.*

Зауваження 3.2.4. Зазначимо, що обернене твердження до твердження 1 теореми 3.2.1 в загальному випадку не є правильним. Наприклад, функція $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ є обмеженою в околі точки $x_0 = 0$, проте вона не має границі в цій точці.

3.2.3. Границя функції і нерівності

Теорема 3.2.2. *Якщо* $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$, x_0 *– гранична точка множини* X, *існують границі:* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, *і* $A < B$, *то знайдеться проколотий окіл точки* x_0, *в якому* $f(x) < g(x)$.

Зокрема, якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $A < B$ $(A > B)$, *то існує проколотий окіл точки* x_0, *в якому* $f(x) < B$ $(f(x) > B)$.

Наслідок 3.2.1 (Лема про збереження знаку). *Якщо функція* $f(x)$ *має в точці* x_0 *ненульову границю:* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$, *то існує проколотий окіл точки* x_0, *в якому функція набуває лише додатних значень, якщо* $A > 0$ *(від'ємних значень, якщо* $A < 0$*).*

Теорема 3.2.3.

1. *Якщо* $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in X$, *і* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, *то* $A \geq B$.
2. *Якщо* $f(x) > g(x)$, $\forall x \in X$, *і* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, *то* $A \geq B$.

Теорема 3.2.4 (Принцип двостороннього обмеження).

Якщо $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ *для всіх* x *із деякого проколотого околу* $O^{\circ}(x_0)$ *точки* x_0 *і* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A$, *то* $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

3.2.4. Границя і арифметичні операції над функціями

Теорема 3.2.5. Нехай $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. *Тоді:*

1) $\lim_{x\to x_0}\big(f(x) \pm g(x)\big) = A \pm B$;

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$;

3) Якщо $B \neq 0$, *то* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

3.2.5. Критерій Коші границі функції

Теорема 3.2.6 (Критерій Коші). *Нехай* $f: X \to \mathbb{R}$, x_0*– гранична точка множини* X. *Для існування границі* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ *необхідно і достатньо виконання умови:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists O^{\circ}(x_0): \forall x', x'' \in O^{\circ}(x_0) \cap X \ \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

3.2.6. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення 3.2.6. Функція $f(x)$ називається ***нескінченно малою*** при $x \to x_0$, якщо $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Означення 3.2.7. Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою*** при $x \to x_0$, якщо $\forall E > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X\ (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x)| > E$. При цьому будемо писати $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Використовуючи означення границі за Гейне і властивості нескінченно малих і нескінченно великих послідовностей, можна отримати такі властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій.

Теорема 3.2.7. Нехай $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$, x_0– гранична точка множини X.

1. *Якщо $f(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$, то вона є фінально обмеженою при $x \to x_0$.*
2. *Якщо $f(x)$ і $g(x)$ є нескінченно малими при $x \to x_0$, то $(f \pm g)(x)$ і $(f \cdot g)(x)$ є нескінченно малими при $x \to x_0$.*
3. *Якщо $f(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$, а $g(x)$ – фінально обмеженою при $x \to x_0$ функцією, то $(f \cdot g)(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$.*
4. *Якщо $f(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$ і $f(x) \neq 0$ в деякому проколотому околі точки x_0, то $\frac{1}{f(x)}$ є нескінченно великою при $x \to x_0$. І навпаки: якщо $F(x)$ є нескінченно великою при $x \to x_0$, то $\frac{1}{F(x)}$ є нескінченно малою при $x \to x_0$.*

Зауваження 3.2.5. Пункт 1 теореми 3.2.7 є безпосереднім наслідком теореми 3.2.1, а пункт 2 – теореми 3.2.5.

Вправа 3.2.2. Обчислити границі:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;
2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;
3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+\sqrt[3]{x^4}}$.

3.2.7. Односторонні границі функції в точці

Означення 3.2.8. *Нехай* $f : X \to \mathbb{R}$, x_0 *є граничною точкою для множини* $X \cap (x_0;\ +\infty)$ $(X \cap (-\infty;\ x_0))$. *Число* A *називається* ***правою (лівою) границею*** *функції* f *в точці* x_0, *якщо*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X\ (x_0 < x < x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X\ (x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Позначення: $f(x_0 \pm 0) = \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = A$.

Загальний термін для правої і лівої границі – ***односторонні границі***.

Вправа 3.2.3. Дати означення односторонніх границь мовою послідовностей.

Приклад 3.2.5.

1) $\lim_{x \to +0} sign\, x = 1$; $\lim_{x \to -0} sign\, x = -1$;

2) $\lim_{x \to 1-0} arctg \frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \to 1+0} arctg \frac{1}{1-x} = -\frac{\pi}{2}$;

3) $\lim_{x \to -0} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1$; $\lim_{x \to +0} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0$.

Теорема 3.2.8. *Нехай* $f : X \to \mathbb{R}$, x_0 *є граничною точкою для множин* $X \cap (x_0;\ +\infty)$ і $X \cap (-\infty;\ x_0)$. *Для того щоб існувала границя* $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ *необхідно та достатньо виконання умови*: $\exists f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$. Це означає, що
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X\ (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Оскільки $0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 < x < x_0 + \delta$ і $x_0 - \delta < x < x_0$, то маємо: $|f(x) - A| < \varepsilon$, як тільки $x_0 < x < x_0 + \delta$ або $x_0 - \delta < x < x_0$. Отже,
$f(x_0 \pm 0) = A$.

Достатність. Нехай $f(x_0 \pm 0) = A$. Це означає, що $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X\ (x_0 < x < x_0 + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
і
$\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X\ (x_0 - \delta_2 < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.
Позначимо $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тоді для $x_0 < x < x_0 + \delta$ і $x_0 - \delta < x < x_0$ (тобто для $0 < |x - x_0| < \delta$) виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. А це означає, що $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$. ■

3.2.8. Границі функції на нескінченності

Нехай задано функцію $f : X \to \mathbb{R}$, де область визначення X не є обмеженою зверху. Число A називається границею функції f при $x \to +\infty$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}\ (x > \Delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

У такому випадку будемо писати $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. Аналогично вводиться границя $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ (тоді X має бути необмеженою знизу):

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \Delta > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}\, (x < -\Delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Нарешті (за умови, що X – необмежена ані зверху, ані знизу), запис $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ означає, що

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \Delta > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}\, (|x| > \Delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

На такі типи границь легко поширити теореми 3.2.1–3.2.8. Околи нескінченності було введено в п. 2.2.1.

Вправа 3.2.3. Обчислити границі:

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x} - x)$;

3) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x} - x)$;

4) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$.

3.2.9. Границі монотонних функцій

Означення 3.2.9. *Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається* ***неспадною (незростаючою)*** *на множині $E \subset X$, якщо $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$.*

Якщо замість нестрогої нерівності можна написати строгу нерівність, функцію називають ***зростаючою (спадною).***

Функції названих типів об'єднуються загальним терміном «**монотонні функції**».

Приклад 3.2.6.

1) $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$ є зростаючою на $[0, +\infty)$ і спадною на $(-\infty; 0]$;

2) $f(x) = sign\, x$ є неспадною на $\mathbb{R}$.

Теорема 3.2.9. *Якщо дійсна функція $f(x)$ визначена в проміжку (a, b) і*

а) монотонно не спадає на ньому, то

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x), \lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x);$$

б) монотонно не зростає на ньому, то

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x), \lim_{x\to b-0} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x).$$

Доведення. Проведемо докладне доведення для випадку а) (випадок б) пропонується розглянути читачеві самостійно). Розглянемо чотири ситуації.

1. Функція f обмежена зверху. Тоді $\exists \sup_{(a,b)} f(x) = K < \infty$. Покажемо, що $\lim_{x\to b-0} f(x) = K$, тобто, що

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x\, (b - \delta < x < b) \Rightarrow |f(x) - K| < \varepsilon.$$

Оскільки $\sup_{(a,b)} f(x) = K < \infty$, то

1) $\forall x \in (a,b) \quad f(x) \le K$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 : a < x_0 < b$ і $f(x_0) > K - \varepsilon$.

Візьмемо $\delta = b - x_0$ і довільне $x :\ a < x_0 < x < b = x_0 + \delta$. Оскільки $f(x)$ не спадає, то $f(x) \ge f(x_0) > K - \varepsilon$. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x\ (x_0 = b - \delta < x < b) \Rightarrow f(x) > K - \varepsilon \Rightarrow 0 \le K - f(x) < \varepsilon$, тобто

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x\ (b - \delta < x < b) \Rightarrow |f(x) - K| < \varepsilon$.

2. Функція f необмежена зверху ($\sup_{(a,b)} f(x) = K = +\infty$). Необхідно довести, що $\lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty$ або

$$\forall E > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x\ (b - \delta < x < b) \Rightarrow f(x) > E.$$

Задамо $E > 0$. Оскільки $f(x)$ необмежена зверху, то для обраного E знайдеться x_0, такий, що $a < x_0 < b$ і $f(x_0) > E$. Розглянемо довільний x із (x_0, b). Оскільки $f(x)$ не спадає, то $f(x) \ge f(x_0) > E$. Оскільки $x_0 < b$, то позначимо $x_0 = b - \delta$. Тоді $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0 : \forall x\ (b - \delta < x < b) \Rightarrow f(x) > E$, звідки

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty.$$

Ситуації

3. $\inf f(x) = K < \infty \Rightarrow \lim_{x \to a+0} f(x) = K$,
4. $\inf f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty$

розглядаються аналогічно до 1 і 2.

■

Наслідок 3.2.2. *Якщо функція $f(x)$ монотонна в (a,b), то в будь-якій точці $x_0 \in (a,b)$ існують скінченні односторонні границі: $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$.*

Доведення. Нехай $f(x)$ не спадає в (a,b) (випадок незростаючої функції розглядається аналогічно). За теоремою 3.2.9 $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \sup_{(a,x_0)} f(x)$. Оскільки $f(x)$ не спадає, то $\forall x \in (a, x_0)\ f(x) \le f(x_0)$, і $\sup_{(a,x_0)} f(x) < \infty$. З іншого боку, за теоремою 3.2.9 $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \inf_{(x_0,b)} f(x)$. Оскільки $f(x)$ не спадає, то $\forall x \in (x_0, b)\ f(x) \ge f(x_0)$, і $\inf_{(x_0,b)} f(x) < \infty$. ■

3.3. Неперервність функції

3.3.1. Поняття неперервності функції в точці

Нехай задано функцію $f : X \to \mathbb{R}$ і $x_0 \in X$. На відміну від означення границі функції $\lim_{x \to x_0} f(x)$, де точка x_0 могла не належати області визначення X, тут вимога $x_0 \in \mathbb{R}$ є необхідною.

Означення 3.3.1. *Будемо говорити, що функція f* ***неперервна*** *в точці $x_0 \in X$, якщо*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in X\, (|x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (3.3.1)$$

Мовою околів (3.3.1) має такий вигляд:

$$\forall O(f(x_0))\, \exists O(x_0): f\,(O(x_0)) \subset O(f(x_0)), \qquad (3.3.2)$$

а мовою послідовностей такий:

$$\forall \{x_n\} \subset X: \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Розглянемо два можливих співвідношення для x_0 і X. Якщо x_0 є граничною точкою для X, то (3.3.1) означає, що $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (або $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$), тобто маємо можливість здійснювати граничний перехід під знаком функції. Якщо точка x_0 є ізольованою для X, то умова (3.3.2) виконується автоматично, тому будь-яка функція є неперервною в ізольованих точках своєї області визначення.

Запис $f \in C(x_0)$ означає, що функція f належить класу неперервних в точці x_0 функцій.

Зауваження 3.3.1. Усі основні елементарні функції неперервні в кожній точці області визначення.

Означення 3.3.2. *Функція $f: X \to \mathbb{R}$ називається неперервною на множині $E \subset \mathbb{R}$, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини (Позначення: $f \in C(E)$).*

3.3.2. Арифметичні дії над неперервними функціями

Теорема 3.3.1. *Нехай $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ – гранична точка множини X і функції f, g є неперервними в точці x_0.Тоді в цій точці будуть неперервними функції $(f \pm g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$(за умови $g(x_0) \neq 0$).*

Доведення. Оскільки $f \in C(x_0)$, $g \in C(x_0)$, x_0 – гранична точка множини X, то $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. За теоремою про границю суми, добутку та частки функцій:

$$\lim_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Це означає, що $(f \pm g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \in C(x_0)$. ■

3.3.3. Поняття односторонньої неперервності

Нехай $f(x)$ визначена на $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ – гранична точка множин $X \cap (x_0;\ +\infty)$ ($X \cap (-\infty;\ x_0)$).

Означення 3.3.3. *Функція f називається* ***неперервною*** *в точці x_0* ***справа (зліва)****, якщо* $f(x_0+0) = f(x_0)$ $(f(x_0-0) = f(x_0))$.

Теорема 3.3.2. *Для того, щоб функція $f(x)$ була неперервною в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною в точці x_0 зліва і справа*.

Теорема 3.3.2 є наслідком теореми 3.2.8.

3.3.4. Точки розриву функції

Означення 3.3.4. Нехай задано функцію $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ – гранична точка множини X. Якщо x_0 не є точкою неперервності функції $f(x)$, то її називають ***точкою розриву*** функції $f(x)$.

Розрізняють такі типи точок розриву.

Точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду*** функції f, якщо існують односторонні границі (див. означення 3.2.8) функції в цій точці, проте або $f(x_0+\ 0) \neq f(x_0-0)$, або $f(x_0+0) = f(x_0-0) \neq f(x_0)$.

Величина $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ називається ***стрибком*** функції $f(x)$ в точці x_0.

Розрив першого роду, для якого $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, тобто стрибок дорівнює нулю, називають ***усувним*** розривом. Ця назва пов'язана з тим, що в цьому випадку можна змінити значення функції $f(x_0)$, поклавши $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, і одержати неперервну в точці x_0 функцію. Якщо $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, то розрив першого роду є ***неусувним***.

Точка розриву функції $f(x)$ називається ***точкою розриву другого роду***, якщо принаймні одна з односторонніх границь (див. означення 3.2.8) не існує. Відзначимо, що розриви другого роду завжди є неусувними.

Вправа 3.3.1. Для заданих функцій вказати точки розриву та визначити їхній характер:

1) $f(x) = sign\, x,\ \ x \in \mathbb{R}$;

2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x < 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

3.3.5. Неперервність складної функції

Теорема 3.3.3. Якщо функція $g: Y \to \mathbb{R}$ неперервна в точці $b \in Y$, а функція $f: X \to Y$ така, що $f(a) = b$, $f \in C(a)$, $a \in X$, то визначена композиція $g \circ f: X \to \mathbb{R}$, яка є неперервною в точці $a \in X$.

Доведення. Оскільки $g \in C(b)$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall y \in Y\ (|y - b| < \delta_1) \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon. \qquad (3.3.3)$$

Оскільки $f \in C(a)$, то для вказаного δ_1 знайдеться $\delta_2 > 0$, таке що $\forall x \in X\ \left(\left|x - a\right| < \delta_2\right) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1$. Враховуючи умову $f(a) = b$, із (3.3.3) маємо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0: \forall x \in X\ (|x - a| < \delta_2) \Rightarrow \left|g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)\right| < \varepsilon,$$

а це і означає, що $g \circ f$ неперервна в точці $x_0 \in X$. ■

Приклад 3.3.1. $\lim_{x\to 0} \cos x^2 = \cos(\lim_{x\to 0} x^2) = \cos 0 = 1$.

3.3.6. Існування і неперервність оберненої функції

Розглянемо функцію $f: X \to Y_f$. Тут $Y_f \subset \mathbb{R}$ – множина значень функції f. Нехай для будь-яких $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ виконується $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тоді функція f задає взаємно однозначну відповідність $X \leftrightarrow Y_f$. Поставимо у відповідність кожному $y \in Y_f$ саме те (єдине) значення $x \in X$, для якого $f(x) = y$, позначимо отриману функцію символом $f^{-1}: Y_f \to X$.

Функція f^{-1} називається ***оберненою*** до функції f. За її означенням:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),\ \ f^{-1}\big(f(x)\big) = x\ \ \forall x \in X,\ \ f\big(f^{-1}(y)\big) = y\ \ \forall y \in Y_f.$$

Приклад 3.3.2. Для функції $y = 3x - 8$ оберненою буде функція $x = \frac{y+8}{3}$.

Лема 3.3.1. *Нехай функція $f: X \to Y_f$ строго монотонна на X. Тоді обернена функція $f^{-1}: Y_f \to X$ також є строго монотонною.*

Доведення. Нехай функція f зростає на X.Тоді $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$. Міркуючи від супротивного, припустимо, що $x = f^{-1}(y)$ не є зростаючою. Тобто $\exists\ y_1, y_2 \in Y_f : y_1 < y_2$ і $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, тобто $x_1 \geq x_2$. За означенням оберненої функції $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Оскільки f зростає на X і $x_1 \geq x_2$, то $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$. Одержали суперечність з тим, що $y_1 < y_2$.

У випадку спадної функції f доведення аналогічне. ■

Зазначимо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

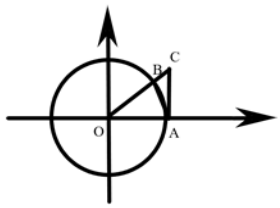
Теорема 3.3.4. *Нехай функція* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *неперервна і зростає (спадає) на* $[a,b]$. *Тоді на відрізку, кінцями якого є* $f(a)$ *і* $f(b)$, *існує обернена функція* $x=f^{-1}(y)$, *яка теж неперервна і зростає (спадає).*

Зауваження 3.3.2. Аналогічна теорема є правильною і для інтервалу (a,b) (скінченного або нескінченного) або напівінтервалу.

3.3.7. Перша визначна границя та її наслідки

Теорема 3.3.5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Доведення. Розглянемо в тригонометричному крузі сектор AOB з кутом



радіанної міри $x: 0<x<\pi/2$ та два трикутники: AOB і AOC з тим самим кутом x. Порівнюючи площі цих фігур, отримаємо

$$S_{\Delta AOB}<S_{\text{сект}AOB}<S_{\Delta AOC},$$

звідки

$$\sin x<x<tg\,x.$$

Оскільки $x\in(0,\pi/2)$, то $\sin x>0$. Розділимо нерівність на $\sin x$:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,\ \ 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Враховуючи парність функцій $\frac{\sin x}{x}$ і $\cos x$, відзначимо, що ці нерівності виконуються і для $0<|x|<\frac{\pi}{2}$. Переходячи в них до границі при $x\to 0$ і враховуючи, що $\cos x\to\cos 0=1$, завдяки неперервності, отримаємо за теоремою 3.2.4, що $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. ■

Наслідок 3.3.1.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1$.
2. $\lim_{x\to 0}\frac{arcsin\,x}{x}=1$.
3. $\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,x}{x}=1$.

Вправа 3.3.2. Довести наслідок 3.3.1.

3.3.8. Друга визначна границя та її наслідки

Число e ми визначили таким чином:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Встановимо тепер більш загальний результат:

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Для цього достатньо довести, що $\lim_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ і $\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Скористаємось означенням границі «мовою послідовностей». Розглянемо довільну послідовність $\{x_k\} \to +0,\ k \to \infty$. Можна вважати, що всі $x_k < 1$. Покладемо $n_k = \left[\frac{1}{x_k}\right]$. Тоді $n_k \le \frac{1}{x_k} < n_k + 1$ і $n_k \to \infty$, $k \to \infty$. При цьому:

$$\frac{1}{n_k+1} < x_k \le \frac{1}{n_k},$$

звідки

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{1/x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Крайні послідовності збігаються до числа e (див. (2.6.1)). Тому, за теоремою 2.2.7, $\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = e$, звідки $\lim_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Для доведення співвідношення $\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ припустимо, що послідовність $\{x_k\}$ містить лише від'ємні значення, які прямують до нуля при $k \to \infty$. Будемо вважати, що $x_k > -1$.

Покладемо $x_k = -y_k$. Тоді $0 < y_k < 1$, $y_k \to +0,\ k \to \infty$. Вочевидь,

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = (1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}} = \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} = \left(\frac{(1-y_k)+y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}-1+1} =$$

$$= \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} \cdot \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right).$$

За доведеним вище остання послідовність прямує до e при $k \to \infty$. Отже, доведено рівність $\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, а з нею і твердження теореми.

■

Вправа 3.3.3. Довести, що $\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$.

Наслідок 3.3.2.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$.
2. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\quad a > 0,\ a \ne 1$.
3. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x} = p$.

3.4. Порівняння функцій. О-символіка

Припустимо, що в деякому проколотому околі $\overset{\circ}{O}(x_0)$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$)визначені дві функції $f(x)$ і $g(x)$.

Означення 3.4.1. *Функція $f(x)$ називається обмеженою в порівнянні з функцією $g(x)$ при $x \to x_0$ (стисло: $f = O(g), x \to x_0$), якщо*

$$\exists C > 0 \; i \; \exists O_1(x_0): \forall x \in \overset{\circ}{O_1}(x_0) \Rightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|,$$

або $f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$, де $\varphi(x)$ – фінально обмежена при $x \to x_0$.

Зокрема, якщо $g(x) \equiv 1$, запис $f(x) = O(1)$, $x \to x_0$ означає, що функція f – фінально обмежена при $x \to x_0$ (тобто обмежена в деякому проколотому околі точки x_0).

Лема 3.4.1. *Якщо* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k < \infty$, *то* $f = O(g)$ *при* $x \to x_0$.

Доведення. Оскільки $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k < \infty$, то функція $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ є фінально обмеженою при $x \to x_0$, тому $f(x) = g(x)\varphi(x)$, звідки випливає, що $f = O(g)$, $x \to x_0$. ■

Приклад 3.4.1. Довести, що:

1) $x^2 = O(x), \quad x \to 0;$
2) $x = O(x^2), \quad x \to \infty.$

Означення 3.4.2. *Функції f і g називаються* ***функціями одного порядку*** *при $x \to x_0$, якщо $f = O(g)$ і $g = O(f)$, $x \to x_0$. При цьому пишуть:*

$$f(x) \asymp g(x), \;\; x \to x_0.$$

Лема 3.4.2. Якщо $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, то $f \asymp g$, $x \to x_0$.

Доведення. Оскільки $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, то за лемою 3.2.2 $f = O(g)$, $x \to x_0$. За властивостями границі функції в точці $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{k}$, звідки випливає, що $g = O(f)$, $x \to x_0$. Отже, $f \asymp g$, $x \to x_0$. ■

Приклад 3.4.2. Довести, що $\frac{2x^4+1}{x^2-1} \asymp x^2$ при $x \to \infty$.

Означення 3.4.3. *Нескінченно мала функція $f(x)$ називається нескінченно малою більш високого порядку при $x \to 0$, ніж нескінченно мала $g(x)$, якщо $lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

Означення 3.4.4. *Аналогічно, нескінченно велика функція $\varphi(x)$ називається нескінченно великою більш високого порядку, ніж нескінченно велика $\psi(x)$ при $x \to x_0$, якщо*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty.$$

Означення 3.4.5. Функція f називається нескінченно малою в порівнянні з функцією g при $x \to x_0$ (пишуть $f = o(g)$, $x \to x_0$), якщо $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$, в деякому проколотому околі $O^{\circ}(x_0)$ точки x_0, причому $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Якщо f, g – нескінченно малі при $x \to x_0$, то запис $f = o(g)$, $x \to x_0$, означає, що f – нескінченно мала більш високого порядку, ніж g.

Приклад 3.4.3. 1) $x^2 = o(x)$, $x \to 0$; 2) $x = o(x^2)$, $x \to +\infty$.

Означення 3.4.6. *Функції f і g – називаються **еквівалентними (асимптотично рівними)** при $x \to x_0$ (пишуть $f \sim g$, $x \to x_0$), якщо $f(x) = \lambda(x)g(x)$, $x \in O^{\circ}(x_0)$, де $lim_{x\to x_0} \lambda(x) = 1$.*

Лема 3.4.3. *Якщо $g(x) \neq 0$ в деякому проколотому околі $O^{\circ}(x_0)$ точки x_0, то $f \sim g$, $x \to x_0$ тоді і тільки тоді, коли $lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Доведення. Необхідність. Якщо $f \sim g$, $x \to x_0$, то $f(x) = \lambda(x)g(x)$, $x \in O^{\circ}(x_0)$, де $\lim_{x\to x_0} \lambda(x) = 1$, тому $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \lambda(x) = 1$.

Достатність. Нехай $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Позначимо $\lambda(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Тоді $\lim_{x\to x_0} \lambda(x) = 1$ і $f(x) = \lambda(x)g(x)$, звідки випливає $f \sim g$, $x \to x_0$. ■

Теорема 3.4.1. *Функції f і g еквівалентні при $x \to x_0$ тоді і тільки тоді, коли $f - g = o(g),\ x \to x_0$.*

Доведення. Необхідність. Якщо $f \sim g,\ x \to x_0$, то $f(x) = \lambda(x)g(x),\ x \in \overset{\circ}{O}(x_0)$, де $\lim_{x\to x_0} \lambda(x) = 1$ і, тому $f(x) - g(x) = g(x)(\lambda(x) - 1)$. Позначимо $\varepsilon(x) = \lambda(x) - 1$ і зауважимо, що $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Отже, $f - g = o(g), x \to x_0$.

Достатність. Нехай $f - g = o(g),\ x \to x_0$, тоді $(f - g)(x) = \varepsilon(x)g(x)$, $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, звідки $f(x) = g(x)(\varepsilon(x) + 1)$. Якщо позначити $\lambda(x) = \varepsilon(x) + 1$, то $\lim_{x\to x_0} \lambda(x) = 1$ і $f \sim g,\ x \to x_0$. ■

Теорема 3.4.2. Нехай $f \sim f_1$, $g \sim g_1$ при $x \to x_0$. Якщо існує границя $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то існує $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і має місце рівність $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Доведення. Оскільки $f \sim f_1$, при $x \to x_0$, то $f(x) = \lambda_1(x)f_1(x)$, де $\lim_{x\to x_0} \lambda_1(x) = 1$. Оскільки $g \sim g_1$, при $x \to x_0$, то $g(x) = \lambda_2(x)g_1(x)$, де $\lim_{x\to x_0} \lambda_2(x) = 1$. Тоді

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\lambda_1 f_1(x)}{\lambda_2 g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$ ■

Вправа 3.4.1. Довести такі властивості $o(g),\ x \to x_0$:

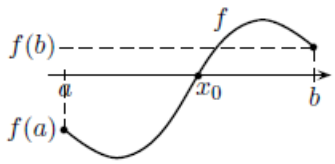
1) $o(Cg) = o(g),\ x \to x_0,\ C \in \mathbb{R}$;
2) $o(g) + o(g) = o(g),\ x \to x_0$;
3) $o(f) \cdot o(g) = o(fg),\ x \to x_0$;
4) $o(o(g)) = o(g),\ x \to x_0$;
5) *Якщо* $f \neq 0$, *то* $\frac{o(g)}{f} = o\left(\frac{g}{f}\right),\ x \to x_0$.

Вправа 3.4.2. Обчислити границі:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 4x}$;
2) $\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x - \sin x}{x^3}$;
3) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{tg\, x^2}$.

3.5. Глобальні властивості неперервних функцій

Теорема 3.5.1 *(Больцано-Коші). Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$ *і на кінцях цього відрізка набуває значень різних знаків. Тоді існує точка* $c \in (a,b)$ *така, що* $f(c) = 0$.

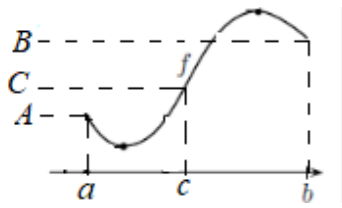


Приклад 3.5.1. $y = \sin x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, $c_1 = 0,\ c_2 = \pi,\ c_3 = 2\pi$.

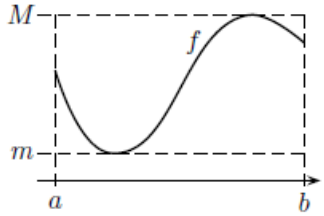
Зауваження 3.5.1. Вимога неперервності є суттєвою.

Приклад. 3.5.2. $y = \begin{cases} -x^2 - 1, & -1 \le x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1. \end{cases}$

Теорема 3.5.2 (Больцано-Коші)**.** *Нехай функція* $f(x)$ *визначена і неперервна на відрізку* $[a,b]$ *і* $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$. *Тоді для будь-якого числа* C, *яке лежить між* A *і* B, *знайдеться* $c \in (a,b)$: $f(c) = C$.



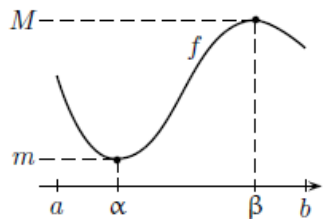
Теорема 3.5.3 (Перша теорема Вейєрштрасса). *Якщо функція* $f(x)$ *визначена і неперервна на відрізку* $[a,b]$, *то вона обмежена на ньому.*



Зауваження 3.5.2. Умова замкненості проміжка є суттєвою.

Приклад 3.5.3. $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$.

Теорема 3.5.4 (Друга теорема Вейєрштрасса). *Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на ньому своїх точної верхньої та нижньої меж.*



3.6. Рівномірна неперервність функцій

Нагадаємо, що означає неперервність функції $f: D \to \mathbb{R}$ на множині D:

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0:\ \ \forall x' \in D: |x - x'| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Підкреслимо, що в цьому означенні δ залежить як від ε, так і від вибору точки $x \in D$. Проте, може так бути, що для фіксованого ε жодне δ не є придатним для всіх $x \in D$ водночас. Наприклад, так буде для функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в інтервалі (0,1). Залежність δ від $x \in D$ можна усунути, вимагаючи в означенні неперервності функції виконання нерівностей одночасно для всіх можливих точок із D. Таким чином, ми одержимо нове поняття.

Означення 3.6.1. *Функція $f: D \to \mathbb{R}$ називається **рівномірно неперервною** на множині D, якщо*

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \ \forall x, x' \in D: |x - x'| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \quad (3.6.1)$$

Зрозуміло, що рівномірно неперервна на D функція буде неперервною на цій множині. Обернене твердження не є правильним. Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x}$ не є рівномірно неперервною в інтервалі (0,1). Легко також навести приклад неперервної обмеженої функції, яка не є рівномірно неперервною: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0,1)$.

Наступна теорема дає умову на область визначення функції, за якої із неперервності функції на цій множині випливає її рівномірна неперервність.

Теорема 3.6.1 (Теорема Кантора). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона є рівномірно неперервною на цьому відрізку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. А.Я.Дороговцев. Математичний аналіз:.Підручник. У 2 ч. Ч. 1. – Київ: Либідь, 1993. – 320 с.
2. М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. Математичний аналіз:.Підручник – Київ: Знання, 2008 – 421с.
3. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз, Київ: Вища школа, 1993. – с.
4. Математичний аналіз у задачах і прикладах: Навч. Посібник. /Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. / У 2 ч. Ч. 1. – Київ: Вища школа, 2002. – 462 с.
5. Збірник задач та вправ з математичного аналізу. Вступ до математичного аналізу / І. М. Александрович, А. В. Анікушин, О. К. Боярчук, та ін. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. – 140 с.
6. М. І. Нагнибіда, П. П. Настасієв Математичний аналіз. Завдання для самостійної роботи. – Київ : Вища школа, 1981. – 222 с.
7. Збірник задач з математичного аналізу функцій однієї змінної / Денисьєвський М. О., Курченко О. О., Нагорний В. Н. та ін. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2005. – 240 с.

ЗМІСТ

Передмова…… 3
Вступ…… 3
Розділ 1. Числові множини…… 4
1.1. Множини. Основні поняття..…… 4
1.1.1. Поняття множини. Приклади множин…… 4
1.1.2. Порівняння множин. Операції з множинами…… 5
1.1.3. Множина дійсних чисел…….. 5
1.2. Верхні та нижні межі…… 8
1.2.1. Поняття обмеженої числової множини…….. 8
1.2.2. Поняття точних меж……..10
1.2.3. Властивості точних меж……..…. 11
1.3. Принципи Архімеда та математичної індукції……13
1.3.1. Принцип Архімеда……..... 13
1.3.2. Принцип математичної індукції……...13
1.3.3. Метод математичної індукції……... 14
Розділ 2. Границя послідовності…….. 17
2.1. Основні поняття…….. 17
2.1.1. Поняття околу точки……17
2.1.2. Початкові відомості про топологію числової прямої…… 18
2.1.3. Поняття числової послідовності та її границі…… 18
2.2. Властивості границі послідовності……22
2.2.1. Загальні властивості границі послідовності……..…. 22
2.2.2. Властивості границь, пов’язані з нерівностями…… 24
2.3. Нескінченно малі та нескінченно великі величини…… 26
2.3.1. Поняття нескінченно малої величини……..…26
2.3.2. Властивості нескінченно малих величин……26
2.3.3. Нескінченно великі величини та їхні властивості…… 28
2.4. Арифметичні дії над числовими послідовностями……..30
2.4.1. Операції над числовими послідовностями…… 30
2.4.2. Властивості границь, пов’язані з арифметичними діями над числовими послідовностями……..… 30
2.5. Границя монотонної послідовності…… 36
2.5.1. Поняття монотонної послідовності…….. 36
2.5.2. Границя монотонної послідовності……...… 37

2.6. Число e……..… 39
2.7. Підпослідовності……..… 41
2.7.1. Поняття підпослідовності……... 41
2.7.2. Часткові границі послідовності. Верхня та нижня границі послідовності……..…… 42
2.8. Необхідна і достатня умова збіжності числової послідовності…….. 45
2.8.1. Поняття необхідної та достатньої умов……... 45
2.8.2. Критерій Коші…… 46
Розділ 3. Границя та неперервність функції…… 48
3.1. Функція. Основні поняття……...… 48
3.1.1. Загальне поняття функції……..…48
3.1.2. Образи і прообрази……48
3.1.3. Композиція функцій……..…49
3.1.4. Елементарні функції та їх класифікація……..……50
3.1.5. Однозначні та ,багатозначні функції…….… 51
3.1.6. Полярна система координат…….…… 51
3.1.7. Параметричне завдання функцій…….…… 53
3.1.8. Неявне завдання функцій…….…… 54
3.2. Поняття границі функції ……55
3.2.1. Означення границі функції в точці……...…...55
3.2.2. Загальні властивості границі функції……..……57
3.2.3. Границя функції та нерівності……..… 58
3.2.4. Границя і арифметичні операції над функціями……..…… 58
3.2.5. Критерій Коші границі функції……58
3.2.6. Нескінченно малі та нескінченно великі функції……...……59
3.2.7. Односторонні границі функції в точці……. 60
3.2.8. Границі функції на нескінченності……..……60
3.2.9. Границі монотонних функцій……...… 61
3.3. Неперервність функції…….… 62
3.3.1. Поняття неперервності функції в точці……...…62
3.3.2. Арифметичні дії над неперервними функціями…….……63
3.3.3. Поняття односторонньої неперервності……..……64
3.3.4. Точки розриву функції……..……64
3.3.5. Неперервність складної функції…….. 65
3.3.6. Існування і неперервність оберненої функції…….……65

3.3.7. Перша визначна границя та її наслідки……...……66
3.3.8. Друга визначна границя та її наслідки…… 66
3.4. Порівняння функцій. О-символіка……...……. 68
3.5. Глобальні властивості неперервних функцій…….…….. 71
3.6. Рівномірна неперервність функції……...…….. 72
Список літератури……..….... 73

Підписано до друку 08.11.2023. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Друк цифровий. Ум. друк. арк. 4,42.
Наклад 20 пр. Зам. № 178.

Видавництво та друкарня ПП «ЛІРА ЛТД»
Вул. Наукова, 5, м. Дніпро, 49107
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6042 від 26.02.2018.
dnipro.lira@gmail.com | +38 (067) 561-57-05 | lira.dp.ua