

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

В.О. Кофанов

ЛЕКЦІЇ З КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

*Ухвалено вченого радою механіко-математичного факультету ДНУ
як методичний посібник*

Дніпро
РВВ ДНУ
2021

ББК 22.172.5я73 Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. С.Б. Вакарчук
УДК 519.22(076)

К 74 Кофанов В.О. ЛЕКЦІЇ З КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ: Метод.
посіб. – Д.: РВВ ДНУ, 2021. – 131 с.

Наведено зміст курсу лекцій з комплексного аналізу, що вже протягом
багатьох років читає автор на механіко-математичному факультеті ДНУ.

Для студентів механіко-математичного факультету університету.

Посібник рекомендовано до друку вченого радою механіко-математичного
факультету від 19.10. 2021 р., протокол №5.

Темплан 2021.

Навчальне видання

Володимир Олександрович Кофанов

Лекції з комплексного аналізу

Методичний посібник

Редактор
Техредактор
Коректор

Підписано до друку 25.01.2021. Формат 60 × 84/16. Папір друкарський.
Друк плоский. Ум. друк. арк. Ум.фарбо-відб. Обл.-вид.арк. Тираж 150 пр.
Зам. N

РВВ ДНУ, вул. Наукова, 13, м.Дніпро, 49050.
Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м.Дніпро, 49050

©Кофанов В.О., 2021

Розділ 1

Комплексна площа

1.1 Комплексні числа

Добре відомо, що існують квадратні рівняння з дійсними коефіцієнтами, які не мають дійсних коренів. Наприклад, таким є рівняння $x^2 + 1 = 0$. Цей факт був одним з головних спонукальних мотивів створення комплексних чисел. З'ясувалося, що в множині комплексних чисел будь-який алгебраїчний многочлен степеня n має рівно n коренів з урахуванням їх кратностей. Разом з тим комплексні числа виявилися корисними і в багатьох інших питаннях математики. Розглянемо, наприклад, функцію $f(x) = (1+x^2)^{-1}$. Її розвинення в ряд Тейлора в околі нуля має вигляд $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ Цей ряд збігається в інтервалі $(-1, 1)$ і не є збіжним за його межами. Причину цього явища неможливо зрозуміти не виходячи за межі дійсних чисел. Адже граничні точки ± 1 цього інтервалу не є особливими для функції $f(x)$ на дійсній осі. І тільки в множині комплексних чисел факт розбіжності даного ряду за межами інтервалу $(-1, 1)$ отримав просте геометричне пояснення.

Означення 1.1.1 Комплексним числом $z = (x, y)$ називається впорядкована пара дійсних чисел. Перше число пари x називається дійсною частиною числа z і позначається $\operatorname{Re} z$. Друге число пари y називають уявною частиною числа z і позначають $\operatorname{Im} z$.

Два числа $z_1 = (x_1, y_1)$ і $z_2 = (x_2, y_2)$ називаються рівними якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$.

На множині \mathbf{C} комплексних чисел вводяться дві операції: додавання і множення наступним чином:

- 1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- 2) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Довільне число виду $(x, 0)$ будемо ототожнювати з числом x . Тоді $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Таким чином, множина комплексних чисел \mathbf{C} є розширенням множини \mathbf{R} дійсних чисел. Число $(0, 0)$ називають нулем в множині комплексних чисел. Числа виду $(0, y)$ називають суттєвими. Серед них найважливішим є число $(0, 1)$, яке називають уявною одиницею і позначають символом i . З означення операції множення одразу випливає рівність $i^2 = -1$. Отже, уявна одиниця є розв'язком рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Легко бачити, що множина комплексних чисел, як і множина дійсних чисел утворює поле. У цьому сенсі операції над комплексними числами мають усі звичні властивості, що притаманні дійсним числам.

Алгебраїчна форма запису комплексних чисел. Враховуючи означення додавання і множення будь-яке комплексне число $z = (x, y)$ може бути подано у наступному вигляді

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi.$$

Така форма $z = x + yi$ запису комплексного числа називається алгебраїчною.

Операції віднімання і ділення. Вказані операції вводяться як обернені до операцій додавання і множення відповідно. Тобто, різницею $z_1 - z_2$ двох чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається таке комплексне число $z = x + iy$, що $z + z_2 = z_1$. Очевидно, що таке число існує і єдине, а саме, $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$. Аналогічно, часткою $\frac{z_1}{z_2}$ чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 \neq 0$, називається таке комплексне число $z = x + iy$, що $z \cdot z_2 = z_1$. За означенням рівності комплексних чисел це рівняння відносно z рівносильне системі двох рівнянь з двома невідомими x і y . Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.1.1)$$

Означення 1.1.2 Спряженім до числа $z = x + iy$ називається число $\bar{z} = x - iy$. Ясно, що $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

З цього означення і рівності (1.1.1) випливає наступний алгоритм.

Алгоритм ділення комплексних чисел. Щоб поділити одне комплексне число на інше треба знаменник і чисельник дробу $\frac{z_1}{z_2}$ домножити на число спряжене до знаменника.

Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Гаусс запропонував довільне комплексне число $z = x + iy$ зображувати точкою площини (x, y) або вектором з початком у точці $(0, 0)$ і кінцем у точці (x, y) . Надалі ми будемо ототожнювати комплексне число $z = x + iy$ і точку площини (x, y) , що її зображує, а саму площину будемо називати комплексною площиною і позначати тим же символом **C**, що і саму множину комплексних чисел.

Означення 1.1.3 Модулем $r = |z|$ комплексного числа $z = x + iy$ називається довжина вектора, що зображує число z . Аргументом $\varphi = \operatorname{Arg} z$ комплексного числа z називається кут, що утворює вектор, який зображує число z з додатним напрямком осі Ox . Очевидно, що

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.1.2)$$

Тригонометрична форма запису комплексних чисел. За допомогою двох останніх рівностей (1.1.2) довільне комплексне число $z = x + iy$ можна подати у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.1.3)$$

Така форма запису комплексного числа називається тригонометричною.

Зауваження 1. Модуль $|z|$ заданого комплексного числа z визначається однозначно, тоді як його аргумент $\operatorname{Arg} z$ – лише з точністю до $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Таким чином, $\operatorname{Arg} z$ є множиною. Часто з цієї множини виділяють яке-небудь значення. Наприклад, головним значенням аргументу $\operatorname{Arg} z$ вважають таке значення $\arg z$, що $-\pi < \arg z \leq \pi$. Тоді $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Зауваження 2. Порівнюючи означення суми (різниці) комплексних чисел з означеннями відповідних операцій для векторів, робимо висновок, що сумі (різниці) комплексних чисел відповідає сума (різниця) векторів, що зображені ці числа. Зокрема, звідси випливає, що величина $|z_1 - z_2|$ дорівнює відстані на площині \mathbf{C} між точками z_1 і z_2 .

Множення (ділення) чисел у тригонометричній формі. Нехай $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тоді

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Таким чином, при перемножуванні комплексних чисел їх модулі перемножуються, а аргументи складаються. Тобто,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Варто мати на увазі, що остання рівність – це рівність двох множин. Проілюструємо це прикладом – "парадоксом".

Приклад. $0 = \operatorname{Arg} 1 = \operatorname{Arg}((-1)(-1)) = \operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg}(-1) = \pi + \pi = 2\pi$.

Як наслідок формули (1.1.4) маємо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (1.1.5)$$

Формула Муавра. Добування кореня. Нехай $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r \in \mathbf{N}$. Іншим наслідком формули (1.1.4) є формула Муавра

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.1.6)$$

Означення 1.1.4 Операція добування кореня з комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z \neq 0$, вводиться як обернена до операції піднесення до степеня, тобто коренем $\sqrt[n]{z}$ називається таке число $w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, що $w^n = z$. Враховуючи формулу (1.1.6), рівняння $w^n = z$ відносно w перепишимо у вигляді $\rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Це рівняння рівносильне системі рівнянь $\rho^n = r$, $n\alpha = \varphi + 2\pi k$ відносно ρ і α . Розв'язавши його, маємо $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, тобто

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.1.7)$$

З цеї формули робимо висновок, що корінь $\sqrt[n]{z}$ з довільного комплексного числа $z \neq 0$ має в комплексній площині \mathbf{C} рівно n значень, які розміщені на колі $|z| = \sqrt[n]{r}$ радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром в точці 0 у вершинах правильного n -кутника, вписаного в це коло.

1.2 Метричні поняття на комплексній площині

На множині комплексних чисел \mathbf{C} вводиться метрика (відстань) формулою $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Згідно з зауваженням 2 до означення 1.1.3 це є звичайна евклідова метрика на площині. Тому всі аксіоми метрики виконуються.

Означення 1.2.1 Околом $B(a, r)$ точки $a \in \mathbf{C}$ радіуса r називається множина $\{z \in \mathbf{C} : |z - a| < r\}$. Зрозуміло, що $B(a, r)$ – це круг (без граничного кола) радіуса r з центром у точці a .

Будемо писати $A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ і говорити, що точка $A \in \mathbf{C}$ є границею послідовності $\{z_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $M \in \mathbf{N}$, що для всіх $n > M$ виконується нерівність $|z_n - A| < \varepsilon$.

Кожне з двох наступних тверджень еквівалентне означенню границі.

1) У будь-якому околі $B(a, \varepsilon)$ знаходяться всі члени послідовності $\{z_n\}$, починаючи з деякого номеру.

2) За межами будь-якому околу $B(a, \varepsilon)$ знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності $\{z_n\}$.

Нехай $A = a + bi$, $z_n = x_n + y_n i$. Очевидно, що $|z_n - A| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$. З цієї рівності одразу випливає таке твердження.

Твердження 1.2.1 Границя рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ має місце якщо і тільки якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

З цього твердження одразу випливають основні властивості границь послідовностей комплексних чисел, такі як границя суми, різниці, добутку, частки, критерій Коші і т. п., відомі для послідовностей дійсних чисел.

Означення 1.2.2 Нехай $M \subset \mathbf{C}$. Точка a називається граничною точкою множини M , якщо у будь-якому околі точки a міститься точка множини M , відмінна від точки a . Множина граничних точок множини M позначається символом M' .

Очевидно, що $B'(a, r) = B[a, r] := \{z : |z - a| \leq r\}$ – **замкнений окіл**.

З означення 1.2.2 одразу випливає, що насправді будь-який окіл точки a містить безліч точок множини M . Тому має місце наступний критерій граничної точки.

Твердження 1.2.2 Точка a є граничною точкою множини M тоді і тільки тоді, коли існує така послідовність z_n попарно різних точок множини M , що $z_n \rightarrow a$.

Приклади. 1. Нехай $M_1 = \{z_n : z_n = \frac{1}{n} + \frac{i}{n}, n \in \mathbf{N}\}$. Ясно, що $z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, причому точки послідовності $\{z_n\}$ попарно різні. Тому $M'_1 = \{0\}$.

2. Нехай $M_2 = \{z_n : z_n = i^n + \frac{i}{n}, n \in \mathbf{N}\}$. Неважко бачити, що при $k \rightarrow \infty$ маємо $z_{4k} \rightarrow 1$, $z_{4k+1} \rightarrow i$, $z_{4k+2} \rightarrow -1$, $z_{4k+3} \rightarrow -i$, причому члени кожної з чотирьох послідовностей попарно різні і послідовність $\{z_n\}$ не має інших частинних границь. Отже, $M'_2 = \{1, -1, i, -i\}$.

Означення 1.2.3 Множина $M \subset \mathbf{C}$ називається замкненою, якщо вона містить всі свої граничні точки, тобто $M' \subset M$.

Окіл $B(a, r)$ та множини M_1 і M_2 з попередніх прикладів не є замкненими. Прикладами замкнених множин є будь-яка скінченна множина, комплексна площа \mathbf{C} , замкнений окіл $B[a, r]$.

Означення 1.2.4 Замиканням множини $M \subset \mathbf{C}$ називається множина $\overline{M} := M \cup M'$.

Очевидно, що $\overline{B(a, r)} = B[a, r]$, $\overline{B[a, r]} = B[a, r]$.

Вправа. Знайти замикання множини $\{\sqrt[n]{1} : n \in \mathbf{N}\}$.

Означення 1.2.5 Точка $a \in G$ називається внутрішньою точкою множини G , якщо вона міститься в множині G разом з деяким околом.

Множина G називається відкритою, якщо всі її точки внутрішні.

Наступні множини є відкритими: 1) $B(a, r)$; 2) $\{z : |\operatorname{Im} z| < 1\}$; 3) \mathbf{C} ; 4) $\{z : r < |z - a| < R\}$.

Не є відкритими, наприклад, такі множини: 1) $B[a, r]$; 2) будь-яка скінченна або зліченна множина; 3) $\{z : r \leq |z - a| < R\}$.

Наведемо без доведення деякі добре відомі властивості відкритих і замкнених множин.

Твердження 1.2.3 Множина $M \subset \mathbf{C}$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли множина $\mathbf{C} \setminus M$ замкнена.

Твердження 1.2.4 Об'єднання будь-якої кількості, а також перетин скінченної кількості відкритих множин є множиною відкритою.

Перетин будь-якої кількості, а також об'єднання скінченої кількості замкнених множин є множиною замкненою.

1.3 Розширення комплексна площа. Сфера Рімана

Важливу властивість дійсних чисел виражає відоме з математичного аналізу твердження Больцано-Вейерштраса.

Твердження 1.3.1 З будь-якої обмеженої послідовності дійсних чисел можна виділити збіжну підпослідовність.

Покажемо, що аналогічна властивість притаманна і комплексним числам.

Означення 1.3.1 Множина $M \subset \mathbf{C}$ називається обмеженою, якщо існує таке $R > 0$, що для всіх $z \in M$ виконується нерівність $|z| \leq R$.

Твердження 1.3.2 З будь-якої обмеженої послідовності комплексних чисел можна виділити збіжну підпослідовність.

Доведення. Нехай послідовність комплексних чисел $z_n = x_n + iy_n$ обмежена. Тоді внаслідок нерівностей $|x_n| \leq |z_n|$ і $|y_n| \leq |z_n|$ послідовності їх дійсних частин x_n і їх уявних частин y_n також обмежені. Тому за твердженням 1.3.1

Больцано-Вейерштраса з послідовності $\{x_n\}$ можна виділити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$. А оскільки послідовність $\{y_{n_k}\}$ є обмеженою, з неї також можна виділити збіжну підпослідовність $\{y_{n_{k_m}}\}$. Тоді послідовність $\{z_{n_{k_m}}\}$ є збіжною.

Ця властивість чисел, що виражена твердженням Больцано-Вейерштраса, покладена в основу наступного означення.

Означення 1.3.2 Множина $M \subset \mathbf{C}$ називається компактною, якщо з будь-якої послідовності точок цієї множини можна виділити підпослідовність, що збігається до точки цієї множини.

З твердження 1.3.2 випливає, що достатньо умовою компактності множини $M \subset \mathbf{C}$ є її обмеженість і замкненість.

З іншого боку з курсу функціонального аналізу відомо, що ці дві умови є необхідними для компактності множини у будь-якому метричному просторі. Таким чином, має місце таке твердження.

Твердження 1.3.3 Множина $M \subset \mathbf{C}$ є компактною тоді і тільки тоді, коли вона замкнена і обмежена.

Приклади. Розглянемо три множини: 1) $B[a, r]$; 2) $\{i^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$; 3) $\{n : n \in \mathbf{N}\}$. З них тільки перша є компактною, а інші дві – ні. Але між множинами 2) і 3) є істотна різниця. З другої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність, тоді як з третьої – ні.

Але комплексну площину можна розширити так, щоб будь-яка послідовність (а не тільки обмежена) мали збіжну підпослідовність.

Означення 1.3.3 Розширеною комплексною площиною $\overline{\mathbf{C}}$ називається множина $\overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Ріман запропонував наступну геометричну інтерпретацію розширеної комплексної площини. Розглянемо сферу S діаметра 1, поставлену на комплексну площину \mathbf{C} так, що вона дотикається до цієї площини у точці $z = 0$. Нехай N – точка на сфері, протилежна до точки 0. Довільній точці $z \in \mathbf{C}$ поставимо у відповідність точку $P \in S$, яка є перетином відрізка $[z, N]$ зі сферою S . Навпаки, точці $P \in S \setminus \{N\}$ відповідає точка z площини \mathbf{C} , яка є перетином продовження відрізка $[N, P]$ з площину \mathbf{C} . Таким чином, встановлено взаємно-однозначну відповідність між множинами \mathbf{C} і $S \setminus \{N\}$. Якщо ми поставимо у відповідність точці $\infty \in \overline{\mathbf{C}}$ точку $N \in S$, ми отримаємо взаємно-однозначну відповідність між розширеною комплексною площиною $\overline{\mathbf{C}}$ і сферою S . Ця сфера називається сферою Рімана. Отже, сфера Рімана є геометричним зображенням розширеної комплексної площини. Іншими словами, розширену комплексну площину $\overline{\mathbf{C}}$ можна уявляти як комплексну площину \mathbf{C} , згорнуту у сферу Рімана, а нескінченно віддалені точки всіх прямих на ній – "склеєними" в одну точку – північний полюс N , який є зображенням точки ∞ .

Точка ∞ на розширеній комплексній площині займає особливе місце, в той час як її зображення на сфері Рімана, точка N , підчим не відрізняється від інших точок сфери S . Зокрема, вона має сферичний окіл. Цьому околу

на розширеній комплексній площині відповідає множина виду $\{z : |z| > R\}$. Цей факт робить природним наступне означення.

Означення 1.3.4 Околом точки ∞ на розширеній комплексній площині називається множина виду $\{z : |z| > R\}$.

Тепер звичайним способом дается означення границі $z_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. А саме, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ тоді і тільки тоді, коли в будь-якому околі точки ∞ знаходяться всі члени послідовності z_n , починаючи з деякого номера. Тобто, для будь-якого $R > 0$ знайдеться таке $M \in \mathbf{N}$, що для довільного $n > M$ виконується нерівність $|z_n| > R$.

Після цього з'ясовується, що послідовність $\{n : n \in \mathbf{N}\}$ з прикладу 3 на розширеній комплексній площині вже має збіжну підпослідовність. Точніше, вона сама є збіжною (до точки ∞). Більше того, на розширеній комплексній площині твердження Больцано-Вейерштрасса можна сформулювати наступним чином.

Твердження 1.3.4 З будь-якої послідовності комплексних чисел на розширеній комплексній площині можна виділити збіжну підпослідовність.

Дійсно, якщо послідовність обмежена, це доведено у твердженні 1.3.2. Якщо ж вона необмежена, з неї можна виділити підпослідовність, збіжну до точки ∞ .

Як наслідок цього твердження критерій компактності на розширеній комплексній площині виглядає відповідним чином.

Твердження 1.3.5 Множина M на розширеній комплексній площині є компактною тоді і тільки тоді, коли вона замкнена.

Зокрема, розширені комплексна площа $\overline{\mathbf{C}}$ є компактно на відміну від комплексної площини \mathbf{C} . Таким чином, розширивши комплексну площину, ми зробили її компактною.

1.4 Криві та області на комплексній площині

Означення 1.4.1 Кривою γ на комплексній площині \mathbf{C} називається неперервний образ відрізка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$, тобто образ відрізка при відображені $z : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$ неперервною функцією $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Таким чином, $\gamma = \{z \in \mathbf{C} : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$.

Вправа. Довести, що крива є компактною множиною.

Зауваження. Іноді під кривою розуміють саме відображення $[\alpha, \beta] \rightarrow \{z \in \mathbf{C} : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$.

Точки кривої можна впорядкувати наступнич чином. Будемо говорити, що точка $z_1 = z(t_1)$ передує точці $z_2 = z(t_2)$, якщо $t_1 < t_2$. Тоді криву можна розглядати як впорядковану підмножину комплексної площини. На кривій також можна ввести зворотній порядок. Криву γ , на якій задано зворотній порядок позначають символом γ^{-1} .

Приклади. Розглянемо неперервні функції: 1) $z = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$; 2) $z = (1 - t)z_1 + tz_2$, $t \in [0, 1]$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$; 3) $z = t + it^2$, $t \in [0, 1]$. Перша функція задає одиничне коло $\{z : |z| = 1\}$, друга – відрізок $[z_1, z_2]$, третя – дугу параболи $y = x^2$ між точками $(0, 0)$ і $(1, 1)$.

Зауваження. Інколи в означенні кривої проміжок $[\alpha, \beta]$ беруть необмеженим одного з видів $[\alpha, +\infty)$, $(-\infty, \beta]$, $(-\infty, +\infty)$. Наприклад, функція $z = it$, $t \in (-\infty, +\infty)$, задає умовну вісь, а функція $z(t) = t + it$, $t \in [0, +\infty)$, – промінь з вершиною у точці $(0, 0)$, що утворює кут $\frac{\pi}{4}$ з додатнім напрямком осі Ox .

Означення 1.4.2 Крива $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, називається кривою Жордана, якщо будь-якій парі t_1, t_2 різних значень параметра за винятком, можливо, пари α, β відповідає пара різних точок $z(t_1), z(t_2)$ кривої. Іншими словами, жорданова крива – це крива без точок самоперетину, за винятком, можливо, початкової і кінцевої точок. Жорданова крива $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, називається замкнutoю, якщо $z(\alpha) = z(\beta)$. Замкнуту жорданову криву можна розглядати, як неперервний образ кола. Замкнута жорданова крива γ вважається орієнтованою проти годинникової стрілки. Якщо вона орієнтована у зворотньому напрямку, будемо позначати її символом γ^- .

Означення 1.4.3 Областю називається відкрита і зв'язна множина. Нагадаємо, що відкритість множини означає, що всі її точки внутрішні, тобто кожна точка входить в множину разом з деяким околом. Зв'язність множини означає, що будь-які дві її точки можна з'єднати кривою, що міститься в даній множині.

Приклади. Наступні множини є областями: 1) $B(a, r)$; 2) $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1\}$; 3) \mathbf{C} ; 4) $\{z : r < |z - a| < R\}$. Не є областями, наприклад, такі множини: 1) $B[a, r]$; 2) $\{z : |z| < 1\} \cup \{z : |z - 2i| < 1\}$.

Важливою в комплексному аналізі є наступна теорема.

Теорема 1.4.1 (Жордан). Будь-яка замкнута жорданова крива γ розбиває розширену комплексну площину на дві області.

Означення 1.4.4 Та з областей, яка не містить точки ∞ , називається внутрішністю кривої γ і позначається $\operatorname{int}\gamma$. Інша область, що містить точку ∞ , називається зовнішністю кривої γ і позначається $\operatorname{ext}\gamma$.

Доведення цієї теореми виходить за межі курсу комплексного аналізу.

Означення 1.4.5 Дві криві γ_1 і γ_2 , що містяться в області G і мають спільний початок і спільний кінець, називаються гомотопними в області G , якщо кожну з цих кривих можна неперервно деформувати в другу криву, не виходячи за межі області G .

Замкнута жорданова крива γ , що міститься в області G , називається гомотопною нулю в цій області, якщо її можна неперервно деформувати в точку, не виходячи за межі області G .

Очевидно, що криві γ_1 і γ_2 , що містяться в області G і мають спільний початок і спільний кінець, гомотопні в області G тоді і тільки тоді, коли крива $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ гомотопна нулю в області G .

Означення 1.4.6 Область G називається однозв'язною, якщо будь-яка замкнута жорданова крива, що міститься в області, є гомотопною нулю. Іншими словами, область G однозв'язна, якщо будь-яку замкнуту жорданову криву, що міститься в області G , можна неперервно деформувати в точку, не виходячи за межі області G .

Приклади. З наступних областей: 1) $B(a, r)$; 2) $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1\}$; 3) \mathbf{C} ; 4) $\{z : r < |z - a| < R\}$ перші три є однозв'язними, четверта – ні. Розглянемо окіл точки ∞ , тобто множину $\{z : |z| > R\}$. Ця область не є однозв'язною на комплексній площині \mathbf{C} , але вона однозв'язна на розширеній комплексній площині $\overline{\mathbf{C}}$,

Означення 1.4.7 Межевою точкою області називається гранична точка цієї області, яка не належить області. Іншими словами, межева точка області – це точка з додаванням області, в будь-якому околі якої містяться точки області.

Межею області називається множина всіх її межевих точок. Межа області G позначається символом ∂G .

Вправа. Довести, що межа області є замкненою множиною.

Означення 1.4.8 Область G називається n -зв'язною, $n \geq 2$, якщо її межа ∂G є об'єднанням n замкнутих жорданових кривих $\Gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$, які задовільняють дві наступні вимоги:

- 1) всі криві γ_i , $i = 1, \dots, n-1$, містяться у внутрішності кривої Γ_0 ;
- 2) кожна з кривих γ_i , $i = 1, \dots, n-1$, міститься у зовнішності будь якої іншої з цих кривих.

Орієнтацію межі ∂G n -зв'язної області G задають таким чином, щоб при проходженні будь-якої межевої кривої області G залишалась зліва, тобто $\partial G = \Gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup \dots \cup \gamma_{n-1}^-$. Іншими словами, крива Γ_0 проходиться проти годинникової стрілки, а криві γ_i , $i = 1, \dots, n-1$, – за годинниковою стрілкою.

Приклади. Двозв'язними областями є кільце $\{z : r < |z - a| < R\}$, зокрема, проколотий окіл $\{z : 0 < |z - a| < R\}$ точки a . Прикладом тризв'язної області є множина $\{z : |z| < 4\} \setminus (\{z : |z| \leq 1\} \cup \{z : |z - 2i| \leq 1\})$.

Розділ 2

Диференційовні функції

2.1 Степеневі ряди

Функція $s(z)$ комплексного змінного z виду

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n, z_0 \in \mathbf{C}, \quad (2.1.1)$$

називається степеневим рядом. З математичного аналізу відомо, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ з дійсними коефіцієнтами c_n і параметром x_0 збігається абсолютно в деякому інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$ і є розбіжним на множині $|x - x_0| > R$, а в кожному проміжку $|x - x_0| \leq r$, $r < R$, збігається рівномірно. Аналогічну властивість мають і комплекснозначні степеневі ряди.

Теорема 2.1.1 (Абелъ). *Кожний степеневий ряд виду (2.1.1) має круг збіжності $|z - z_0| < R$, тобто виконуються наступні твердження:*

- 1) ряд (2.1.1) збігається абсолютно в кругу $|z - z_0| < R$;
- 2) ряд (2.1.1) є розбіжним на множині $|z - z_0| > R$;
- 3) в будь-якому замкненому колі $|z - z_0| \leq r$, $0 < r < R$, ряд (2.1.1) збігається рівномірно.

Достатньо довести теорему для рядів виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \quad (2.1.2)$$

Доведення теореми Абеля базується на наступному твердженні.

Лема 2.1.2 (Абелъ). *Якщо степеневий ряд виду (2.1.2) збігається в точці $z = a$, $a \neq 0$, то він збігається абсолютно в кругу $|z| < |a|$.*

Доведення. Якщо ряд (2.1.2) збігається в точці $z = a$, $a \neq 0$, то його члени обмежені в цій точці, тобто існує таке $M > 0$, що $|c_n a^n| < M$ для всіх

$n \in \mathbf{N}$. Тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{z}{a}\right)^n$ збігається абсолютно, а його члени є мажорантами ряду (2.1.2). Звідси випливає твердження леми Абеля.

Доведення теореми Абеля. Якщо ряд (2.1.2) збігається лише в точці $z = 0$, твердження теореми тривіальне. Нехай цей ряд збігається в точці $z = a$, $a \neq 0$. Через S позначимо множину точок збіжності ряду (2.1.2) і покладемо $D := S \cap [0, +\infty)$, $R = \sup\{x : x \in D\}$. Ясно, що $D = [0, R]$ або $D = [0, R)$, зокрема, $D = [0, \infty)$.

Покажемо, що R і є радіусом круга збіжності. Дійсно, якщо $|z| < R$, то існує точка x_1 , $|z| < x_1 \leq R$, в якій ряд (2.1.2) збігається. Тоді за лемою Абеля він збігається абсолютно і в точці z . Якщо ж $|z| > R$, то існує точка x_2 , $|z| > x_2 > R$. Звідси випливає, що ряд (2.1.2) розбігається в точці z , бо якщо б він збігався в точці z , то за лемою Абеля він би збігався і в точці x_2 , а це суперечило б означенню числа R . Нехай, нарешті, $0 < r < R$. Тоді ряд (2.1.2) збігається абсолютно в точці $z = r$, тобто $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|r^n < \infty$, причому члени останнього ряду є мажорантами для членів ряду (2.1.2) при всіх $|z| \leq r$. Звідси випливає рівномірна збіжність ряду (2.1.2) в кругі $|z| \leq r$.

Зауваження. У теоремі Абеля нічого не стверджується про поведінку ряду (2.1.1) на межі круга збіжності, тобто, на колі $|z - z_0| = R$. І це не випадково. Точки цього кола можуть бути точками збіжності, точками абсолютної збіжності, а також точками розбіжності. Дійсно, розглянемо степеневі ряди $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-1}z^n$ і $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2}z^n$. Неважко бачити, що кругом збіжності для обох степеневих рядів є одиничний круг $|z| < 1$. Перший ряд в точці -1 збігається умовно, а в точці 1 розбігається, другий збігається абсолютно у всіх точках кола $|z| = 1$.

Наступна теорема дає формулу для радіуса круга збіжності степеневого ряду.

Теорема 2.1.3 (Коши). Радіус R круга збіжності степеневого ряду (2.1.2) задоволяє наступну рівність

$$R = L^{-1}, \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (2.1.3)$$

Для дійснозначних степеневих рядів ця теорема доводиться в курсі математичного аналізу. Її доведення для комплекснозначних степеневих рядів дослівно повторює доведення цієї теореми.

2.2 Означення деяких функцій за допомогою степеневих рядів

Розглянемо степеневі ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

З курсу математичного аналізу відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Тому з формулі (2.1.3) випливає, що радіус круга збіжності кожного з цих рядів дорівнює ∞ , тобто кожний з цих рядів збігається у всій комплексній площині. З іншого боку, для дійсних $z = x$ суми цих рядів дають відомі розвинення в ряд Тейлора функцій e^x , $\cos x$, $\sin x$ відповідно. Тому природним є наступне означення.

Означення 2.2.1

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (2.2.1)$$

Таким чином, формулами (2.2.1) функції e^x , $\cos x$, $\sin x$ продовжені з дійсної осі на всю комплексну площину \mathbf{C} . Ейлер з'ясував, що в комплексній площині функції e^z , $\cos z$, $\sin z$ тісно пов'язані між собою.

Теорема 2.2.1 (Ейлер). Для будь-якого $z \in \mathbf{C}$ виконується рівність

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (2.2.2)$$

Доведення. За теоремою Абеля всі ряди (2.2.1) збігаються абсолютно в будь-якій точці $z \in \mathbf{C}$. Відомо, що члени абсолютно збіжного ряду можна групувати і переставляти в будь-якому порядку, не змінюючи його суми. Тому, застосовуючи означення (2.2.1), і враховуючи рівності $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, маємо

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = \\ &= \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

Враховуючи парність функції $\cos z$ і непарність функції $\sin z$ з (2.2.2) отримуємо $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$. З останньої рівності і рівності (2.2.2) випливає такий наслідок.

Наслідок 2.2.2 (Ейлер). Для будь-якого $z \in \mathbf{C}$ виконуються рівності

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (2.2.3)$$

Означення 2.2.2 Формула Ейлера (2.2.2) дає змогу тригонометричну форму запису числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ подати у вигляді $z = re^{i\varphi}$. Така форма запису числа z називається показниковою.

Зауваження. З формулі Ейлера маємо $e^{2\pi i} = 1$. Отже, $e^{z+2\pi i} = e^z$ для довільного $z \in \mathbf{C}$. Таким чином, функція e^z в комплексній площині є періодичною з періодом $2\pi i$.

Пізніше буде доведено теорему (єдиності для аналітичних функцій), з якої випливає, що всі тотожності на дійсній осі, які пов'язують функції e^x , $\cos x$, $\sin x$, залишаються вірними і в комплексній площині \mathbf{C} . Наприклад, для всіх $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ мають місце рівності $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ і т. д.

Разом з тим нерівності для цих функцій, що мають місце на дійсній осі, на комплексній площині, взагалі кажучи, не виконуються. Наприклад, відома для дійсних чисел x нерівність $|\cos x| \leq 1$ в комплексній площині вже не виконується. Дійсно, для суттєво уявних чисел $z = iy$ за формулою Ейлера (2.2.3) маємо $\cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2} \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \pm\infty$.

Вправа. Довести, що функції $\cos z$ і $\sin z$ обмежені на прямій комплексної площини тоді і тільки тоді, коли ця пряма паралельна дійсній осі.

Означення 2.2.3 Логарифмічна функція $\text{Ln}z$ комплексної змінної z вводиться як обернена до експоненти e^z , тобто $\text{Ln}z$ (для $z \neq 0$) – це таке комплексне число w , що задовільняє рівність $e^w = z$.

Нехай $z = r(\cos t + i \sin t)$, де $r = |z|$, $t = \arg z$, а $w = x + iy$. Тоді рівність $\text{Ln}z = w$ еквівалентна рівності $e^{x+iy} = z$. Останню рівність, користуючись формулою Ейлера, запишемо у вигляді $e^x(\cos y + i \sin y) = r(\cos t + i \sin t)$. З цієї рівності комплексних чисел маємо $e^x = r$ (тобто $x = \ln r$) і $y = t + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Підставляючи знайдені x і y в рівність $\text{Ln}z = w = x + iy$, отримаємо

$$\text{Ln}z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (2.2.4)$$

Таким чином, логарифм $\text{Ln}z$ комплексного числа z , $z \neq 0$, має безліч значень, які можуть бути обчислені за формулою (2.2.4). Нескінченнозначність функції $\text{Ln}z$ обумовлена періодичністю функції e^z в комплексній площині.

Означення 2.2.4 Логарифмічна функція $\text{Ln}z$ дає змогу дати означення операції $z_1^{z_2}$ для довільних $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ за допомогою рівності $z_1^{z_2} := e^{z_1 \text{Ln}z_2}$, відомої з елементарної математики для додатніх z_1, z_2 .

Приклад. $i^i = e^{i \text{Ln}i} = e^{i(\ln|i| + i(\pi/2 + 2\pi k))} = e^{-(\pi/2 + 2\pi k)}$, $k \in \mathbf{Z}$.

За допомогою логарифмічної функції можна розв'язувати тригонометричні рівняння.

Приклад. Рівняння $\cos z = 2$ за допомогою формули Ейлера можна подати у вигляді $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$. Зробивши заміну $w = e^{iz}$, отримаємо квадратне рівняння $w + w^{-1} = 4$. Неважко переконатись, що його розв'язками є числа $2 \pm \sqrt{3}$. Повертаючись до змінної z , маємо рівняння $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$. Звідси $iz = \text{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi ki$. Отже, $z = 2\pi k - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.3 Критерій диференційовності функцій комплексної змінної

Зрозуміло, що будь-яку функцію $f(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$ можна записати в алгебраїчній формі $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, де $u(x, y)$ і $v(x, y)$ – дійснозначні функції двох дійсних змінних.

Поняття неперервності функції $f(z)$ в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ вводиться точно так, як і для функцій дійсної змінної. Зазначимо, що з рівності $|f(z) - f(z_0)| = \sqrt{(u(x, y) - u(x_0, y_0))^2 + (v(x, y) - v(x_0, y_0))^2}$ випливає, що функція $f(z)$ неперервна в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ тоді і тільки тоді, коли її дійсна і уявна частини $u(x, y)$ і $v(x, y)$ неперервні в точці (x_0, y_0) .

Поняття похідної та диференційовності функцій комплексної змінної також вводяться дослівним повтором відповідних означень з математичного аналізу. А саме, похідною $f'(z_0)$ функції $f(z)$ в точці z_0 називається наступна границя (якщо вона існує і скінчена):

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (2.3.1)$$

а функцію, що має похідну $f'(z_0)$, називають диференційованою в точці z_0 .

Але на відміну від неперервності диференційовність функції комплексної змінної вже не зводиться до диференційовності її дійсної та уявної частин.

Приклад. Розглянемо функцію $f(z) = \bar{z} = x - iy$. Її дійсна і уявна частини $u(x, y) = x$ і $v(x, y) = -y$, очевидно, є функціями диференційовними у всій площині. Але функція $f(z)$ не є диференційованою в жодній точці. Покажемо, наприклад, що вона не диференційовна в точці $z_0 = 0$, тобто для цієї функції не існує границі (2.3.1) в точці $z_0 = 0$. Дійсно,

$$\lim_{x \rightarrow 0, y=0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

З іншого боку,

$$\lim_{y \rightarrow 0, x=0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

Висновок. Таким чином, функція $f(z) = \bar{z}$ не диференційовна в точці $z_0 = 0$, попри диференційовність її дійсної і уявної частин.

Вправа. Довести, що функція $f(z) = \bar{z}$ не диференційовна в жодній точці.

Виникає питання: яка ще умова (окрім диференційовності дійсної і уявної частин $u(x, y)$ і $v(x, y)$) функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ потрібна для диференційовності функції $f(z)$?

Відповідь на це питання дали Коші, Ріман, Ейлер і Даламбер. Вони отримали незалежно один від одного наступний критерій.

Теорема 2.3.1 (критерій диференційовності). Для того щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була диференційованою в точці $z \in \mathbf{C}$ необхідно і достатньо виконання наступних двох умов:

- 1) функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні в точці (x, y) ;
 2) в точці (x, y) виконуються рівності:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.3.2)$$

При виконанні умов 1) і 2) похідну $f'(z)$ можна обчислити за формулою

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.3.3)$$

Зауваження. Умови (2.3.2) називають умовами Коші-Рімана (або Ейлера-Даламбера).

Для доведення теореми (2.3.1) нагадаємо означення та достатню умову диференційовності дійснозначної функції дійсних змінних.

Означення 2.3.1 Дійснозначна функція $u(x, y)$ дійсних змінних називається диференційованою в точці (x_0, y_0) , якщо при $\rho := \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$ її приріст $\Delta u := u(x, y) - u(x_0, y_0)$ можна представити у вигляді

$$\Delta u = \alpha \Delta x + \beta \Delta y + o(\rho). \quad (2.3.4)$$

З математичного аналізу відомо, що якщо таке представлення можливе, то виконуються рівності $\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\beta = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$, а для диференційовності функції $u(x, y)$ в точці (x_0, y_0) достатньо існування частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}$ в околі точки (x_0, y_0) та їх неперервності в цій точці.

Доведення теореми 2.3.1. Доведемо необхідність. Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ диференційовна в точці $z = x + iy$, тобто існує $f'(z)$. Тоді

$$\gamma := \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z) \rightarrow 0$$

при $\Delta z \rightarrow 0$, а тому $\Delta f := f(z + \Delta z) - f(z)$ допускає подання у вигляді

$$\Delta f = f'(z)\Delta z + \gamma \Delta z. \quad (2.3.4)$$

Нехай $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, $f'(z) = \alpha + \beta i$, $\gamma \Delta z = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$. Тоді рівність (2.3.4) рівносильна системі двох рівностей

$$\begin{cases} \Delta u = \alpha \Delta x - \beta \Delta y + \varepsilon_1, \\ \Delta v = \beta \Delta x + \alpha \Delta y + \varepsilon_2. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Зазначимо, що $\varepsilon_i = o(\rho)$, $i = 1, 2$. Дійсно, при $\rho = |\Delta z| \rightarrow 0$ маємо

$$\left| \frac{\varepsilon_i}{\rho} \right| = \left| \frac{\varepsilon_i}{\Delta z} \right| \leq \frac{|\gamma \Delta z|}{|\Delta z|} = |\gamma| \rightarrow 0.$$

Тому рівності системи (2.3.5) означають, що функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні в точці (x, y) . Більше того, з них випливає, що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\beta, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \beta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha.$$

Тим самим необхідність доведена.

Доведемо достатність. Нехай функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні в точці (x, y) і в цій точці виконуються умови Коші-Рімана. Диференційовність функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ в точці (x, y) означає, що їх приrostи $\Delta u := u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$ і $\Delta v := v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)$ у точці (x, y) допускають наступні подання:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1, \\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_2, \end{cases} \quad (2.3.6)$$

де $\varepsilon_i = o(\rho)$ при $\rho = |\Delta z| \rightarrow 0$, $i = 1, 2$. Нехай $\alpha := \frac{\partial u}{\partial x}$, $\beta := \frac{\partial v}{\partial x}$. Оскільки виконуються умови Коші-Рімана, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \beta. \quad (2.3.7)$$

Тоді з (2.3.6) отримуємо

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v = (\alpha \Delta x - \beta \Delta y) + i(\beta \Delta x + \alpha \Delta y) + \varepsilon,$$

де $\varepsilon := \varepsilon_1 + i \varepsilon_2$. Очевидно, що $\varepsilon = o(\Delta z)$ при $\Delta z \rightarrow 0$. Таким чином,

$$\begin{aligned} \Delta f &= (\alpha + \beta i) \Delta x + (\alpha i - \beta) \Delta y = (\alpha + \beta i) \Delta x + i(\alpha + \beta i) \Delta y + \varepsilon = \\ &= (\alpha + \beta i)(\Delta x + i \Delta y) + \varepsilon = (\alpha + \beta i) \Delta z + \varepsilon. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи (2.3.7) і те, що $\varepsilon = o(\Delta z)$ при $\Delta z \rightarrow 0$, маємо

$$f'(z) = \lim_{\Delta f = z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \alpha + \beta i = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отже, функція f диференційовна в точці z і виконується рівність (2.3.3).

Теорема доведена.

Вправа 1. Довести диференційовність функцій e^z , $\cos z$, $\sin z$ в довільній точці комплексної площини і знайти їх похідні.

Вправа 2. Довести, що функція $f(z) = \sqrt{xy}$ не диференційовна в точці $z = 0$ попри те, що умови Коші-Рімана в цій точці виконуються.

Вправа 3. Довести, що умови Коші-Рімана в полярній системі координат мають наступний вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Вправа 4. а) Довести, що однозначна гілка логарифма $\text{Ln}z$, яка визначена в області $\mathbf{C}_\alpha := \mathbf{C} \setminus \{z : \arg z = \alpha\}$ формулою $\ln z = \ln |z| + i \arg_\alpha z$, де $\alpha < \arg_\alpha z < \alpha + 2\pi$, є аналітичною у вказаній області.

б) Довести, що однозначна гілка кореня $\sqrt[n]{z}$, яка визначена в області \mathbf{C}_α формулою $(\sqrt[n]{z})_\alpha := \sqrt[n]{|z|} \exp i \frac{\arg_\alpha z}{n}$, є аналітичною у вказаній області.

2.4 Поняття про аналітичну функцію

Означення 2.4.1 Функція $f(z)$, визначена в області G , називається аналітичною в цій області, якщо вона диференційовна в області G , тобто диференційовна в кожній точці даної області G .

Функція $f(z)$ називається аналітичною в точці, якщо вона диференційовна в деякому околі цієї точки.

Зауваження. Таким чином, аналітичність функції завжди означає її диференційовність в деякій області, навіть коли йдеться мова про аналітичність у точці.

Приклади. 1) Функції e^z , $\cos z$, $\sin z$ аналітичні у всій комплексній площині; 2) функція $f(z) = x^2 + y^2$ диференційовна у точках прямої $y = x$, але не є аналітичною в жодній точці.

Зауваження. Означення диференційовності функції комплексної змінної нічим не відрізняється від означення диференційовності функції дійсної змінної. Тому і правила диференціювання, що випливають з цього означення, такі як правила диференціювання суми, різниці, добутку, частки, суперпозиції функцій, відомі з математичного аналізу, залишаються в силі і для аналітичних функцій.

Широкий клас прикладів аналітичних функцій дає теорема про диференційовність суми степеневого ряду.

Теорема 2.4.1 Сума $s(z)$ степеневого ряду

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (2.4.1)$$

є функцією диференційованою в крузі $|z - z_0| < R$ збіжності цього ряду. Більше того, ряд (2.4.1) можна диференціювати почленно, тобто

$$s'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1},$$

а круг збіжності продиференційованого ряду такий же, як і ряду (2.4.1).

Доведення цієї теореми є дослівним повторенням доведення відомого з математичного аналізу аналогу цієї теореми для дійснозначних степеневих рядів. Крім того, у розділі 4 буде доведено узагальнення цієї теореми (див. теорему 4.1.2).

Наслідок 2.4.2 Сума степеневого ряду є функцією аналітичною в крузі збіжності цього ряду.

Наслідок 2.4.3 Сума степеневого ряду є нескінченно диференційованою функцією в крузі збіжності цього ряду.

У наступному розділі буде доведена теорема Тейлора про те, що довільна аналітична в точці функція допускає представлення в деякому околі цієї точки сумаю степеневого ряду. З цієї теореми і наслідку (2.4.3) випливає ще одна важлива властивість аналітичних функцій.

Наслідок 2.4.4 *Функція, аналітична в деякій області, є нескінченно диференційованою в цій області.*

Наступний приклад показує, що навіть нескінченно диференційованість дійснозначної функції в деякому інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$ дійсної осі ще не є достатньою для продовження цієї функції до аналітичної в точці $z = 0$.

Приклад. З математичного аналізу відомо, що функція $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x > 0$ і $f(x) = 0$ при $x \leq 0$ є нескінченно диференційованою на дійсній осі, причому $f^{(k)}(0) = 0$ для всіх $k \in \mathbf{N}$. Покажемо, що не існує аналітичної в точці $z = 0$ функції $F(z)$, такої що $F(x) = f(x)$ в деякому інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$ дійсної осі. Дійсно, якби така функція існувала, за теоремою Тейлора вона допускала б у деякому околі нуля $|z| < \delta$ подання $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Можна вважати, що $\delta < \varepsilon$ і тому $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ для $x \in (-\delta, \delta)$. Але, як відомо, $n!c_n = f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Таким чином, $f(x) = 0$ для $x \in (-\delta, \delta)$, що суперечить означенню f .

2.5 Гармонічні функції, їх взаємозв'язок з функціями аналітичними

Означення 2.5.1 Дійснозначна функція $u(x, y)$ двох дійсних змінних, визначена в області $G \subset \mathbf{C}$, називається гармонічною в цій області, якщо вона має неперервні частинні похідні до другого порядку включно в області G і в кожній точці (x, y) даної області G виконується умова Лапласа:

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Оператор Δu називається оператором Лапласа, або лапласіаном функції $u(x, y)$.

Дві гармонічні в області G функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ називаються спряженими гармонічними в цій області, якщо всюди в цій області вони пов'язані умовами Коші-Рімана (2.3.2).

Теорема 2.5.1 (теорема про взаємозв'язок). Для аналітичності функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в області G необхідно і достатньо щоб ії дійсна і уявна частини $u(x, y)$ і $v(x, y)$ були спряженими гармонічними функціями в цій області.

Доведення. Достатність одразу випливає з критерія диференційовності (2.3.1). Дійсно, якщо функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ є спряженими гармонічними, то вони, як гармонічні, мають неперервні частинні похідні, і тому диференційовні. Крім того, вони пов'язані умовами Коші–Рімана, як спряжені гармонічні. Таким чином, виконуються умови критерія диференційовності функції $f(z)$.

Доведемо необхідність. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналітична в області G , її похідну в довільній точці z області G можна знайти за формулою (2.3.3) критерія диференційовності

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.5.1)$$

де в другій рівності враховані також умови Коші–Рімана.

Оскільки аналітична функція нескінченно диференційовна, її похідна також є функцією аналітичною. А тому її дійсна та уявна частини пов'язані умовами Коші–Рімана. Використовуючи перше, а потім друге представлення для похідної $f'(z)$ в формулі (2.5.1), отримаємо ці умови Коші–Рімана в двох наступних формах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.5.2)$$

i

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \quad (2.5.3)$$

Якщо для $f''(z)$ виписати всі представлення (їх буде чотири), аналогічні формулам (2.5.1), то всі частинні похідні з формул (2.5.2) і (2.5.3) будуть фігурантами цих представлень. Тому всі ці частинні похідні і також частинні похідні з формули (2.5.1) є неперервними. Тоді за теоремою Юнга змішані частинні похідні функції u в формулах (2.5.2) і (2.5.3) рівні між собою і теж саме стосується змішаних частинних похідних функції v . З цього зауваження і формул (2.5.2) і (2.5.3) випливають наступні рівності:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

які означають, що функції u і v задовольняють умови Лапласа $\Delta^2 u \equiv 0$ і $\Delta^2 v \equiv 0$. Отже, ці функції є гармонічними. А оскільки функції u і v є дійсною і уявною частиною аналітичної функції f , вони за критерієм диференційовності пов'язані умовами Коші–Рімана. Таким чином, функції u і v є спряженими гармонічними.

Теорема доведена.

Приклад. Покажемо, що функції $u(x, y) = e^y \cos x$ і $v(x, y) = -e^y \sin x$ є спряженими гармонічними. Звичайно, це можна перевірити за означенням. Але набагато простіше скористатися теоремою про взаємозв'язок. Для цього досить довести, що функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є аналітичною. Маємо

$$f(z) = e^y \cos x - ie^y \sin x = e^y(\cos x - i \sin x) = e^y e^{-ix} = e^{y-ix} = e^{-i(x+iy)} = e^{-iz}.$$

Очевидно, функція $f(z) = e^{-iz}$ є аналітичною, а тому за теоремою про взаємоз'язок функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ гармонічно спряжені.

Вправа. Довести, що якщо функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ є гармонічно спряженими, то і функції $-v(x, y)$ і $u(x, y)$ також гармонічно спряжені.

2.6 Задача відновлення аналітичної функції

Наступна задача відіграє важливу роль в багатьох питаннях математики та її застосувань.

Задача відновлення. В однозв'язній області G задана гармонічна функція. Знайти аналітичну в цій області функцію, яка має задану гармонічну функцію своєю дійсною (або уявною) частиною.

Згідно з теоремою 2.5.1 про взаємоз'язок розв'язання цієї задачі відновлення аналітичної функції за її дійсною (або уявною) частиною зводиться до знаходження в області G функції, гармонічно спряженої до заданої гармонічної функції.

Зауваження. За тією ж теоремою про взаємоз'язок необхідною умовою існування розв'язку даної задачі є гармонічність заданої функції.

Покажемо, що в однозв'язній області ця умова і достатня для існування розв'язку задачі відновлення. Для доведення цього факту нам потрібні наступні означення і теорема з курсу математичного аналізу.

Означення 2.6.1 Диференціальна форма $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ називається повним диференціалом функції $s(x, y)$ в області G , якщо ця функція $s(x, y)$ диференційовна в області G і всюди в цій області виконуються рівності

$$\frac{\partial s}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial s}{\partial y} = Q(x, y).$$

Теорема 2.6.1 Для того щоб диференціальна форма $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ була повним диференціалом функції $s(x, y)$ в однозв'язній області G необхідно і достатньо виконання наступної умови в цій області

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.6.1)$$

При виконанні цієї умови функція $s(x, y)$ допускає представлення у вигляді

$$s(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C,$$

а криволінійний інтеграл у цьому представленні не залежить від кривої, що з'єднує точки (x_0, y_0) та (x, y) і лежить в області G .

З теореми 2.6.1 вже неважко вивести розв'язність задачі відновлення. Вона є наслідком наступної теореми.

Теорема 2.6.2 Для будь-якої гармонічної в однозв'язній області G функції $u(x, y)$ існує спряжена гармонічна функція $v(x, y)$, що допускає представлення у вигляді

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C, \quad (2.6.2)$$

а криволінійний інтеграл у цьому представленні не залежить від кривої, що з'єднує точки (x_0, y_0) та (x, y) і лежить в області G .

Доведення. Спочатку переконаємося, що диференціальна форма під знаком інтегралу в формулі (2.6.2) є повним диференціалом. Для цього згідно з теоремою 2.6.1 досить, щоб ця форма задовільняла умову 2.6.1 цієї теореми, тобто

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Ця умова ($\Delta u \equiv 0$) виконується в області G оскільки задана функція u є гармонічною в цій області. Тому за теоремою 2.6.1 функція v є повним диференціалом диференціальної форми з формули (2.6.2) і за означенням повного диференціалу виконуються рівності

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

тобто функції u і v пов'язані умовами Коші-Рімана. Крім того, ці функції диференційовні, так як функція u гармонічна, а функція v є повним диференціалом. Отже, для функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ виконуються умови критерія диференційовності 2.3.1 і вона є диференційованою. Тоді за теоремою про взаємозв'язок 2.5.1 функції u і v спряжені гармонічні.

Теорема доведена.

Зауваження. При розв'язанні задачі відновлення і знаходження спряженої гармонічної функції можна також скористатися умовами Коші-Рімана.

Приклад. Знайти аналітичну функцію $f = u(x, y) + iv(x, y)$ із заданою уявною частиною $\operatorname{Im} f(z) = y + e^x \cos y$.

Спочатку переконаємося в існуванні такої функції. Необхідною (і достатньою) умовою для цього є гармонічність функції $v(x, y) = y + e^x \cos y$. Перевіримо цю умову. Маємо

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 - e^x \sin y, \quad \frac{\partial v^2}{\partial x^2} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v^2}{\partial y^2} = -e^x \cos y. \quad (2.6.3)$$

Отже, всі частинні похідні функції $v(x, y)$ до другого порядку включно, як ті що фігурують в формулах (2.6.3), так і дві змішані, що відсутні в них, очевидно, є неперервними і виконується умова Лапласа $\Delta v \equiv 0$. Таким чином, функція $v(x, y)$ є гармонічною і тому задача відновлення розв'язана.

Для знаходження її розв'язку обчислимо функцію, спряжену до функції $v(x, y)$. Для цього скористатася умовами Коші-Рімана і результатами обчислень (2.6.3). Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 - e^x \sin y .$$

Звідси, інтегруючи за змінною x , отримаємо

$$u(x, y) = x - e^x \sin y + C(y) .$$

Для знаходження функції $C(y)$ підставимо знайдену функцію $u(x, y)$ і відому функцію $v(x, y)$ в другу умову Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Матимемо

$$-e^x \cos y + C'(y) = -e^x \cos y .$$

Таким чином, $C(y) = C$, $u(x, y) = x - e^x \sin y + C$ і

$$f(z) = x - e^x \sin y + C + i(y + e^x \cos y) = z + ie^{iz} + C, \quad C \in \mathbf{R}.$$

2.7 Геометричний зміст аргумента і модуля похідної

Геометричні властивості функції $w = f(z)$ комплексної змінної вивчаються наступним чином. На комплексній площині аргументів z задають криву γ і знаходять її образ γ' при відображені функцією $w = f(z)$ на площині значень w . Кожна функція має характерне сімейство кривих і їх образів. Такі пари сімейств і є геометричною характеристикою відображень функціями комплексної змінної. В таких питаннях важливо знати геометричний сенс величин $\operatorname{Arg} f'(z)$ і $|f'(z)|$.

Нехай функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0 , причому $f'(z_0) \neq 0$ (\star).

Розглянемо криву γ , що задається рівнянням $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, і проходить через точку $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, причому $z'(t_0) \neq 0$. Геометрично остання умова означає, що крива γ в точці $z = z(t_0)$ має дотичну. Через θ позначимо кут, що утворює дотична до кривої γ в точці z_0 з додатним напрямком осі абсцисс. Тоді $\theta = \operatorname{Arg} z'(t_0)$.

Нехай γ' – образ кривої γ при відображені функцією $w = f(z)$. Її рівняння має вигляд $w = f(z(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$. За правилом диференціювання суперпозиції функцій $w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)$ і за умови (\star) крива γ' в точці $w_0 = f(z_0)$ також має дотичну. Через θ' позначимо кут, що утворює дотична до кривої γ' в точці w_0 з додатним напрямком осі абсцисс. Тоді

$$\theta' = \operatorname{Arg} w'(t_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg} z'(t_0) = \theta + \operatorname{Arg} f'(z_0) . \quad (2.7.1)$$

Означення 2.7.1 Кут $\theta' - \theta$ називається кутом повороту кривої γ в точці z_0 при відображені функцією $w = f(z)$.

Іншими словами, кутом повороту кривої γ в точці z_0 при відображення функцією $f(z)$ називається кут, на який повертається дотична до кривої γ в точці z_0 , при відображені цією функцією.

З цього означення і формули (2.7.1) випливає наступне твердження, що виражає геометричний сенс аргументу похідної.

Твердження 2.7.1 Для відображення, що задовольняє умову (\star) , аргумент похідної $f'(z_0)$ дорівнює кутовій повороту кривої γ в точці z_0 при відображені функцією $f(z)$, тобто $\operatorname{Arg} f'(z_0) = \theta' - \theta$.

З цього твердження одразу випливають такі наслідки.

Наслідок 1. Для відображення, що задовольняє умову (\star) , кут повороту кривої γ в точці z_0 не залежить від вибору кривої, що проходить через цю точку.

Іншими словами, всі криві, що проходять через точку z_0 , відображенням, що задовольняє умову (\star) , повертаються на один і той же кут.

Наслідок 2. Відображення функцією $f(z)$, що задовольняє умову (\star) , зберігає кути між кривими, тобто кут між кривими γ_1 і γ_2 , що проходять через точку z_0 дорівнює кутовій між їх образами $f(\gamma_1)$ і $f(\gamma_2)$.

Тепер з'ясуємо геометричний сенс модуля похідної.

Означення 2.7.2 Коефіцієнтом k_γ лінійного розтягу відображення функцією $w = f(z)$ в точці z_0 уздовж кривої γ називається величина

$$k_\gamma := \lim_{\Delta z \rightarrow 0, z_0 + \Delta z \in \gamma} \frac{|\Delta f|}{|\Delta z|}.$$

Зрозуміло, що для відображення функцією, що задовольняє умову (\star) , виконується рівність

$$|f'(z_0)| = k_\gamma = k. \quad (2.7.2)$$

З рівності (2.7.2) випливає наступне твердження.

Твердження 2.7.2 Для відображення функцією, що задовольняє умову (\star) , модуль похідної $|f'(z_0)|$ в точці z_0 дорівнює коефіцієнтові k лінійного розтягу відображення функцією $w = f(z)$ в точці z_0 і цей коефіцієнт не залежить від вибору кривої, що проходить через точку z_0 .

У цьому разі говорять, що відображення функцією $w = f(z)$ має сталий коефіцієнт лінійного розтягу в точці z_0 у будь-якому напрямку.

Приклад 1. Розглянемо відображення лінійною функцією $f(z) = az + b$. Так як $f'(z) = a$ для довільного z , то згідно з геометричним змістом аргумента і модуля похідної, відображення $w = az$ здійснює два перетворення: 1) поворот будь-якого вектора на кут $\arg a$ і 2) розтяг будь-якого вектора в $|a|$ разів. А оскільки операція додавання комплексних чисел здійснюється за правилом додавання векторів, що їх зображують, то лінійна функція $f(z) = az + b$, крім цих двох перетворень ще здійснює паралельний зсув на вектор b .

Таким чином, лінійна функція здійснює перетворення подібності.

Приклад 2. Чи існує лінійна функція $f(z) = az + b$, яка відображає трикутник з вершинами в точках $0, 2, i$ на трикутник з вершинами в точках $i, -3i, 2 + i$? Якщо існує, знайти її.

Розв'язання. Очевидно, що вказані трикутники подібні. Тому згідно з попереднім прикладом така лінійна функція існує. Ясно, що шукана функція повинна здійснити наступні перетворення: 1) поворот на кут $-\pi/4$, 2) розтяг в 2 рази, 3) паралельний зсув на вектор i . Для цього згідно з попереднім прикладом потрібно щоб $\arg a = -\pi/4$, $|a| = 2$, $b = i$. Отже, $a = 2(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)) = \sqrt{2}(1 - i)$ і $f(z) = \sqrt{2}(1 - i)z + i$.

Поняття про конформне відображення.

Означення 2.7.3 Відображення функцією $w = f(z)$ називається конформним в точці z_0 , якщо воно зберігає кути між кривими, що проходять через цю точку і має сталий коефіцієнт лінійного розтягу в цій точці у будь-якому напрямку.

З цього означення, наслідку 2 твердження 2.7.1 і твердження 2.7.2 випливає достатня умова конформності в точці.

Твердження 2.7.3 Відображення функцією, що задоволяє умову (\star) , є конформним в точці z_0 .

З'ясуємо геометричний сенс конформного відображення, що задовольняє умову (\star) . Для цього зауважимо, що таке відображення в малому околі точки z_0 допускає наступне представлення

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z), \quad (2.7.3)$$

Згідно з прикладом 1 відображення лінійною функцією $f(z_0) + f'(z_0)\Delta z$ є перетворенням подібності. Таким чином, з (2.7.3) випливає, що в малому околі точки z_0 перетворення функцією $f(z)$ з точністю до нескінченно малих більш високого порядку ніж Δz є перетворенням подібності.

Означення 2.7.4 Відображення $w = f(z)$ називається однолистим в області G , якщо будь-яку пару z_1, z_2 різних точок області G воно переводить у пару різних образів.

Іншими словами, однолисте відображення $w = f(z)$ – це біекція множини G на $f(G)$. Отже, для однолистого відображення існує обернене відображення $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$.

Означення 2.7.5 Відображення $w = f(z)$ називається конформним в області G , якщо воно однолисте в цій області і конформне в кожній її точці.

Зауваження. Відображення може бути конформним в кожній точці області, але не конформним в області. Прикладом такого відображення є відображення функцією $f(z) = z^2$ в області $\{z : 0 < |z| < 1\}$. За твердженням 2.7.3 воно конформне в цій області, але, очевидно, не є однолистим.

Розділ 3

Теорія інтегралу Коші

3.1 Криволінійний інтеграл

Нехай γ — спрямлювана крива, тобто така крива, для якої множина довжин усіх вписаних в неї ламаних обмежена. При цьому точна верхня межа цієї множини називається дужиною кривої γ .

Нехай на кривій задана функція $f(z)$.

Розглянемо розтин кривої γ на дуги $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ точками $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$, де z_0 — початок, а z_n — кінець кривої γ . Через l_k , $k = 1, 2, \dots, n$, позначимо довжину дуги γ_k і покладемо $L_n := \max_{1 \leq k \leq n} l_k$. На кожній дузі γ_k оберемо точку ξ_k і утворимо інтегральну суму $S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$.

Якщо існує скінчена границя $\lim_{L_n \rightarrow 0} S_n$, причому вона не залежить від вибору точок $\xi_k \in \gamma_k$, то ця границя називається інтегралом $\int_{\gamma} f(z) dz$ від функції $f(z)$ уздовж кривої γ , тобто

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \lim_{L_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}), \quad (3.1.1)$$

а сама функція $f(z)$ називається інтегровною уздовж кривої γ .

Теорема 3.1.1 Якщо функція $f(z)$ неперервна на спрямлюваній кривій γ , то вона інтегровна уздовж цієї кривої. Більше того,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{\gamma} [v(x, y) dx + u(x, y) dy]. \quad (3.1.2)$$

Доведення. Виділимо в інтегральній сумі S_n дійсну і уявну частини. Нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $\Delta z_k := z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $\xi_k = \alpha_k + i\beta_k$.

Тоді

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n [u(\alpha_k, \beta_k) + iv(\alpha_k, \beta_k)] (\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n [u(\alpha_k, \beta_k)\Delta x_k - v(\alpha_k, \beta_k)\Delta y_k] + i \sum_{k=1}^n [v(\alpha_k, \beta_k)\Delta x_k + u(\alpha_k, \beta_k)\Delta y_k]. \end{aligned}$$

Отже, дійсна $\operatorname{Re} S_n$ і уявна $\operatorname{Im} S_n$ частини суми S_n є інтегральними сумами для наступних двох інтегралів

$$\int_{\gamma} [u(x, y)dx - v(x, y)dy], \quad \int_{\gamma} [v(x, y)dx + u(x, y)dy]$$

відповідно. Ці інтеграли, як відомо з курсу математичного аналізу, за умов даної теореми існують, тому що функції $v(x, y)$ і $u(x, y)$ неперервні, як дійсна і уявна частини неперервної функції $f(z)$. Таким чином, переходячи до границі в рівності для інтегральної суми S_n , отримуємо рівність (3.1.2).

Теорема доведена.

Зауваження. З формули (3.1.2) випливає, що всі властивості криволінійних інтегралів з правої частини цієї формули, відомі з курсу математичного аналізу, мають місце і для криволінійних інтегралів $\int_{\gamma} f(z)dz$.

Аналогічно (3.1.1) вводиться інтеграл $\int_{\gamma} f(z)|dz|$, як границя інтегральних сум $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)|z_k - z_{k-1}|$ (якщо вона існує, скінчена, і не залежить від вибору точок ξ_k). Якщо функція $f(z)$ дійснозначна, цей інтеграл збігається з відомим із курсу математичного аналізу криволінійним інтегралом першого роду. Зокрема, має місце рівність

$$\int_{\gamma} |dz| = l(\gamma), \tag{3.1.3}$$

де $l(\gamma)$ = довжина кривої γ . Зазначимо, що

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)||dz|.$$

Ця нерівність одразу випливає з нерівності

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)||z_k - z_{k-1}|$$

для відповідних інтегральних сум за допомогою граничного переходу.

Теорема 3.1.2 (формула для обчислення криволінійного інтегралу). Якщо функція $f(z)$ неперервна на кусково-гладкій кривій γ , що задана рівнянням $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (3.1.4)$$

Доведення. Нехай $z(t) = x(t) + y(t)$. Застосовуючи рівність (3.1.2) і обчислюючи інтеграли в правій частині цієї рівності за допомогою відомих з курсу математичного аналізу формул, матимемо

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{\gamma} [v(x, y) dx + u(x, y) dy] = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t)) x'(t) dt - v(x(t), y(t)) y'(t) dt] + \\ &\quad + i \int_{\alpha}^{\beta} [v(x(t), y(t)) x'(t) dt + u(x(t), y(t)) y'(t) dt] = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Приклад 1. Обчислити $\int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz$, $n \in \mathbf{Z}$. Параметричне рівняння кола $|z-a| = r$ має вид $z(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Тоді за формулою (3.1.4) маємо

$$\begin{aligned} \int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = ir^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}|_0^{2\pi}}{n+1} = 0, \quad n \neq -1; \\ \int_{|z-a|=r} (z-a)^{-1} dz &= ir^{-1} \int_0^{2\pi} e^{i(-1)t} dt = 2\pi i, \quad n = -1. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити $\int_{\gamma} z^n dz$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq -1$, де γ – кусково-гладка крива з рівнянням $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. За формулою (3.1.4) маємо

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_{\alpha}^{\beta} z^n(t) z'(t) dt = \frac{1}{n+1} \int_{\alpha}^{\beta} [z^{n+1}(t)]' dt = \frac{1}{n+1} [z^{n+1}(\beta) - z^{n+1}(\alpha)].$$

Зокрема, для замкнутої кривої γ цей інтеграл дорівнює 0.

3.2 Інтегральна теорема Коши

Одна з найважливіших властивостей аналітичних функцій виражається наступною теоремою. Пізніше буде з'ясовано, що ця властивість є характеристичною (див. теорему 3.6.5).

Теорема 3.2.1 (Коши). Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області $G \subset \mathbf{C}$, то для будь якої замкнutoї спрямлюваної кривої $\gamma \subset G$ виконується рівність

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (3.2.1)$$

Наведене нижче доведення цієї теореми належить польському математику Гурса. Центральною частиною цього доведення є наступна лема.

Лема 3.2.2 (Коши-Гурса). За умов теореми Коши має місце рівність

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0,$$

де інтеграл береться уздовж межі довільного трикутника Δ , що міститься в області G .

Доведення леми. Припустимо супротивне: існує трикутник $\Delta \subset G$, для якого

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| =: M > 0.$$

Розділимо трикутник Δ середніми лініями на чотири менших трикутника Δ^i , $i = 1, \dots, 4$. Ясно, що

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Delta^i} f(z) dz.$$

Тому серед трикутників Δ^i , $i = 1, \dots, 4$, знайдеться такий (позначимо його Δ_1), що

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}, \quad p(\Delta_1) = \frac{p(\Delta)}{2},$$

де символом $p(\Delta)$ позначено периметр трикутника Δ .

Трикутник Δ_1 знову розділимо середніми лініями на чотири менших трикутника Δ_1^i , $i = 1, \dots, 4$. Ясно, що

$$\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Delta_1^i} f(z)dz.$$

Тому серед трикутників Δ_1^i , $i = 1, \dots, 4$, знайдеться такий (позначимо його Δ_2), що

$$\left| \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz \right| \geq \frac{M}{4^2}, \quad p(\Delta_2) = \frac{p(\Delta)}{2^2}.$$

Продовжуючи такі міркування, отримаємо послідовність вкладених трикутників

$$G \supset \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots,$$

таких що

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \geq \frac{M}{4^n}, \quad p(\Delta_n) = \frac{p(\Delta)}{2^n}. \quad (3.2.2)$$

За принципом вкладених компактів, діаметри яких прямують до нуля, існує точка $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Тоді $z_0 \in G$, а оскільки функція f диференційовна в області G , то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільної точки $z \in B(z_0, \delta)$ виконується нерівність

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Іншими словами, якщо ми позначимо вираз під знаком модуля через $\alpha(z)$, то функція $f(z)$ допускає подання

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0), \quad (3.2.3)$$

причому виконується нерівність $|\alpha(z)| < \varepsilon$ для $z \in B(z_0, \delta)$.

Так як $p(\Delta_n) \rightarrow 0$, причому всі трикутники Δ_n містять точку z_0 , то існує такий трикутник, що $\Delta_n \subset B(z_0, \delta)$. Для точок z цього трикутника виконується нерівність $|\alpha(z)| < \varepsilon$. Проінтегруємо рівність (3.2.3) уздовж границі цього трикутника Δ_n . Матимемо

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = f(z_0) \int_{\partial\Delta_n} dz + f'(z_0) \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)dz + \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0)dz,$$

Перші два інтеграли з правої частини цієї рівності дорівнюють нулю згідно з прикладом 2 розділу 3.1. Тому

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0)dz.$$

Очевидно, для точок $z \in \Delta_n$ має місце нерівність $|z - z_0| < p(\Delta_n)$. Враховуючи також (3.2.2) і нерівність $|\alpha(z)| < \varepsilon$ для точок $z \in \Delta_n$, отримуємо оцінку

$$\frac{M}{4^n} \leq \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \leq \varepsilon p(\Delta_n) \int_{\partial\Delta_n} |dz| = \varepsilon p^2(\Delta_n) = \varepsilon \frac{p^2(\Delta)}{4^n}.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ маємо оцінку $M \leq \varepsilon p^2(\Delta)$, що суперечить припущенняю $M > 0$.

Лема доведена.

Допоміжні твердження для доведення теореми Коші.

Лема 3.2.3 (Гейне-Бореля). *З будь-якого відкритого покриття (тобто покриття відкритими множинами) компактної множини $A \subset \mathbf{C}$ можна виділити скінченне підпокриття.*

Доведення. Припустимо супротивне: існує відкрите покриття $P = \{G_\alpha\}_\alpha$ множини A , яке не містить скінченного підпокриття. Оскільки множина A є компактною, вона обмежена, а тому міститься в деякому квадраті K зі сторонами паралельними вісям координат. Розіб'ємо квадрат K на чотири рівних квадрати. Згідно з припущенням для одного з цих чотирьох квадратів (позначимо його через K_1) множина $A \cap K_1$ не має скінченного підпокриття. Цей квадрат K_1 знову розіб'ємо на чотири рівних квадрати. Згідно з припущенням для одного з цих чотирьох квадратів (позначимо його через K_2) множина $A \cap K_2$ не має скінченного підпокриття. Продовжуючи такі міркування, отримаємо послідовність квадратів $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$, діаметри яких прямують до нуля, причому для множини $A_n := A \cap K_n$ не існує скінченного підпокриття.

За принципом вкладених компактів існує точка $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Ця точка z_0 покривається деяким елементом G_α покриття P . Але, оскільки діаметри множин A_n прямують до нуля і всі множини A_n містять точку z_0 , існує таке n , що $A_n \subset G$. Це означає, що множина A_n покривається одним елементом покриття, що суперечить вибору множини A_n .

Лема доведена.

Лема 3.2.4 *Нехай крива γ міститься в області $G \subset \mathbf{C}$. Тоді існує така область D , що $\gamma \subset D$, $\overline{D} \subset \mathbf{C}$.*

Доведення. Зауважимо, що крива γ , як неперервний образ відрізка, є компактною множиною. Оскільки крива γ міститься в області G , кожна її

точка z має такий окіл B_z , що $\overline{B_z} \subset G$. За лемою Гейне-Бореля з відкритого покриття $\{B_z\}_{z \in \gamma}$ кривої γ можна виділити скінченне підпокриття $\{B_{z_k}\}_{k=1}^n$. Тоді множина $D := \bigcup_{k=1}^n B_{z_k}$ є областю, причому $\gamma \subset D$, $\overline{D} = \bigcup_{k=1}^n \overline{B_{z_k}} \subset G$.

Лема доведена.

Лема 3.2.5 *Нехай спрямлювана крива γ міститься в області $G \subset \mathbf{C}$, а функція f неперервна в цій області. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така ламана P , вписана в криву γ , що*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Доведення. За лемою 3.2.4 існує така область D , що $\gamma \subset D$, $\overline{D} \subset \mathbf{C}$. Так як замкнена область \overline{D} не містить точку ∞ , вона обмежена і тому компактна. Отже, неперервна на цій компактній множині функція f , за відомою теоремою Рімана рівномірно неперервна на \overline{D} , тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільних $z, z' \in \overline{D}$, $|z - z'| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$.

Побудуємо розбиття кривої γ точками $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ (де z_0, z_n – початок і кінець кривої γ відповідно), що задовольняє вимоги:

1) $l_k := l(\gamma_k) < \delta$, де l_k – довжина дуги γ_k кривої γ між точками z_k і z_{k+1} ;

2) відрізок $P_k := [z_k, z_{k+1}]$ міститься в замкненій області \overline{D} .

Покладемо $\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$ і через P позначимо ламану з вершинами в точках z_0, z_1, \dots, z_n . Тоді маємо

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z) dz - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{P_k} f(z) dz \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z) dz - \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{P_k} f(z) dz - \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k \right| =: S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Оскільки $\Delta z_k = \int_{\gamma_k} dz$ (див. приклад 2 розділу 3.1), то

$$\begin{aligned} S_1 &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} [f(z) - f(z_k)] dz \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} |f(z) - f(z_k)| |dz| \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} |dz| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} l(\gamma_k) = \varepsilon l(\gamma). \end{aligned}$$

Аналогічно, оскільки $\Delta z_k = \int\limits_{P_k} dz$ (див. приклад 2 розділу 3.1), то

$$\begin{aligned} S_2 &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{P_k} [f(z) - f(z_k)] dz \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{P_k} |f(z) - f(z_k)| |dz| \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \int_{P_k} |dz| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} l(P_k) = \varepsilon l(P) \leq \varepsilon l(\gamma). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < 2\varepsilon l(\gamma).$$

Звідси, внаслідок довільності ε , випливає твердження леми.

Доведення теореми Коші. За лемою Коші-Гурса твердження теореми Коші виконується для $\gamma = \partial\Delta$.

Нехай далі $\gamma = \partial M$ – межа довільного опуклого n -кутника, $n > 3$. Зафіксуємо будь-яку його вершину і проведемо з неї діагоналі в усі інші вершини многокутника, окрім сусідніх з фіксованою. Цією побудовою многокутник M буде розбито на трикутники Δ_k , $k = 1, \dots, n-2$. Ясно, що

$$\int_{\partial M} f(z) dz = \sum_{k=1}^{n-2} \int_{\partial \Delta_k} f(z) dz.$$

З цієї рівності і леми Коші-Гурса випливає твердження теореми Коші для межі довільного опуклого многокутника.

Нехай тепер $\gamma = \partial M$ – межа довільного многокутника M . Можна показати, що межу многокутника M можна подати у вигляді об'єднання меж опуклих многокутників M_k , так що

$$\int_{\partial M} f(z) dz = \sum_k \int_{\partial M_k} f(z) dz.$$

Оскільки вже було доведено, що всі інтеграли у правій частині цієї рівності дорівнюють нулю, то теорема доведена для межі довільного многокутника, тобто для довільної замкнутої ламаної P .

Нехай, нарешті, γ – довільна замкнута, спрямлювана крива. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. За лемою 3.2.5 існує така ламана P , вписана в криву γ , що

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon,$$

причому внаслідок замкнутості кривої γ ламана P також буде замкнutoю. Оскільки вже було доведено, що $\int_P f(z)dz = 0$, то

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| < \varepsilon$$

Звідси, внаслідок довільноті ε , випливає твердження теореми.

Наступні два приклади показують, що обидві умови на область G : 1) обласьт G однозв'язна і 2) $G \subset \mathbf{C}$ є істотними в теоремі Коші.

Приклад 1. Розглянемо аналітичну в області $\{z : 0 < |z| < 2\}$ функцію $f(z) = \frac{1}{z}$. Ця область задовольняє умову $G \subset \mathbf{C}$, але не є однозв'язною. Згідно з прикладом 1 розділу 3.1

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i. \quad (3.2.4)$$

Таким чином, твердження теореми Коші не спрвджується. Цей приклад показує істотність умови однозв'язності в теоремі Коші.

Означення 3.2.1 Функція $f(z)$ називається аналітичною в точці ∞ , якщо функція $f(1/z)$ є аналітичною в точці 0. Прикладом аналітичної в точці ∞ є функція $f(z) = \frac{1}{z}$.

Приклад 2. Розглянемо аналітичну в області $\{z \in \overline{\mathbf{C}} : |z| > 1/2\}$ функцію $f(z) = \frac{1}{z}$. Ця область є однозв'язною на розширеній комплексній площині, але не задовольняє умову $G \subset \mathbf{C}$. Отже, рівність (3.2.4) показує, що ця умова також є істотною для теореми Коші.

3.3 Узагальнення теореми Коші

В розділі 3.2 було встановлено (див. приклад 1), що без умови однозв'язності області теорема Коші вже не має місця. Проте цю умову можна скасувати, якщо натомість на замкнту криву накласти ще умову її жордановості і гомотопності нулю (див. означення 1.4.2, 1.4.5).

Теорема 3.3.1 (теорема Коші для гомотопних кривих). Якщо функція $f(z)$ аналітична в області $G \subset \mathbf{C}$, то для будь якої замкнтої спрямлюваної жорданової кривої $\gamma \subset G$, що гомотопна нулю в області G , виконується рівність

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (3.3.1)$$

Доведення. Оскільки крива γ гомотопна нулю в області G , її внутрішність B міститься в цій області. Покажемо, що існує однозв'зна область D , яка задовольняє умову

$$B \bigcup_{\gamma} \subset D \subset G. \quad (3.3.2)$$

Для цього в кожній точці $z \in \gamma$ побудуємо такий окіл B_z , що $B_z \subset G$. Далі, враховуючи компактність кривої γ і користуючись лемою 3.2.3 (Гейне-Бореля), з відкритого покриття $\{B_z\}_{z \in \gamma}$ кривої γ виділимо скінчене підпокриття $\{B_{z_i}\}_{i=1}^n$. Тоді, область $D := B \bigcup_{i=1}^n B_{z_i}$ є однозв'зною і задовольняє умову (3.3.2).

Таким чином, замкнута спрямлювана крива γ міститься в однозв'язній області $D \subset \mathbf{C}$, де функція f є аналітичною. Тому за інтегральною теоремою Коши виконується рівність (3.3.1).

Теорема доведена.

Наслідок 3.3.2 Якщо функція $f(z)$ аналітична в області $G \subset \mathbf{C}$, а криві γ_1 і γ_2 гомотопні в цій області, то

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (3.3.3)$$

Доведення. Оскільки криві γ_1 і γ_2 гомотопні в області G , то крива $\gamma_1 \bigcup \gamma_2^-$ гомотопна нулю в цій області. Тому за теоремою 3.3.1

$$\int_{\gamma_1 \bigcup \gamma_2^-} f(z) dz = 0,$$

що рівносильно рівності (3.3.3).

Означення 3.3.1 Функція $f(z)$ називається аналітичною в замиканні області G (або в замкненій області \overline{G}), якщо вона аналітична в деякій області D , яка містить цю замкнену область \overline{G} .

Теорема 3.3.3 (теорема Коши для багатозв'язної області). Якщо функція $f(z)$ аналітична в замкненій області $\overline{G} \subset \mathbf{C}$, з межею $\partial G = \gamma_0 \bigcup \gamma_1^- \dots \bigcup \gamma_{n-1}^-$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, де γ_k — замкнуті спрямлювані жорданові криві, то виконується рівність

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0, \quad (3.3.4)$$

тобто

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z) dz. \quad (3.3.5)$$

Доведення. З'єднаємо зовнішню межеву криву γ_0 області G з кожною із внутрішніх межевих кривих $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ цієї області за допомогою розрізів уздовж спрямлюваних жорданових кривих l_k , $k = 1, \dots, n - 1$, що по-парно не перетинаються. Проведення цих розрізів перетворить область G на однозв'язну область \tilde{G} , межа якої складається з межі області G і розрізів l_k проходжуваних двічі у протилежних напрямках, тобто

$$\partial\tilde{G} = \partial G \bigcup_{k=1}^{n-1} l_k \bigcup_{k=1}^{n-1} l_k^-.$$

Тому

$$\int\limits_{\partial\tilde{G}} f(z) dz = \int\limits_{\partial G} f(z) dz.$$

З іншого боку, оскільки область \tilde{G} однозв'язна, її межа є замкнutoю спрямлюваною жордановою кривою, що гомотопна нулю. Тому за теоремою Коши для гомотопних кривих

$$\int\limits_{\partial\tilde{G}} f(z) dz = 0.$$

З двох останніх рівностей випливає твердження теореми.

3.4 Інтегральна формула Коши

Ще одна важлива властивість аналітичних функцій полягає в тому, що значення в будь-якій точці області, в замиканні якої функція є аналітичною (див означення 3.3.1), однозначно визначається її значеннями на межі цієї області. Цей факт одразу випливає з інтегральної формули Коши, що міститься в наступній теоремі.

Теорема 3.4.1 (формула Коши). Якщо функція $f(z)$ аналітична в замкненої області $\overline{G} \subset \mathbf{C}$, то для довільної точки $z \in G$ виконується рівність

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (3.4.1)$$

Доведення. Зафіксуємо точку $z \in G$ і оберемо окіл $B_\rho := B(z, \rho)$ цієї точки так, щоб $\overline{B_\rho} \subset G$. Побудуємо область $G_\rho := G \setminus \overline{B_\rho}$. В замиканні цієї області функція $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ є аналітичною. Тому за теоремою Коши для бага-

тозв'язної області $\int_{\partial G_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$. Оскільки $\partial G_\rho = \partial G \cup (\partial B_\rho)^-$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (3.4.2)$$

Зauważмо, що згідно з прикладом 2 розділу 3.1 $\int_{\partial B_\rho} \frac{1}{\xi - z} d\xi = 2\pi i$. Тому, враховуючи (3.4.2), маємо

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(z) - f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (3.4.3)$$

Оскільки функція $f(\cdot)$ неперервна в точці z , для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для будь-якого $\xi \in G$, $|\xi - z| < \delta$, виконується нерівність $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$. Зменшуючи у разі потреби ρ , можна вважати, що $\rho < \delta$. Тоді, враховуючи, що $|\xi - z| = \rho$ для $\xi \in \partial B_\rho$, з (3.4.3) отримаємо оцінку

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \int_{\partial B_\rho} |d\xi| = \varepsilon.$$

З цієї оцінки, внаслідок довільності ε , випливає формула (3.4.1).

Приклад. Обчислити інтеграл $I_\gamma := \int_{\gamma} \frac{\sin \xi}{\xi^2 + 1} d\xi$ уздовж довільної замкнутої

спрямлюваної жорданової кривої γ , що не проходить через точки $\pm i$.

1) Якщо крива $\gamma = \gamma_0$ не містить у своїй внутрішності жодної з точок $\pm i$, то функція $\frac{\sin \xi}{\xi^2 + 1}$ аналітична в замиканні внутрішності кривої γ_0 і тому за інтегральною теоремою Коши $I_{\gamma_0} = 0$.

2) Нехай крива $\gamma = \gamma_1$ містить у своїй внутрішності лише точку i . Тоді функція $f_1(\xi) := \frac{\sin \xi}{\xi + i}$ аналітична в замиканні внутрішності кривої γ_1 і тому за інтегральною формулою Коши

$$I_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1} \frac{\sin \xi}{\xi - i} d\xi = 2\pi i f_1(i) = 2\pi i \frac{\sin i}{2i} = \pi \frac{e^{-1} - e}{2i} = i\pi \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

3) Нехай крива $\gamma = \gamma_2$ містить у своїй внутрішності лише точку $-i$. Тоді функція $f_2(\xi) := \frac{\sin \xi}{\xi - i}$ аналітична в замиканні внутрішності кривої γ_2 і тому за інтегральною формулою Коши

$$I_{\gamma_2} = \int_{\gamma_2} \frac{\sin \xi}{\xi + i} d\xi = 2\pi i f_2(-i) = 2\pi i \frac{\sin(-i)}{-2i} = i\pi \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

4) Нехай, нарешті, крива $\gamma = \gamma_3$ містить у своїй внутрішності обидві точки $\pm i$. Видалимо з внутрішності кривої γ_3 такі замкнуті околи $B[i, r]$ і $B[-i, r]$, що не перетинаються і містяться у внутрішності γ_3 . Нехай $\gamma_1 = \partial B(i, r)$ і $\gamma_2 = \partial B(-i, r)$ – межеві кола відповідних околів. Тоді в замиканні отриманої області G з межею $\partial G = \gamma_3 \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^-$ функція $\frac{\sin \xi}{\xi^2 + 1}$ аналітична і тому за теоремою Коші для багатозв'язної області $\int_{\partial G} \frac{\sin \xi}{\xi^2 + 1} d\xi = 0$, тобто

$$\int_{\gamma_3} \frac{\sin \xi}{\xi^2 + 1} d\xi = \int_{\gamma_1} \frac{\sin \xi}{\xi^2 + 1} d\xi + \int_{\gamma_2} \frac{\sin \xi}{\xi^2 + 1} d\xi = I_{\gamma_1} + I_{\gamma_2} = i\pi(e - e^{-1}).$$

Теореми про середнє для аналітичних і гармонічних функцій.

Теорема 3.4.2 Якщо функція $f(z)$ аналітична в області G , то її значення в довільній скінченній точці $z \in G$ дорівнює середньому арифметичному її значень на колі достатньо малого радіусу з центром в точці z , тобто

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt. \quad (3.4.4)$$

Доведення. Побудуємо окіл $B(z, r)$ точки z так, що $B[z, r] \subset G$. Тоді функція $f(z)$ аналітична в замкненому околі $B[z, r]$. Тому, застосовуючи інтегральну формулу Коші, формулу для обчислення криволінійного інтегралу і, враховуючи той факт, що рівняння кола $\partial B(z, r)$ має вид $\xi(t) = z + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, отираємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

Теорема 3.4.3 Якщо функція $u(z) := u(x, y)$, $z = x + iy$, є гармонічною в однозв'язній області G , то її значення в довільній скінченній точці $z \in G$ дорівнює середньому арифметичному її значень на колі достатньо малого радіусу з центром в точці z , тобто

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it}) dt. \quad (3.4.5)$$

Доведення. За теоремою 2.6.2 для заданої гармонічної в однозв'язній області G функції $u(x, y)$ існує спряжена гармонічна функція $v(x, y)$. За теоремою 2.5.1 функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є аналітичною в області G . Для неї за теоремою 3.4.2 виконується рівність (3.4.4). Прирівнюючи дійсні частини лівої і правої частин рівності (3.4.4), отираємо (3.4.5).

3.5 Розгортання аналітичних функцій в ряд Тейлора

Теорема 3.5.1 (Тейлор). Якщо функція $f(z)$ аналітична в області G , а z_0 – довільна скінченна точка цієї області, то в деякому околі цієї точки функцію $f(z)$ можна розгорнути у збіжний ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad (3.5.1)$$

де $\gamma_r = \{z : |z - z_0| = r\}$, $r \in (0, \rho)$, $\rho := \rho(z_0, \partial G)$ – відстань точки z_0 до межі області G .

Радіус R круга збіжності ряду (3.5.1) задовільняє нерівність $R \geq \rho$.

Доведення. Згідно з означенням числа ρ маємо включення $B(z_0, \rho) \subset G$. Зафіксуємо довільне $z \in B(z_0, \rho)$. Тоді $|z - z_0| < \rho$ і тому існує таке r , що $|z - z_0| < r < \rho$. Отже, функція $f(z)$ аналітична в замиканні околу $B(z_0, r)$ і тому за інтегральною формулою Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (3.5.2)$$

Розгорнемо в ряд ядро $\frac{1}{\xi - z}$ в правій частині цієї рівності за допомогою формули суми нескінченної геометричної прогресії

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{k=1}^{\infty} w^n, \quad |w| < 1.$$

Для цього спочатку подамо ядро $\frac{1}{\xi - z}$ у вигляді

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)}. \quad (3.5.3)$$

Зауважимо, що для $\xi \in \gamma_r$ число $w := \frac{z - z_0}{\xi - z_0}$ задовільняє умову $|w| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$ внаслідок вибору числа r . Тому, застосовуючи в (3.5.3) формулу суми нескінченної геометричної прогресії, отримаємо

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}. \quad (3.5.4)$$

Зауважимо, що ряд (3.5.4) збігається рівномірно на колі γ_r . Він залищиться рівномірно збіжним на γ_r після домноження на функцію $f(\xi)$ внаслідок її

обмеженності на цьому колі. Тому, підставляючи розвинення (3.5.4) в (3.5.2) і інтегруючи ряд почленно, будемо мати

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Означення 3.5.1 Ряд (3.5.1) називається рядом Тейлора функції $f(z)$ в околі точки z_0 .

Приклад 1. Чи можна функцію $f(z) = \frac{1}{1+\sin z}$ розгорнути в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = \frac{\pi}{2}i$? Якщо так, знайти радіус збіжності цього ряду.

Функція $f(z)$, як частка аналітичних, є аналітичною у всіх точках комплексної площини, окрім нулів знаменника, тобто точок $z_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Таким чином, областью аналітичності функції $f(z)$ є множина $G = \mathbf{C} \setminus \{z_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$. Очевидно, $z_0 \in G$. Тому за теоремою Тейлора функцію $f(z)$ можна розвинути в ряд Тейлора в околі точки z_0 . За тією ж теоремою радіус R круга збіжності цього ряду задовільняє нерівність $R \geq \rho := \rho(z_0, \partial G) = |\frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$.

З іншого боку, за теоремою про диференційовність суми степеневого ряду функція $f(z)$, представлена рядом Тейлора, є аналітичною в кругі збіжності цього ряду. Тому радіус його круга збіжності не може бути більшим за $\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$, бо інакше цей круг буде містити точку $-\frac{\pi}{2}$, в якій $f(z)$ не є аналітичною. Таким чином, $R = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$.

Наслідки з теореми Тейлора і інтегральної формули Коші.

Наслідок 3.5.2 (Нерівність Коші для коефіцієнтів ряду Тейлора). Якщо функція $f(z)$ аналітична в замкненому околі $B[z_0, r]$, то для коефіцієнтів c_n її ряду Тейлора в околі точки z_0 виконується нерівність

$$|c_n| \leq \frac{\max_{z \in \gamma_r} |f(z)|}{r^n},$$

де $\gamma_r = \{z : |z - z_0| = r\}$.

Доведення. Нехай $M_r := \max_{z \in \gamma_r} |f(z)|$. Застосовуючи формулу (3.5.1) для коефіцієнтів c_n і враховуючи, що $|\xi - z_0| = r$ для $\xi \in \gamma_r$, будемо мати

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M_r}{r^{n+1}} \int_{\gamma_r} |d\xi| = \frac{M_r}{2\pi r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M_r}{r^n}.$$

Означення 3.5.2 Цілою називається функція, аналітична у всій комплексній площині C .

Приклад 2. Цілими є функції e^z , $\cos z$, $\sin z$, $P_n(z) := a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$.

Наслідок 3.5.3 (Теорема Ліувіля). Ціла функція, обмежена у всій комплексній площині, є константою.

Доведення. За теоремою Тейлора цілу функцію $f(z)$ можна розгорнути в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (3.5.5)$$

збіжний у всій комплексній площині. Оскільки функція $f(z)$ обмежена, існує таке $M > 0$, що $|f(z)| \leq M$ для всіх $z \in C$. Тоді за наслідком 3.5.2

$$|c_n| \leq \frac{\max_{z \in \gamma_r} |f(z)|}{r^n} \leq \frac{M}{r^n},$$

де r —довільне додатне число оскільки ряд (3.5.5) збігається у всій комплексній площині. Тому, переходячи в цій нерівності до границі при $r \rightarrow \infty$, для $n > 0$ отримаємо $|c_n| \leq 0$, тобто $c_n = 0$ для $n > 0$. Підставляючи ці значення c_n в (3.5.5), отримаємо $f(z) = c_0$.

Зауваження. Зокрема, функції $\cos z$, $\sin z$ необмежені в комплексній площині.

Наслідок 3.5.4 (Основна теорема алгебри). Будь який алгебраїчний многочлен $P_n(z) := a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ степені $n \geq 1$ має в комплексній площині рівно n коренів з урахуванням їх кратностей.

Доведення. Досить довести, що будь-який алгебраїчний многочлен $P_n(z)$ степені $n \geq 1$ має в комплексній площині принаймі один нуль. Дійсно, якщо цей факт вірний, то многочлен $P_n(z)$ допускатиме подання у вигляді $P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1}(z)$, де z_1 —нуль многочлена $P_n(z)$. Повторимо це міркування з многочленом P_{n-1} , а потім (у разі потреби) і далі до тих пір, поки не отримаємо подання $P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)P_0$, яке рівносильне твердженю теореми.

Отже, залишилось довести, що будь-який алгебраїчний многочлен $P_n(z)$ степені $n \geq 1$ має в комплексній площині принаймі один нуль.

Припустимо супротивне, тобто існує многочлен $P_n(z)$ степені $n \geq 1$, який не має нулів в комплексній площині. Тоді функція $f(z) := \frac{1}{P_n(z)}$ є цілою. Оскільки $P_n(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $R > 0$, що $|f(z)| < \varepsilon$ для $|z| > R$. З іншого боку неперервна функція f обмежена і на множині $\{z : |z| \leq R\}$ внаслідок її компактності. Таким чином, ціла функція f обмежена на всій комплексній площині і за теоремою Ліувіля (наслідок 3.5.3) є константою, що неможливо з огляду на означення функції f .

Наслідок 3.5.5 Для аналітичної в точці z_0 функції $f(z)$ існує єдине представлення виду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n. \quad (3.5.6)$$

Доведення. Існування подання виду (3.5.6) для аналітичної в точці z_0 функції $f(z)$ гарантовано теоремою Тейлора. Доведемо його єдиність. Для цього покажемо, що в будь-якому представленні виду (3.5.6) коефіцієнти c_n такі ж самі, як у формулі (3.5.1).

Нехай коло $\gamma_r := \{z : |z - z_0| = r\}$ обрано так, що функція $f(z)$ є аналітичною на ньому. Зафіксуємо довільне ціле невід'ємне k і домножимо ліву і праву частини рівності (3.5.6) на $(z - z_0)^{-k-1}$, а потім проінтегруємо отриману рівність уздовж кола γ_r . За теоремою 2.1.1 (Абеля) ряд (3.5.6) збігається рівномірно на колі γ_r . Він залишиться рівномірно збіжним і після домноження на $(z - z_0)^{-k-1}$ оскільки $|z - z_0| = r$ для точок $z \in \gamma_r$. Тому, інтегруючи цей ряд почленно і враховуючи приклад 1 з розділу 3.1, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \int_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-k-1} dz = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{\gamma_r} (z - z_0)^{n-k-1} dz = c_k \cdot 2\pi i. \end{aligned}$$

Звідси для коефіцієнтів c_k отримуємо формулу (3.5.1).

Нескінченна диференційовність аналітичних функцій.

Теорема 3.5.6 Аналітична в області $G \subset \mathbf{C}$ функція $f(z)$ має в цій області похідні будь-якого порядку.

Доведення. Зафіксуємо точку $z_0 \in G$. За теоремою Тейлора функцію $f(z)$ можна розгорнути у збіжний ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ в деякому околі цієї точки. Тоді за наслідком 2.4.3 з теореми про диференційовність суми степеневого ряду функція $f(z)$ має в цьому околі похідні будь-якого порядку.

Теорема 3.5.7 (інтегральна формула Коши для похідних). Якщо функція $f(z)$ аналітична в замкненій області $\overline{G} \subset \mathbf{C}$, то для довільної точки $z_0 \in G$ і будь-якого $k \in \mathbf{N}$ виконується рівність

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi.$$

Доведення. Зафіксуємо точку $z_0 \in G$. За теоремою Тейлора функцію $f(z)$ можна розгорнути у збіжний ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad (3.5.7)$$

де $\gamma_r = \{z : |z - z_0| = r\}$, $r \in (0, \rho)$, $\rho := \rho(z_0, \partial G)$ – відстань точки z_0 до межі області G . Продиференціюємо цей ряд k разів почленно, користуючись наслідком 2.4.3 з теореми про диференційованість суми степеневого ряду. Обчисливши суму продиференційованого ряду в точці z_0 , матимемо $f^{(k)}(z_0) = k! c_k$. Підставивши значення коефіцієнту c_k з формули (3.5.7), отримаємо

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi.$$

Остання рівність виконується за інтегральною теоремою Коші для багатозв'язної області $G \setminus B[z_0, r]$.

В ході доведення інтегральної формули Коші для похідних отримано наступну формулу для коефіцієнтів ряду Тейлора.

Наслідок 3.5.8 Для коефіцієнтів ряду Тейлора (3.5.7) аналітичної в точці z_0 функція $f(z)$ має місце рівність:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (3.5.8)$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I_\gamma := \int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z+i)^2} dz$ уздовж довільної замкнутої спрямлюваної жорданової кривої γ , що не проходить через точки $0, -i$.

1) Якщо крива $\gamma = \gamma_0$ не містить у своїй внутрішності жодної з точок $0, -i$, то функція $\frac{e^z}{z(z+i)^2}$ аналітична в замиканні внутрішності кривої γ_0 і тому за інтегральною теоремою Коші $I_{\gamma_0} = 0$.

2) Нехай крива $\gamma = \gamma_1$ містить у своїй внутрішності лише точку 0 . Тоді функція $f_1(z) := \frac{e^z}{(z+i)^2}$ аналітична в замиканні внутрішності кривої γ_1 і тому за інтегральною формулою Коші

$$I_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{z} dz = 2\pi i f_1(0) = 2\pi i \frac{e^0}{(0+i)^2} = -2\pi i.$$

3) Нехай крива $\gamma = \gamma_2$ містить у своїй внутрішності лише точку $-i$. Тоді функція $f_2(z) := \frac{e^z}{z}$ аналітична в замиканні внутрішності кривої γ_2 і тому за інтегральною формулою Коші для похідних

$$I_{\gamma_2} = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z+i)^2} dz = 2\pi i f'_2(-i) = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z} \right)'_{z=-i} = 2\pi i \left(\frac{ze^z - e^z}{z^2} \right)_{z=-i} =$$

$$= 2\pi i e^{-i} \frac{-i - 1}{-1} = 2\pi(\cos 1 - i \sin 1)(-1 + i) = 2\pi[(\sin 1 - \cos 1) + i(\sin 1 + \cos 1)].$$

4) Нехай, нарешті, крива $\gamma = \gamma_3$ містить у своїй внутрішності обидві точки $0, -i$. Видалимо з внутрішності кривої γ_3 такі замкнуті околи $B[0, r]$ і $B[-i, r]$, що не перетинаються і містяться у внутрішності γ_3 . Нехай $\gamma_1 = \partial B(0, r)$ і $\gamma_2 = \partial B(-i, r)$ – межеві кола відповідних околів. Тоді в замиканні отриманої області G з межею $\partial G = \gamma_3 \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^-$ функція $\frac{e^z}{z(z+i)^2}$ аналітична і тому за теоремою Коши для багатозв'язної області $\int_{\partial G} \frac{e^z}{z(z+i)^2} dz = 0$, тобто

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} \frac{e^z}{z(z+i)^2} dz &= \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z+i)^2} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(z+i)^2} dz = \\ &= I_{\gamma_1} + I_{\gamma_2} = 2\pi [(\sin 1 - \cos 1) + i(\sin 1 + \cos 1 - 1)]. \end{aligned}$$

3.6 Первісна

Означення 3.6.1 Нехай функція $f(z)$ визначена в області $G \subset \mathbf{C}$. Диференційовна в цій області функція $F(z)$ називається первісною функції $f(z)$ в області G , якщо для всіх $z \in G$ виконується умова $F'(z) = f(z)$.

Вправа. Якщо функція $f(z)$ має первісну $F(z)$ в області G , то сукупність усіх первісних задається формулою $\{F(z) + c : c \in \mathbf{C}\}$.

Зауваження. З означення первісної слідує, що лише аналітичні в області функції мають первісну в цій області.

Наступне твердження дає ще одну необхідну умову існування первісної.

Твердження 3.6.1 Якщо неперервна в області $G \subset \mathbf{C}$ функція $f(z)$ має первісну $F(z)$ в цій області, то для будь-якої кусково-гладкої кривої γ , що задається рівнянням $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, має місце рівність

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)),$$

зокрема, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ для будь-якої замкнutoї кусково-гладкої кривої γ .

Доведення. Застосовуючи означення первісної, формулу 3.1.2 для обчислення криволінійного інтегралу, і формулу Ньютона-Лейбніца, отримаємо

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} F'(z(t)) z'(t) dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (F(z(t))' dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

Наступна теорема дає достатню умову існування первісної.

Теорема 3.6.2 (про первісну). *Нехай функція $f(z)$ неперервна в області $G \subset \mathbf{C}$ і для будь-якої замкнutoї спрямлюваної кривої $\gamma \subset G$*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (3.6.1)$$

Тоді криволінійний інтеграл $F(z) := \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$ є первісною функцією $f(z)$ в області G , причому цей інтеграл не залежить від кривої, що з'єднує довільні точки $z_0, z \in G$ і міститься в області G .

Доведення. Ясно, що за умови (3.6.1) інтеграл $F(z) := \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$ не залежить від кривої, що з'єднує точки $z_0, z \in G$ і міститься в області G .

Зафіксуємо довільні точки $z_0, z \in G$ і оберемо Δz таким, щоб мало місце відображення $[z, z + \Delta z] \subset G$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right\} = \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Остання рівність виконується оскільки всі ці інтеграли не залежать від вибору кривої. Тому останній інтеграл можна брати уздовж відрізка $[z, z + \Delta z]$.

Враховуючи рівність $\int_z^{z + \Delta z} d\xi = \Delta z$ (див. приклад 2 розділу 3.1), маємо $f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi$. Застосовуючи також (3.6.2), отримаємо

$$r(z) := \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(\xi) - f(z)] d\xi \right|. \quad (3.6.3)$$

Оскільки функція $f(\xi)$ неперервна в точці z , для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для $|\Delta z| < \delta$ і довільного $\xi \in [z, z + \Delta z]$ має місця нерівність

$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$. Тому з (3.6.3) для $|\Delta z| < \delta$ випливає оцінка

$$r(z) \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\xi) - f(z)| d\xi < \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |d\xi| = \varepsilon.$$

З огляду на означення $r(z)$, ця оцінка еквівалентна рівності $F'(z) = f(z)$.

Теорема доведена.

З інтегральної теореми Коші і теореми про первісну маємо

Наслідок 3.6.3 *Функція $f(z)$, аналітична в однозв'язній області $G \subset \mathbf{C}$, має в цій області первісну $F(z) := \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$, причому цей криволінійний інтеграл не залежить від кривої, що з'єднує точки $z_0, z \in G$ і міститься в області G .*

Зауваження. Для багатозв'язної області цей наслідок вже не має місця.

Приклад 4. Функція $f(z) = z^{-1}$ в області $G = \{z : 0 < |z| < 2\}$ є аналітичною, але не має первісної, бо не виконується необхідна для цього умова. Дійсно, для замкнutoї кривої $\gamma := \{z : |z| = 1\}$ має місце рівність $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i$ (приклад 1 розділу 3.1), а за твердженням 3.6.1 цей інтеграл має дорівнювати нулю для функції, що має первісну в області G .

Теорема 3.6.4 (Морера). *Нехай функція $f(z)$ неперервна в області $G \subset \mathbf{C}$ і для будь-якої замкнutoї спрямлюваної кривої $\gamma \subset G$ виконується рівність $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. Тоді функція $f(z)$ є аналітичною в області G .*

Доведення. Оскільки умови теореми Морера такі ж самі, як умови теореми 3.6.1 (про первісну), то функція f має первісну F , тобто $F'(z) = f(z)$ для всіх $z \in G$. Тоді функція f сама є аналітичною за теоремою 3.5.6 (про нескінченну диференційовність аналітичної функції).

Зауваження. Теорема Морера є оберненою до інтегральної теоремі Коші. Це дає змогу виділити декілька еквівалентних підходів до означення аналітичної функції.

Еквівалентні підходи до означення аналітичної функції.

Теорема 3.6.5 *Нехай функція f неперервна в однозв'язній області $G \subset \mathbf{C}$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

- 1) функція f диференційовна в області G ;
- 2) для будь-якої замкнutoї спрямлюваної кривої $\gamma \subset G$ має місце рівність $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$;
- 3) для довільної точки $z_0 \in G$ існує окіл, в якому функцію f можна розгорнути у збіжний степеневий ряд, тобто $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Доведення. Досить довести імплікації: $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$.

Імплікація $1) \Rightarrow 2)$ – це інтегральна теорема Коші;

імплікація $2) \Rightarrow 3)$ випливає з теорем Морера і Тейлора;

імплікація $3) \Rightarrow 1)$ випливає з теореми про диференційовність суми степеневого ряду.

Означення аналітичної функції, як такої, що задовольняє умову 1), належить Ріману. Такі функції він назава голоморфними.

Функції, що задовольняють умову 2), природно назвати аналітичними за Коші.

Нарешті, Вейерштрас називав функції, що задовольняють умову 3), регулярними в області G . Їх можна назвати аналітичними за Вейерштрасом..

Підхід Вейерштраса дає змогу означити аналітичність функції в точці ∞ .

Означення 3.6.2 Функція $f(z)$ називається аналітичною в точці ∞ , якщо в деякому околі $\{z : |z| > r\}$ цієї точки вона допускає подання

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}. \quad (3.6.4)$$

Іншими словами, функція $f(z)$ називається аналітичною в точці ∞ , якщо функція $f(\frac{1}{z})$ аналітична в точці 0.

3.7 Нулі аналітичних функцій. Теорема єдиності

Означення 3.7.1 Нехай функція f аналітична в точці $a \in \mathbf{C}$ і $f(a) = 0$. Точка a називається нулем n -го порядку функції f , якщо для перших n коефіцієнтів її ряду Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ в околі точки a виконується умова

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0, \quad c_n \neq 0. \quad (3.7.1)$$

Іншими словами, порядком нуля аналітичної в точці a функції називається номер першого коефіцієнта її ряду Тейлора в околі цієї точки, відмінного від нуля.

Враховуючи, що за наслідком 3.5.8 $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, умову (3.7.1) можна записати в еквівалентній формі:

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0. \quad (3.7.2)$$

Таким чином, порядок нуля аналітичної в точці a функції – це номер її першої похідної в цій точці, відмінний від нуля.

Нехай функція f аналітична в точці ∞ , тобто в деякому околі $\{z : |z| > r\}$ нескінченості вона допускає подання (3.6.4), тобто $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$. Точка ∞

називається нулем n -го порядку функції f , якщо для перших n коефіцієнтів цього подання в околі точки ∞ виконується умова (3.7.1).

Критерій порядка нуля аналітичних функцій.

Твердження 3.7.1 Для того щоб аналітична в точці a , $a \neq \infty$, функція f мала в цій точці нуль порядку n необхідно і достатньо існування в деякому околі цієї точки подання виду

$$f(z) = (z - a)^n \cdot h(z), \quad h(a) \neq 0, \quad (3.7.3)$$

де $h(z)$ – аналітична в точці a функція.

Для того щоб аналітична в точці ∞ , функція f мала в цій точці нуль порядку n необхідно і достатньо існування в деякому околі нескінченості подання виду

$$f(z) = z^{-n} \cdot h(z), \quad h(\infty) \neq 0,$$

де $h(z)$ – аналітична в точці ∞ функція.

Доведення. Нехай $a \neq \infty$.

Доведемо необхідність твердження. Аналітичну в точці a функцію f за теоремою Тейлора можна розгорнути в деякому околі цієї точки в степеневий ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$. Оскільки функція f має в точці a нуль порядку n , виконується умова (3.7.1). Тому цей ряд допускає подання

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k = (z - a)^n (c_n + c_{n+1}(z - a) + c_{n+2}(z - a)^2 + \dots).$$

Сума $h(z)$ степеневого ряду в дужках є функцією аналітичною (за теоремою про диференційовність суми степеневого ряду), причому $h(a) = c_n \neq 0$. Отже, отримане подання має вид (3.7.3).

Доведемо достатність твердження. Для цього в поданні (3.7.3) розгорнемо функцію $h(z)$ в ряд Тейлора $h(z) = b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \dots$, де $b_0 = h(a) \neq 0$. Підставивши його в (3.7.3), матимемо

$$f(z) = b_0(z - a)^n + b_1(z - a)^{n+1} + b_2(z - a)^{n+2} + \dots -$$

ряд Тейлора функції $f(z)$ в околі точки a , причому його коефіцієнти задовільняють умову (3.7.1). Це означає, що функція $f(z)$ має в точці a нуль порядку n .

Для точки ∞ доведення проводиться аналогічно з тією різницею, що замість ряду Тейлора слід скористатися поданням (3.6.4) в околі нескінченості.

З цього твердження одразу випливає

Наслідок 3.7.2 Для того щоб аналітична в точці a , $a \neq \infty$, функція f мала в цій точці нуль порядку n необхідно і достатньо виконання асимптотичної рівності

$$f(z) \sim C(z - a)^n, \quad z \rightarrow a, \quad C \neq 0.$$

Для того щоб аналітична в точці ∞ , функція f мала в цій точці нуль порядку n необхідно і достатньо виконання асимптотичної рівності

$$f(z) \sim Cz^{-n}, \quad z \rightarrow \infty, \quad C \neq 0.$$

Приклад 1. Знайти порядок нуля у точці 0 наступних аналітичних функцій: $f_1(z) = \cos z - 1$, $f_2(z) = \sin^3 z \cdot (e^z - 1)^4$.

За означенням функції $\cos z$ маємо $\cos z - 1 = -\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$. Отже, перший коефіцієнт ряду Тейлора функції $f_1(z)$, відмінний від нуля, має номер 2. Тому за означенням функція $f_1(z)$ в точці 0 має нуль другого порядку.

Добре відомо, що $\sin z \sim z$ і $e^z - 1 \sim z$ при $z \rightarrow 0$. Тому $f_2(z) \sim z^7$ при $z \rightarrow 0$. За наслідком 3.7.2 це означає, що в точці 0 функція $f_2(z)$ має нуль сьомого порядку.

Приклад 2. Знайти порядок нуля у точці ∞ наступних аналітичних функцій: $f_3(z) = \sin \frac{\pi}{z}$, $f_4(z) = \frac{(z^2+1)^4}{(z^3+i)^3}$.

За означенням функції $\sin z$ маємо $\sin \frac{\pi}{z} = \frac{\pi}{z} - \frac{\pi^3}{3!z^3} + -\frac{\pi^5}{5!z^5} + \dots$. Отже, перший коефіцієнт ряду Тейлора функції f_3 , відмінний від нуля, має номер 1. Тому за означенням функція f_3 в точці ∞ має нуль першого порядку, або простий нуль.

Очевидно, що $(z^2+1)^4 \sim z^8$ і $(z^3+i)^3 \sim z^9$ при $z \rightarrow \infty$. Тому $f_4(z) \sim z^{-1}$ при $z \rightarrow \infty$. За наслідком 3.7.2 це означає, що в точці ∞ функція $f_4(z)$ має простий нуль.

Теорема 3.7.3 *Нехай аналітична в точці a , $a \neq \infty$, функція f має нуль в цій точці. Тоді виконується одна з альтернатив:*

1) функція f тотожно дорівнює нулю в деякому околі точки a ;

2) існує такий окіл точки a , в якому функція f не має інших нулів, окрім точки a .

Доведення. Оскільки функція f аналітична в точці a , за теоремою Тейлора її можна розгорнути в деякому околі цієї точки в степеневий ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$. Існують дві можливості: 1) всі коефіцієнти c_k цього ряду дорівнюють нулю; 2) $c_n \neq 0$ для деякого n , а $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$. У першому випадку функція f тотожно дорівнює нулю в круг збіжності ряду Тейлора. У другому випадку функція f має у точці a нуль порядку n і за твердженням 3.7.1 допускає подання $f(z) = (z-a)^n \cdot h(z)$ в деякому околі цієї точки, де h —аналітична функція в точці a , причому $h(a) \neq 0$. Як функція неперервна $h(z) \neq 0$ в деякому околі точки a . Тоді і функція f не має інших нулів в цьому околі, окрім точки a .

Одна з найважливіших властивостей аналітичних функцій виражається наступною теоремою.

Теорема 3.7.4 (теорема єдиності для аналітичних функцій). *Якщо функція f аналітична в області $G \subset \mathbf{C}$, а множина її нулів $M := \{z \in G : f(z) = 0\}$ має в цій області граничну точку, то функція f тотожно дорівнює нулю в області G .*

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $\xi \in G$ і через a позначимо гранічну точку множини M нулів функції f в області G , тобто, $a \in M' \cap G$. Оскільки G —область, існує крива $\gamma \subset G$, що з'єднує точки a і ξ . Покладемо $\rho := \rho(\gamma, \partial G)$. Зазначимо, що $\rho > 0$ внаслідок компактності множин γ і ∂G . На кривій γ оберемо точки $a = z_1, z_2, z_3, \dots, z_n = \xi$, які задовольняють умову $\rho(z_k, z_{k+1}) < \frac{\rho}{2}$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Побудуємо далі околи $B_k := B(z_k, \rho)$ точок z_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Доведемо, що $f(\xi) = 0$. Для цього досить довести, що в кожному околі B_k функція f тотожно дорівнює нулю. Почнемо з околу точки $z_1 = a$. Розгорнемо функцію f в ряд Тейлора $f(z) = \sum_{k=0}^n c_k^1(z - z_1)^k$ в околі точки z_1 .

За теоремою Тейлора радіус збіжності R_1 цього ряду задовольняє нерівність $R_1 \geq \rho(z_1, \partial G) \geq \rho$. Оскільки точка $z_1 = a$ є граничною для множини нулів функції f , за теоремою 3.7.3 виконується перша альтернатива цієї теореми, тобто функція тотожно дорівнює нулю в околі $B(z_1, R_1)$, і тим більше в околі $B_1 = B(z_1, \rho)$.

Зауважимо далі, що $z_2 \in B_1$ за вибором точок z_k . При цьому точка z_2 міститься в множині B_1 разом з деяким околом. Отже, точка z_2 , як і точка z_1 , є граничною для множини нулів функції f . Тому, замінюючи в попередніх міркуваннях точу z_1 на точку z_2 , і повторюючи ці міркування, доведемо, що функція $f(z)$ тотожно дорівнює нулю в околі B_2 .

Повторюючи ці міркування n разів, доведемо, що функція $f(z)$ тотожно дорівнює нулю в околі B_n , зокрема, в довільно фіксованій точці $\xi = z_n$.

Теорема доведена.

Зауваження. Сенс цієї теореми полягає в тому, що аналітична в області G функція повністю визначається своїми значеннями лише на невеликій підмножині області G , а саме, на множині, що має граничну точку в області G , наприклад, на кривій $\gamma \subset G$. Точніше, має місце

Наслідок 3.7.5 Якщо аналітичні в області $G \subset \mathbf{C}$ функції f_1 і f_2 збігаються на множині $M \subset G$, що має в цій області граничну точку, то $f_1(z) = f_2(z)$ для всіх $z \in G$.

Зокрема, якщо дві аналітичні в області $G \subset \mathbf{C}$ функції збігаються на деякій кривій $\gamma \subset G$, то вони тотожні в цій області.

З теореми єдиності випливає, що всі тотожності для цілих функцій, відомі на дійсній осі, виконуються і в комплексній площині.

Приклад 2. Доведемо, що $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ для всіх $z \in \mathbf{C}$. Дійсно, функція $f(z) := \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ є аналітичною на всій комплексній площині \mathbf{C} , причому $f(x) = 0$ для $x \in \mathbf{R}$ внаслідок основної тотожності тригонометрії. Отже, множина M нулів функції f містить дійсну вісь \mathbf{R} . Ясно, що будь-яка точка на \mathbf{R} є граничною для множини M . Тому за теоремою єдиності $f(z) = 0$ для всіх $z \in \mathbf{C}$.

Приклад 3. Доведемо, що $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$ для всіх $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Дійсно, функція $F(z_1, z_2) := \sin(z_1 + z_2) - (\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1)$ є аналітичною на всій комплексній площині за кожною змінною z_1 і z_2 при

фіксованій іншій змінній, а доводжується тотожність, як відомо, виконується на дійсній осі, тобто $F(x_1, x_2) = 0$ для $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

1) Зафіксуємо другу змінну $z_2 = x_2$, де $x_2 \in \mathbf{R}$ і розглянемо функцію $f_1(z_1) := F(z_1, x_2)$. Ця функція є аналітичною на всій комплексній площині, причому $f_1(x_1) = 0$ для $x_1 \in \mathbf{R}$ оскільки $f_1(x_1) = F(x_1, x_2) = 0$. За теоремою єдиності $f_1(z_1) = 0$ для всіх $z_1 \in \mathbf{C}$, тобто $F(z_1, x_2) = 0$ для всіх $z_1 \in \mathbf{C}$, $x_2 \in \mathbf{R}$.

2) Зафіксуємо тепер довільно першу змінну $z_1 \in \mathbf{C}$ функції $F(z_1, z_2)$ і розглянемо функцію $f_2(z_2) := F(z_1, z_2)$. Ця функція є аналітичною на всій комплексній площині, причому $f_2(x_2) = 0$ для $x_2 \in \mathbf{R}$ оскільки $f_2(x_2) = F(z_1, x_2) = 0$ за доведеним у пункті 1. Тому за теоремою єдиності $f_2(z_2) = 0$ для всіх $z_2 \in \mathbf{C}$, тобто $F(z_1, z_2) = 0$ для $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

Приклад 4. Чи існує аналітична в точці 0 функція, що задовольняє умову $f(z) = f(2z)$ (*) для всіх z і $2z$ з околу (нуля) B аналітичності функції f ? Якщо так, знайти всі такі функції.

Ясно, що умову (*) можна записати у вигляді $f(z) = f\left(\frac{z}{2}\right)$ для всіх z з околу B . Зафіксуємо довільну точку z_0 з околу B і нехай $K := f(z_0)$. Тоді умову (*) можна продовжити наступним чином:

$$K = f(z_0) = f\left(\frac{z_0}{2}\right) = f\left(\frac{z_0}{2^2}\right) = f\left(\frac{z_0}{2^3}\right) = \dots = f\left(\frac{z_0}{2^n}\right) = \dots$$

Отже, функція $f(z) - K$ є аналітичною в точці 0, а множина її нулів містить послідовність $\left\{\frac{z_0}{2^n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, яка має граничну точку 0 в околі B . Тому за теоремою єдиності $f(z) = K$ для всіх z з околу B . Таїм чином, множиною аналітичних в точці 0 функцій, що задовольняють умову (*) є констатни і тільки вони.

Розділ 4

Теорія лишків Коші

4.1 Ряди Лорана

Теорема 4.1.1 *Функцію f , аналітичну в кільці $\{z : r < |z - a| < R\}$, де $a \in \mathbf{C}$, можна розгорнути в цьому кільці у збіжний ряд виду*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad (4.1.1)$$

де $\gamma_\rho = \{z : |z - a| = \rho\}$, $r < \rho < R$.

Доведення. Зафіксуємо довільну точку z кільця $\{z : r < |z - a| < R\}$ і побудуємо менше кільце $G := \{\xi : r_1 < |\xi - a| < R_1\}$, де r_1 і R_1 такі, що

$$r < r_1 < |z - a| < R_1 < R.$$

Тоді $z \in G$, а функція $f(z)$ аналітична в замиканні \overline{G} області G з межею $\partial G = \gamma_{R_1} \cup \gamma_{r_1}^-$, де γ_{R_1} і $\gamma_{r_1}^-$ – кола з центром в точці a радіусів R_1 і r_1 відповідно. Тому за інтегральною формулою Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =: I_1 + I_2. \quad (4.1.2)$$

Розгорнемо в ряд ядро $\frac{1}{\xi - z}$ в кожному з інтегралів I_1 і I_2 за допомогою формули суми нескінченної геометричної прогресії

$$\frac{1}{1 - w} = \sum_{k=1}^{\infty} w^n, \quad |w| < 1.$$

Для цього спочатку подамо ядро $\frac{1}{\xi-z}$ інтегралу I_1 у вигляді

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(\xi-a)-(z-a)} = \frac{1}{(\xi-a)\left(1-\frac{z-a}{\xi-a}\right)}. \quad (4.1.3)$$

Зазначимо, що дріб $w := \frac{z-a}{\xi-a}$ задовольняє умову $|w| = \frac{|z-a|}{R_1} < 1$ для точок $\xi \in \gamma_{R_1}$ внаслідок вибору числа R_1 . Тому, застосовуючи в (4.1.3) формулу суми нескінченної геометричної прогресії, отримаємо

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(\xi-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}. \quad (4.1.4)$$

Зазначимо, що ряд (4.1.4) збігається рівномірно на колі γ_{R_1} . Він залищиться рівномірно збіжним на γ_{R_1} після домноження на функцію $f(\xi)$ внаслідок її обмеженності на цьому колі. Тому, підставляючи розвинення (4.1.4) в інтеграл I_1 , інтегруючи ряд почленно, і застосовуючи наслідок 3.3.2 з теореми Коши для гомотопгих кривих, будемо мати

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_1}} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Тепер подамо ядро $-\frac{1}{\xi-z}$ інтегралу I_2 у вигляді

$$-\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(z-a)-(\xi-a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{\xi-a}{z-a}\right)}. \quad (4.1.6)$$

Зазначимо, що дріб $w := \frac{\xi-a}{z-a}$ задовольняє умову $|w| = \frac{r_1}{|z-a|} < 1$ для точок $\xi \in \gamma_{r_1}$ внаслідок вибору числа r_1 . Тому, застосовуючи в (4.1.6) формулу суми нескінченної геометричної прогресії і роблячи в сумі заміну змінних $(n+1 \rightarrow -n)$, отримаємо

$$-\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(z-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}. \quad (4.1.7)$$

Зазначимо, що ряд (4.1.7) збігається рівномірно на колі γ_{r_1} . Він залищиться рівномірно збіжним на γ_{r_1} після домноження на функцію $f(\xi)$ внаслідок її обмеженності на цьому колі. Тому, підставляючи розвинення (4.1.7) в інтеграл

I_2 , інтегруючи ряд почленно, і застосовуючи наслідок 3.3.2 з теореми Коші для гомотопгих кривих, будемо мати

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} f(\xi) \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Для завершення доведення теореми підставимо отримані в (4.1.5) і (4.1.8) представлення для інтегралів I_1 і I_2 в формулу (4.1.2).

Теорема доведена.

Означення 4.1.1 Ряди виду (4.1.1) називаються рядами Лорана.

Приклад 1. Розгорнемо функцію $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ в ряд Лорана у кільці $\{z : 1 < |z-1| < 2\}$.

З'ясуємо можливість подання рядом Лорана функції f у заданому кільці. Зауважимо, що нулі знаменника, точки 2 і 3, знаходяться на межевих колах даного кільця. Отже, функція f є аналітичною в самому кільці і тому за теоремою Лорана її можна розгорнути в цьому кільці в ряд Лорана.

Спочатку подамо дану раціональну функцію у вигляді суми найпростіших дробів. Для довільної раціональної функції сама можливість і вид такого подання будуть отримані пізніше (теорема 4.2.12 і зауваження 3 до неї). Для даної функції f таке подання, очевидно, має вид

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}. \quad (4.1.9)$$

Далі розгорнемо кожний з найпростіших дробів у ряд Лорана, збіжний у даному кільці. Ця операція по суті є фрагментом доведення теореми Лорана. Для дробу $\frac{1}{z-3}$ вона виглядає наступним чином.

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = \frac{1}{-2\left(1-\frac{z-1}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

У цьому перетворенні була застосована формула суми нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $w = \frac{z-1}{2}$. Тому отриманий ряд збігається там, де $|w| < 1$, тобто в кругі $|z-1| < 2$.

Для дробу $\frac{1}{z-2}$ розгортання в ряд Лорана, збіжний у даному кільці, виглядає інакше.

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{(z-1)\left(1-\frac{1}{z-1}\right)} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}.$$

У цьому перетворенні була застосована формула суми нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $w = \frac{1}{z-1}$. Тому отриманий ряд збігається там, де $|w| < 1$, тобто у зовнішності $|z - 1| > 1$ меншого межевого кола даного кільця.

Для завершення розгортання функції f в ряд Лорана у заданому кільці $\{z : 1 < |z - 1| < 2\}$ залишилось підставити отримані подання найпростіших дробів у формулу (4.1.9).

Для вивчення основних властивостей рядів Лорана нам знадобиться наступна теорема, яка є узагальненням теореми 2.4.1 про диференційовність суми степеневого ряду.

Теорема 4.1.2 (Вейерштрас). Якщо функції $f_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, аналітичні в області $G \subset \mathbf{C}$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ збігається рівномірно на кожній компактній підмноожині області G , то

- 1) сума ряду $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ є функцією аналітичною в області G ;
- 2) цей ряд можна почленно диференціювати в області G будь-яку кількість разів, тобто $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ для будь-якого $z \in G$ і $k \in \mathbf{N}$.

Доведення. Доведемо спочатку перше твердження теореми.

Зафіксуємо довільну точку $z_0 \in G$ і побудуємо такий окіл $B := B(z_0, r)$ цієї точки, що $\overline{B} \subset G$. Оскільки замикання околу \overline{B} є компактною множиною, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ збігається в \overline{B} рівномірно за умовою теореми, причому функції функції $f_n(z)$ є неперервними. Тому за відомою з курсу математичного аналізу теоремою, сума $f(z)$ цього ряду неперервна в замкнутому околі \overline{B} . Нехай γ – довільна замкнута спрямлювана крива, що міститься в околі B . Оскільки крива γ є компактною множиною, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ збігається на ній рівномірно за умовою теореми. Тому, інтегруючи почленно цей ряд і застосовуючи інтегральну теорему Коші до аналітичних в області G функцій $f_n(z)$, отримаємо

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0.$$

Таким чином, виконуються всі умови теореми 3.6.4 Морера і за цією теоремою функція $f(z)$ є аналітичною в околі B довільної фіксованої точки області G , тобто, вона є аналітичною в області G .

Доведемо друге твердження теореми. Знову зафіксуємо довільну точку $z_0 \in G$ і побудуємо такий окіл $B := B(z_0, r)$ цієї точки, що $\overline{B} \subset G$. Нехай γ_r – межеве коло цього околу B . Зафіксуємо також довільне $k \in \mathbf{N}$. За

інтегральною формулою Коші для похідних

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Оскільки коло γ_r є компактною множиною, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ збігається рівномірно на γ_r за умовою теореми. Тоді і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ також збігається рівномірно на γ_r внаслідок того, що $|z - z_0| = r$ на цьому колі. Тому інтегруючи почленно цей ряд і знову застосовуючи інтегральну формулу Коші для похідних продовжимо попередню рівність наступним чином

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0).$$

Теорема доведена.

Зауваження. Поклавши в теоремі Вейерштраса $f_n(z) = c_n(z - z_0)^n$, отримаємо теорему 2.4.1 про диференційовність суми степеневого ряду.

Основні властивості рядів Лорана.

Будь-який ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$, де a —скінчена точка комплексної площини, можна представити у вигляді суми двох рядів:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - a)^n. \quad (4.1.10)$$

Перший з них є звичайним степеневим рядом. За теоремою Абеля його сума є функцією аналітичною в кругі збіжності цього ряду. Тому перший ряд називається правильною частиною ряду Лорана. Другий ряд в (4.1.10) називається головною частиною ряду Лорана.

Властивість 1. Ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$ збігається в деякому кільці $\{z : r < |z - a| < R\}$.

Доведення. Перший ряд в (4.1.10) за теоремою Абеля збігається у кругі $|z - a| < R$, радіус R якого можна знайти за формулою Коші $R = L^{-1}$, де $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

Другий ряд в (4.1.10) після заміни змінних $w = (z - a)^{-1}$ теж стає степеневим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$. За тією ж теоремою Абеля він збігається у кругі $|w| < R_1$, радіус R_1 якого можна знайти за формулою Коші $R_1 = L_1^{-1}$,

де $L_1 = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$. Тому другий ряд в (4.1.10) збігається на множині $\{z : |z - a| > r\}$, де $r = R_1^{-1}$.

Таким чином, ряд Лорана збігається у кільці $\{z : r < |z - a| < R\}$.

Властивість 2. Ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині кільця збіжності $\{z : r < |z - a| < R\}$.

Доведення. Якщо K —довільна компактна підмножина кільця збіжності $\{z : r < |z - a| < R\}$, то існують такі r_0 і R_0 , $r < r_0 < R_0 < R$, що $K \subset \{z : r_0 \leq |z - a| \leq R_0\}$. За теоремою 2.1.2 Абеля перший ряд в (4.1.10) збігається рівномірно в кругу $\{z : |z - a| \leq R_0\}$.

При доведенні властивості 1 встановлено, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$, в який переворюється другий ряд в (4.1.10) після заміни $w = (z-a)^{-1}$, збігається в кругу $\{w : |w| < R_1\}$, де $R_1 = \frac{1}{r}$. Більше того, за тією ж теоремою 2.1.2 Абеля він збігається рівномірно в кругу $\{w : |w| \leq \frac{1}{r_0}\}$ оскільки $\frac{1}{r_0} < \frac{1}{r} = R_1$. Іншими словами, другий ряд в (4.1.10) збігається рівномірно на множині $\{z : |z-a| \geq r_0\}$.

Отже, ряд Лорана збігається рівномірно в кільці $\{z : r_0 \leq |z - a| \leq R_0\}$ і, зокрема, на множині K .

Прямим наслідком властивості 2 і теореми 4.1.2 Вейерштраса є наступна властивість.

Властивість 3. Сума ряду Лорана $s(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$ є функцією аналітичною в кільці збіжності $\{z : r < |z - a| < R\}$ цього ряду.

Властивість 4. Для аналітичної в кільці $\{z : r < |z - a| < R\}$ функції $f(z)$ існує єдине у цьому кільці представлення виду

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n. \quad (4.1.11)$$

Доведення. Існування подання виду (4.1.11) для функції $f(z)$, аналітичної в кільці $\{z : r < |z - a| < R\}$, гарантовано теоремою Лорана. Доведемо його єдиність. Для цього покажемо, що в будь-якому представленні виду (4.1.11) коефіцієнти c_n такі ж самі, як у формулі (4.1.1).

Нехай $\rho \in (r, R)$ і $\gamma_\rho := \{z : |z - a| = \rho\}$. Зафіксуємо довільне ціле k і домножимо ліву і праву частини рівності (4.1.11) на $(z - a)^{-k-1}$, а потім проінтегруємо отриману рівність уздовж кола γ_ρ . За властивістю 2 ряд (4.1.11) збігається рівномірно на колі γ_ρ . Він залишиться рівномірно збіжним і після

домноження на $(z - a)^{-k-1}$ оскільки $|z - a| = \rho$ для точок $z \in \gamma_\rho$. Тому, інтегруючи цей ряд почленно і враховуючи приклад 1 з розділу 3.1, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz &= \int_{\gamma_\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^{n-k-1} dz = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma_r} (z - a)^{n-k-1} dz = c_k \cdot 2\pi i. \end{aligned}$$

Звідси для коефіцієнтів c_k отримуємо формулу (4.1.1).

Властивість 5 (Нерівність Коші для коефіцієнтів ряду Лорана). Якщо функція f аналітична в кільці $\{z : r < |z - a| < R\}$, то для коефіцієнтів c_n її ряду Лорана в цьому кільці виконується нерівність

$$|c_n| \leq \frac{\max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)|}{\rho^n},$$

$\partial e \gamma_\rho = \{z : |z - a| = \rho\}$, $r < \rho < R$.

Доведення. Нехай $M_\rho := \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)|$. Застосовуючи формулу (4.1.1) для коефіцієнтів c_n і враховуючи, що $|\xi - a| = \rho$ для $\xi \in \gamma_\rho$, будемо мати

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M_\rho}{\rho^{n+1}} \int_{\gamma_\rho} |d\xi| = \frac{M_\rho}{2\pi \rho^{n+1}} \cdot 2\pi \rho = \frac{M_\rho}{\rho^n}.$$

Ряд Лорана в проколотому околі нескінченості.

Ряд Лорана в проколотому околі $\{z : r < |z| < \infty\}$ нескінченості має вид $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Його можна представити сумою двох рядів:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \quad (4.1.12)$$

Сума першого ряду за означенням 3.6.2 є функцією аналітичною в нескінченості. Тому перший ряд називається правильною частиною ряду Лорана в околі нескінченості. Другий ряд в (4.1.12) називається головною частиною ряду Лорана в проколотому околі нескінченості.

4.2 Ізольовані особливі точки аналітичних функцій

Означення 4.2.1 Точка $a \in \overline{\mathbf{C}}$ називається ізольованою особливою точкою функції f , якщо існує проколотий окіл цієї точки, в якому функція f є аналітичною.

Зауважимо, що проколоті околи як скінченної точки $\{z : 0 < |z - a| < R\}$, так і нескінченності $\{z : r < |z| < \infty\}$ є частинними випадками кільця. Тому за теоремою Лорана функцію f в проколотому околі ізольованої особливої точки a можна розгорнути у збіжний ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ (для скінченної точки) або $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ (в проколотому околі нескінченності). Як зазначалося раніше, цей ряд можна представити сумаю двох рядів, а саме

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n \quad (4.2.1)$$

для скінченної точки a і

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad (4.2.2)$$

для нескінченності. Сума першого ряду в кожному з цих представлень є функцією аналітичною (за теоремою Абеля для скінченної точки або за означенням – для нескінченності). Тому перший ряд в кожному з представлень називається правильною частиною ряду Лорана.

Таким чином, характер особливості функції f в її ізольованій особливій точці цілком визначається другим рядом в представленнях (4.2.1) і (4.2.2). Тому другий ряд в цих представленнях називається головною частиною ряду Лорана функції f в проколотому околі ізольованої особливої точки.

Означення 4.2.2 Нехай $\Gamma_a(f)$ – головна частина ряду Лорана функції f в проколотому околі ізольованої особливої точки a , $a \in \overline{\mathbf{C}}$.

- 1) Точка a називається **усувною**, якщо $\Gamma_a(f) = 0$;
- 2) точка a називається **полюсом**, якщо $\Gamma_a(f)$ скінчена;
- 3) точка a називається **істотно особливою**, якщо $\Gamma_a(f)$ нескінчена.

Приклад 1. З'ясувати характер особливості у точках 0 і ∞ наступних функцій $f_1(z) = \frac{\sin z}{z}$, $f_2(z) = \frac{\cos z}{z}$, $f_3(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $f_4(z) = z^2 + e^{\frac{1}{z}}$.

Скориставшись означеннями 2.2.1 функцій $\sin z$, $\cos z$, e^z , отримаємо

$$f_1(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots, \quad f_2(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \dots,$$

$$f_3(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots, \quad f_4(z) = z^2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Всі ряди збігаються в кільці $0 < |z| < \infty$. Отже, вони представляють відповідні функції в проколотих околах як нуля, так і нескінченності. З цих представлень маємо $\Gamma_0(f_1) = 0$, $\Gamma_0(f_2) = \frac{1}{z}$, $\Gamma_0(f_3) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$, $\Gamma_0(f_4) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$

Таким чином, в точці 0 функція f_1 має усувну точку, функція f_2 – полюс, функції f_3 і f_4 – істотно особливу точку.

З цих же представлень маємо $\Gamma_\infty(f_1) = -\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$, $\Gamma_\infty(f_2) = -\frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \dots$, $\Gamma_\infty(f_3) = 0$, $\Gamma_\infty(f_4) = z^2$.

Таким чином, в точці ∞ функція f_1 і f_2 мають істотно особливу точку, функція f_3 – усувну точку, функція f_4 – полюс.

Зауваження 1. Наведена класифікація особливих точок стосується виключно ізольованих особливих точок. Існують більш складні особливі точки, які не підлягають наведеній класифікації.

Приклад 2. Функція $f(z) = (\sin \frac{1}{z})^{-1}$ має в точці 0 неізольовану особливу точку, оскільки вона має послідовність особливих точок $z_k = \frac{1}{\pi k}$, причому $z_k \rightarrow 0$.

Наголосимо, що існує інша можливість з'ясування характеру ізольованої особливої точки даної функції окрім розвинення цієї функції в ряд Лорана. Ця можливість виражена наступними теоремами, які дають критерії характеру ізольованої особливої точки.

Теорема 4.2.1 *Ізольована особлива точка $a \in \overline{\mathbf{C}}$ функції f є усувною, якщо і тільки якщо існує*

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) \neq \infty.$$

Теорема 4.2.2 *Ізольована особлива точка $a \in \overline{\mathbf{C}}$ функції f є полюсом, якщо і тільки якщо*

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

Теорема 4.2.3 *Ізольована особлива точка $a \in \overline{\mathbf{C}}$ функції f є істотно особливою, якщо і тільки якщо не існує граници*

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z).$$

Зауважимо, що теорема 4.2.3 одразу випливає з теорем 4.2.1 і 4.2.2. Ці дві теореми разом з іншими характеристикаціями типу ізольованих особливих точок будуть доведені нижче.

Усувна точка.

Доведення теореми 4.2.1. Доведемо теорему для скінченої точки a . Для $a = \infty$ доведення проводиться аналогічно.

Нехай точки a є усуальною. За означенням ряд Лорана функції f в проколотому околі усуальної точки a має вид $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Тоді $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$.

Припустимо тепер, що існує скінчена границя $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$. Тоді функція f обмежена в деякому проколотому околі $0 < |z-a| < R$ точки a , тобто існує таке $M > 0$, що $|f(z)| \leq M$ для всіх z з цього околу. Тому з нерівності Коші для коефіцієнтів c_n ряду Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ функції f (див. властивість 5) у цьому проколотому околі маємо оцінку $|c_n| \leq M\rho^{-n}$, де $\rho \in (0, R)$. Переходячи в цій нерівності для $n < 0$ до границі при $\rho \rightarrow 0$, отримаємо $|c_n| \leq 0$, тобто, $c_n = 0$ для $n < 0$. Таким чином, ряд Лорана функції f у цьому проколотому околі має вид $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Це означає, що $\Gamma_a(f) = 0$. Таким чином, точка a є усуальною для функції f .

Теорема доведена.

Зазначимо, що при доведенні достатньості умови теореми, з факту існування скінченої границі $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ було використано лише обмеженість функції. Таким чином, має місце такий наслідок з теореми 4.2.1.

Наслідок 4.2.4 *Ізольована особлива точка $a \in \overline{\mathbf{C}}$ функції f є усуальною, якщо і тільки якщо функція f є обмеженою в деякому проколотому околі точки a .*

Приклад 3. З'ясувати характер особливості у точці 0 наступних функцій: $f_1(z) = \frac{\sin z}{e^z - 1}$, $f_2(z) = 2 \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}$, та функції $f_3(z) = \frac{z^8 e^{\frac{1}{z}}}{(z^4 + 1)^2}$ у точці ∞ .

Легко перевірити, що

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_1(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f_2(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f_3(z) = 1.$$

Отже, обидві точки: 0 (для функцій f_1 і f_2) і ∞ (для функції f_3) є усувними.

Зауваження 2. Якщо точки $a \in \mathbf{C}$ є усуальною для функції f , то за означенням ряд Лорана цієї функції в деякому проколотому околі $0 < |z-a| < R$ має вид $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. З іншого боку, функція $s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ визначена у всьому околі $|z-a| < R$ і є в цьому околі функцією аналітичною. Таким чином, якщо функцію $f(z)$ довизначити в точці a , поклавши $f(a) := \lim_{z \rightarrow a} f(z) = s(a)$, то особливість функції f в точці a буде усунута і вона стане аналітичною в цій точці.

Цим пояснюється походження назви усуальної точки.

Зауваження стосується також і усуальної точки ∞ .

Приклад 4. Функція $f(z) := \frac{\sin z}{z}$ не визначена в точці 0 і має усуальну особливість в цій точці. Але після довизначення за формулою $f(0) = 1$, вона стає аналітичною у точці 0.

Полюс.

Означення 4.2.3 (порядку полюса). Функція f має в точці $a \in \overline{\mathbf{C}}$ полюс порядку m , якщо її ряд Лорана в проколотому околі цієї точки має вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_{-m} \neq 0,$$

у випадку скінченної точки a , або

$$f(z) = c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n, \quad c_m \neq 0,$$

у випадку $a = \infty$.

Іншими словами, порядок полюсу функції f в точці a – це номер старшого члену головної частини ряду Лорана функції f в проколотому околі точки a .

Полюс першого порядку називають ще простим полюсом

Приклад 5. Якщо $c \neq 0$, то кожна з функцій $f(z) = \frac{c}{z^{100}}$ (в точці 0) і $g(z) = cz^{100}$ (в точці ∞) мають полюс сотового порядку.

Наступна теорема містить критерій порядку полюса. За допомогою цієї теореми також буде отримано доведення теореми 4.2.2.

Теорема 4.2.5 Точка $a \neq \infty$ є полюсом порядку m для функції f тоді і тільки тоді, коли в деякому проколотому околі цієї точки функція f допускає подання виду

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}, \quad (4.2.3)$$

де $h(z)$ – аналітична в точці a функція, причому $h(a) \neq 0$.

Точка ∞ є полюсом порядку m для функції f тоді і тільки тоді, коли в деякому проколотому околі нескінченості функція f допускає подання виду

$$f(z) = z^m \cdot \varphi(z),$$

де $\varphi(z)$ – аналітична в точці ∞ функція, причому $\varphi(\infty) \neq 0$.

Доведення. Доведемо теорему для скінченної точки a . Для $a = \infty$ доведення проводиться аналогічно.

Нехай функція f має в точці a полюс порядку m . Тоді з означення 4.2.3 маємо

$$f(z)(z-a)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + c_{-m+2}(z-a)^2 + \dots, \quad (4.2.4)$$

де $c_{-m} \neq 0$. Позначимо через $h(z)$ суму степеневого ряду в правій частині рівності (4.2.4). Ця функція $h(z)$ за теоремою 2.4.1 про диференційовність суми степеневого ряду є аналітичною в точці a , причому $h(a) = c_{-m} \neq 0$. Тому з (4.2.4) отримуємо необхідне подання (4.2.3).

Нехай тепер для функції f в деякому проколотому околі точки a має місце подання (4.2.3). Користуючись теоремою 3.5.1 Тейлора, представимо аналітичну функцію $h(z)$ в цьому поданні збіжним в деякому околі точки a степеневим рядом:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} (b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots) = \\ = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \frac{b_2}{(z-a)^{m-2}} + \dots + b_m + \sum_{k=1}^{\infty} b_{m+k}(z-a)^k,$$

де $b_0 = h(a) \neq 0$.

Отримане подання функції f рядом Лорана в проколотому околі точки a має такий вид, який за означенням 4.2.3 свідчить про те, що точка a є полюсом порядку m для функції f .

Порівнюючи теорему 4.2.5 з твердженням 3.7.1 і наслідком з нього, які дають критерій порядку нуля, отримуємо наступні наслідки.

Наслідок 4.2.6 *Ізольована особлива точка a , $a \in \overline{\mathbf{C}}$, функції $f(z)$ є полюсом порядку m цієї функції тоді і тільки тоді, коли вона є нулем порядку m для функції $\frac{1}{f(z)}$.*

Наслідок 4.2.7 *Ізольована особлива точка a , $a \neq \infty$, функції $f(z)$ є полюсом порядку m цієї функції тоді і тільки тоді, коли виконується асимптотична рівність*

$$f(z) \sim C(z-a)^{-m}, \quad z \rightarrow a, \quad C \neq 0.$$

Ізольована особлива точка ∞ функції $f(z)$ є полюсом порядку m цієї функції тоді і тільки тоді, коли виконується асимптотична рівність

$$f(z) \sim Cz^m, \quad z \rightarrow \infty, \quad C \neq 0.$$

Взаємозв'язок між полюсами і нулями, виражений наслідком 4.2.6, дає змогу розглядати полюси порядку m як нулі від'ємного порядку $-m$. Така термінологічна угода дає можливість сформулювати ще один корисний наслідок.

Наслідок 4.2.8 *Нехай $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$. Якщо в точці a , $a \in \overline{\mathbf{C}}$, функція $f_1(z)$ має нуль порядку k_1 , а функція $f_2(z)$ — нуль порядку k_2 , то функція $f(z)$ має в цій точці нуль порядку $k_1 - k_2$.*

При цьому, якщо $k_1 > k_2$, то це — звичайний нуль порядку $k_1 - k_2$, якщо ж $k_1 < k_2$, то це нуль від'ємного порядку, тобто, полюс порядку $k_2 - k_1$. Якщо, нарешті, $k_1 = k_2$, то точка a є усуальною.

Приклад 6. З'ясувати характер особливості функцій: $f_1(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ (у точці 0), $f_2(z) = \frac{\sin(z+i)}{(z^2+1)^2}$ (у точці $-i$), $f_3(z) = \frac{1}{\sin^2 \frac{z}{z}}$ (у точці ∞).

Оскільки $e^z - 1 \sim z$ при $z \rightarrow 0$, то $f_1(z) \sim \frac{1}{z}$ при $z \rightarrow 0$. Тому за наслідком 4.2.7 функція $f_1(z)$ має у точці 0 простий полюс, тобто, полюс першого порядку.

Зазначимо далі, що $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$. Оскільки $\frac{\sin(z+i)}{z+i} \sim 1$ при $z \rightarrow -i$, то $f_2(z) \sim -\frac{1}{4(z+i)}$ і за наслідком 4.2.7 функція $f_2(z)$ має у точці $-i$ простий полюс.

Враховуючи, що $\sin \frac{1}{z} \sim \frac{1}{z}$ при $z \rightarrow \infty$, маємо $f_3(z) \sim z^2$ при $z \rightarrow \infty$. Отже, функція $f_3(z)$ має у точці ∞ полюс другого порядку за наслідком 4.2.7.

Приклад 7. З'ясувати характер особливості функції $f(z) = \frac{(1-\cos z)^2}{(e^z-1)^5}$ у точці 0.

Легко перевірити, що $1 - \cos z \sim \frac{z^2}{2}$, а $e^z - 1 \sim z$ при $z \rightarrow 0$. Тому за твердженням 3.7.1 функція $(1 - \cos z)^2$ має нуль четвертого порядку, а функція $(e^z - 1)^5$ — нуль п'ятого порядку у точці 0. Таким чином, за наслідком 4.2.8 функція $f(z)$ має у точці 0 простий полюс, тобто, полюс першого порядку.

Доведення теореми 4.2.2. Доведемо теорему для скінченної точки a . Для $a = \infty$ доведення проводиться аналогічно.

Нехай точка a є полюсом функції f . Тоді за теоремою 4.2.5 для функції f має місце подання (4.2.3). З цього подання одразу отримуємо $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

Нехай тепер для ізольованої особливої точки a функції f має місце рівність $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Тоді $|f(z)| > 1$ в деякому проколотому околі $0 < |z - a| < R$ цієї точки. Зменшуючи при необхідності R можна вважати, що f є аналітичною в цьому околі. Тоді і функція $\varphi(z) := \frac{1}{f(z)}$ аналітична в ньому, причому $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0$, тобто, точка a є усувною для функції $\varphi(z)$. Після довизначення $\varphi(a) := 0$, функція φ стане аналітичною в точці a і матиме там нуль. Якщо m — порядок цього нуля, то за наслідком 4.2.6 функція f має в точці a полюс порядку m .

Теорема доведена.

Істотно особлива точка.

Як вже зазначалося, простим наслідком теорем 4.2.1 і 4.2.2 є теорема 4.2.3. За цією теоремою ізольована особлива точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функції f є істотно особливою, якщо і тільки якщо не існує границі $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Приклад 8. Покажемо, що функція $f(z) = e^{\operatorname{tg} z}$ має істотну особливість в точці $\frac{\pi}{2}$. Дійсно, розглянемо дві послідовності $z_n^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}$, $z_n^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$. Ясно, що $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^2 = \frac{\pi}{2}$, але $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^1) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^2) = \infty$. Таким чином, не існує границі $\lim_{z \rightarrow \pi/2} f(z)$, тобто, точка $\frac{\pi}{2}$ є істотно особливою для функції $f(z)$ згідно з теоремою 4.2.3.

Набагато детальнішу характеристику поведінки функції в проколотому околі істотно особливої точки дає наступна теорема.

Теорема 4.2.9 (Сохоцький-Вейерштрас). Якщо $a, a \in \overline{\mathbf{C}}$, є істотно особливою точкою функції f , то для будь-якого $K \in \overline{\mathbf{C}}$ існує така послідовність точок $z_n, z_n \rightarrow a$, що $f(z_n) \rightarrow K$.

Доведення. Доведемо спочатку теорему для $K = \infty$. За наслідком 4.2.4 з критерія усувної точки функція f необмежена в будь-якому проколотому околі точки a . Отже, існує така послідовність $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}, z_n \rightarrow a$, що $f(z_n) \rightarrow \infty$.

Нехай тепер $K \neq \infty$. Назвемо K -точкою функції f будь-який розв'язок рівняння $f(z) = K$. Якщо a є граничною точкою для K -точок, теорема очевидна. Припустимо, що це не так, тобто, існує проколотий окіл точки a , в якому немає K -точок. В цьому проколотому околі функція $\varphi := \frac{1}{f-K}$ є аналітичною. Тоді з рівності $f = K + \frac{1}{\varphi}$ випливає, що не існує границі $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z)$, оскільки не існує $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$. Отже, точка a є істотно особливою для функції φ . Оскільки теорема вже доведена для $K = \infty$, існує така послідовність точок $z_n, z_n \rightarrow a$, що $\varphi(z_n) \rightarrow \infty$. Тоді з рівності $f = K + \frac{1}{\varphi}$ отримуємо, що $f(z_n) \rightarrow K$.

Теорема доведена.

Наступна теорема є узагальненням теореми Сохоцького-Вейерштраса.

Теорема 4.2.10 (Пікар). У будь-якому околі істотно особливої точки функція приймає, причому безліч разів, будь-яке значення $K \in \overline{\mathbf{C}}$, окрім хіба що одного.

Означення 4.2.4 Це значення, яке функція може не приймати в проколотому околі істотно особливої точки називається винятковим пікаровським значенням.

Теорема Пікара не входить до університетського курсу комплексного аналізу. Тому обмежимося прикладом, що ілюструє теорему.

Приклад 9. Перевірити теорему Пікара для функції e^z .

Зафіксуємо будь-яке $K \in \mathbf{C}$ і розв'яжемо рівняння $e^z = K$. Ці розв'язки даються формулою 2.2.4, а саме, $z_n = \ln K = \ln |K| + i(\arg K + 2n\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$. Ясно, що $z_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \pm\infty$. Тому функція e^z приймає значення K , причому безліч разів, в будь-якому околі нескінченості.

Цілі і мероморфні функції.

Нагадаємо, що цілою називається функція, аналітична у всій комплексній площині. Отже, ціла функція може мати особливу точку лише в нескінченості. Ця особливість може бути усувною, полюсом або істотно особливою.

1) Якщо ціла функція f має в нескінченості усувну особливість, то вона за наслідком 4.2.4 з критерія усувної точки є обмеженою в деякому проколотому околі $\{z : r < |z| < \infty\}$ нескінченості. Вона також обмежена на компактній

множині $\{z : |z| \leq r\}$ як неперервна функція. Таким чином, ціла функція f обмежена у всій комплексній площині. Тому за теоремою Ліувіля (наслідок 3.5.3 з теореми Тейлора) функція f є константою.

2) Нехай ціла функція f має в нескінченості полюс порядку m . За означенням 4.2.3 головна частина $\Gamma_\infty(f)$ її ряду Лорана у нескінченості має вид $\Gamma_\infty(f)(z) = c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + c_0$, де $c_m \neq 0$. Тоді у цілої функції $\psi := f - \Gamma_\infty(f)$ головна частина ряду Лорана у нескінченості дорівнює нулю. Отже, функція ψ має усувну особливість у нескінченості і за пунктом 1) є константою. Тоді функція $f = \psi + \Gamma_\infty(f)$ є многочленом степені m .

3) Прикладами цілих функцій, які у нескінченості мають істотну особливість є функції e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$.

Означення 4.2.5 Ціла функція, яка у нескінченості має істотну особливість, називається цілою трансцендентною.

Будь-яка ціла трансцендента функція f необмежена і не має границі $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Означення 4.2.6 Функція, яка не має у всій комплексній площині \mathbf{C} інших особливих точок, окрім полюсів, називається мероморфною.

Прикладами мероморфних функцій є раціональні функції $\frac{P_n(z)}{P_m(z)}$ (тобто, частка двох многочленів), $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$.

Твердження 4.2.11 Мероморфна функція має не більш ніж зліченну множину полюсів.

Доведення. Через P позначимо множину полюсів довільної фіксованої мероморфної функції. Оскільки об'єднання зліченного числа скінчених множин є не більш ніж зліченною множиною, то досить довести, що кожна з множин $P_n := P \cap \{z : |z| \leq n\}$, $n \in \mathbf{N}$, скінчена.

Доведемо, що кожна з множин P_n скінчена. Припустимо, що одна з цих множин P_n нескінчена, тобто, існує послідовність попарно різних полюсів $z_k \in P_n$. Оскільки множина $\{z : |z| \leq n\}$ є компактною, з цієї послідовності можна виділити підпослідовність, збіжну до деякої точки a , $|a| \leq n$. Це означає, що точка a є неізольованою особливою точкою фіксованої мероморфної функції, що суперечить означенню цього класу функцій.

Теорема 4.2.12 Мероморфна функція, яка не має у розширеній комплексній площині $\overline{\mathbf{C}}$ інших особливих точок, окрім полюсів, є раціональною.

Доведення. Зауважимо, що множина полюсів мероморфної функції f за умов теореми скінчена. Дійсно, припустимо, що існує послідовність попарно різних полюсів даної функції. Оскільки множина $\overline{\mathbf{C}}$ є компактною, з цієї послідовності можна виділити підпослідовність, збіжну до деякої точки $a \in \overline{\mathbf{C}}$. Це означає, що точка a є неізольованою особливою точкою функції f , що суперечить умові теореми.

Отже, функція f може мати лише скінченну множину полюсів $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ і, можливо, ще полюс у нескінченості. Нехай, g_k – головна

частина ряду Лорана функції f у проколотому околі точки a_k , $k = 1, \dots, n$, а g — головна частина ряду Лорана функції f у проколотому околі нескінченості. За означенням 4.2.2 ці функції мають наступний вид:

$$g_k(z) = \frac{c_{-m_k}^k}{(z - a_k)^{m_k}} + \frac{c_{-m_k+1}^k}{(z - a_k)^{m_k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}^k}{(z - a_k)},$$

$$g(z) = c_l z^l + c_{l-i} z^{l-1} + \dots + c_1 z.$$

Отже, функція $\varphi(z) := f(z) - g(z) - \sum_{k=1}^n g_k(z)$ є аналітичною у розширеній комплексній площині. Іншими словами, вона є обмеженою цілою функцією. За теоремою Ліувіля $\varphi(z)$ є константою. Позначивши цю константу символом c_0 , отримаємо для функції f наступне подання:

$$f(z) = c_l z^l + c_{l-i} z^{l-1} + \dots + c_1 z + c_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} \frac{c_{-i}^k}{(z - a_k)^i}, \quad (4.2.5)$$

тобто, функція f є раціональною.

Зауваження 3. Рівність (4.2.5) є поданням раціональної функції $f = \frac{P}{Q}$, де P і Q — многочлени, сумаю її цілої частини $c_l z^l + c_{l-i} z^{l-1} + \dots + c_1 z + c_0$ і найпростіших дробів $\frac{c_{-i}^k}{(z - a_k)^i}$, $i = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, n$, де a_k — нулі знаменника Q , а m_k — їх кратності.

4.3 Лишки

Поняття лишка було введено французьким математиком Коші як інструмент для обчислення інтегралів.

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в замкненій області $\bar{G} \subset \mathbf{C}$ за винятком точок $a_1, \dots, a_n \in G$. Побудуємо кола $\gamma_{r_i} := \{z : |z - a_i| = r_i\}$, що містяться в області G і попарно не перетинаються між собою. Розглянемо багатозв'язну область \tilde{G} з межею $\partial\tilde{G} = \partial G \cup \gamma_{r_1}^- \dots \cup \gamma_{r_n}^-$. Оскільки функція $f(z)$ є аналітичною в замиканні області \tilde{G} , за теоремою 3.3.3 (Коші для багатозв'язної області)

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_{r_i}^-} f(z) dz. \quad (4.3.1)$$

Зауважимо, що за наслідком 3.3.2 з теореми 3.3.1 (Коші для гомотопних кривих) інтеграли в правій частині рівності (4.3.1) належать від радіусів r_i кіл γ_{r_i} . Таким чином, кожний з цих інтегралів залежить лише від характеру особливості функції в точці a_i . Тому природним є наступне означення.

Означення 4.3.1 Лишком $\text{res}_{z=a} f(z)$ функції $f(z)$ в її ізольованій особливій точці a називається величина

$$\text{res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z) dz,$$

де $\gamma_r := \{z : |z - a| = r\}$ – коло достатньо малого радіуса.

Як показав Коші існують різноманітні способи обчислення лишків, які не потребують обчислення інтегралу в означенні 4.3.1. Тоді цей інтеграл з означення 4.3.1 можна обчислити за допомогою лишка. Способи обчислення лишків будуть розглянуті далі. За допомогою означення лишка теорему Коші для багатозв'язної області (зокрема, рівність (4.3.1)) можна представити наступним чином.

Теорема 4.3.1 (теорема Коші про лишки). Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в замкненій області $\overline{G} \subset \mathbf{C}$ за винятком скінченного числа точок $a_1, \dots, a_n \in G$, то

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_i \in G} \text{res}_{z=a_i} f(z). \quad (4.3.2)$$

Зміст теореми Коші про лишки полягає в тому, що вона обчислення глобальної характеристики, криволінійного інтегралу уздовж межі області, зводить до обчислення локальних характеристик, а саме, лишків у скінченному числі ізольованих особливих точок, що містяться в області.

Способи обчислення лишків.

Наступна теорема дає універсальний спосіб обчислення лишків, незалежний від типу ізольованої особливої точки.

Теорема 4.3.2 Лишок функції f в ізольованій особливій точці $a \in \mathbf{C}$ дорівнює коефіцієнту c_{-1} ряду Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$ функції f (при $(z - a)^{-1}$) в проколотому околі точки a , тобто,

$$\text{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}.$$

Доведення. За означенням ізольованої особливої точки функція f аналітична в деякому проколотому околі $\{z : 0 < |z - a| < R\}$ цієї точки. Оберемо $r < R$. Тоді ряд Лорана функції f рівномірно збігається на колі $\gamma_r := \{z : |z - a| = r\}$ за властивістю 2 рядів Лорана. Тому його можна інтегрувати почленно уздовж цього кола. Проінтегрувавши рівність $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$ уздовж кола γ_r і врахувавши означення лишка і приклад 1 з розділу 3.1, отримаємо

$$\text{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma_r} (z-a)^n dz = c_{-1}.$$

Теорема доведена.

Враховуючи, що для усувної точки функції головна частина її ряду Лорана в проколотому околі цієї точки дорівнює нулю, а тому і $c_{-1} = 0$, з теореми 4.3.2 отримуємо

Наслідок 4.3.3 Якщо точка $a \in \mathbf{C}$ є усувною для функції f , то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0.$$

Приклад 1. Обчислити $\int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z^2} dz$, $\int_{\gamma_1} e^{\frac{1}{z}} dz$, $\int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z} dz$, де $\gamma_1 := \{z : |z| = 1\}$.

Зазначимо, що функція $\frac{\sin z}{z^2}$ аналітична в одиничному крузі $\{z : |z| \leq 1\}$ за винятком точки 0. Тому застосовуючи теореми 4.3.1 і 4.3.2, отримаємо

$$I_1 := \int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2} = 2\pi i \cdot c_{-1},$$

де c_{-1} – коефіцієнт при z^{-1} ряду Лорана

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots,$$

тобто, $c_{-1} = 1$. Отже, $I_1 = 2\pi i$.

Аналогічно, застосовуючи теореми 4.3.1 і 4.3.2 і розвинення функції $e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана $e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$, маємо $\int_{\gamma_1} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i$.

Застосовуючи теорему 4.3.1, наслідок 4.3.3 і враховуючи, що точка 0 для функції $\frac{\sin z}{z}$ є усувною за теоремою 4.2.1, оскільки $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, отримаємо

$$\int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 0.$$

Обчислення лишків в полюсах функції.

Твердження 4.3.4 Якщо точка $a \in \mathbf{C}$ є простим полюсом функції f , то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

Доведення. Якщо функція f має простий полюс в точці $a \in \mathbf{C}$, то за означенням 4.2.3 її ряд Лорана в проколотому околі цієї точки має вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_{-1} \neq 0.$$

Домножаючи обидві частини цієї рівності на $z - a$, переходячи до границі при $z \rightarrow a$ і застосовуючи теорему 4.3.3, отримуємо

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = c_{-1} = \operatorname{res}_{z=a} f(z).$$

Наслідок 4.3.5 *Нехай $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, причому функції f_1 і f_2 аналітичні в точці a , $f_1(a) \neq 0$, $f_2(a) = 0$, $f'_2(a) \neq 0$. Тоді*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{f_1(a)}{f'_2(a)}.$$

Доведення. В силу наслідку 4.2.8 за умов даного наслідку функція f має в точці a простий полюс. Тому за твердженням 4.3.4 маємо

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z)}{\frac{f_2(z) - f_2(a)}{z - a}} = \frac{f_1(a)}{f'_2(a)}.$$

Приклад 2. Обчислити $\int_{\gamma} \operatorname{ctg} z dz$, де $\gamma := \{z : |z - 2\pi| = 1\}$.

Зазначимо, що функція $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ в крузі $\{z : |z - 2\pi| \leq 1\}$ є аналітичною за винятком точки 2π . Крім того, функції $f_1(z) = \cos z$ і $f_2(z) = \sin z$ задовільняють в точці $a = 2\pi$ умови наслідка 4.3.5. Тому, застосовуючи теорему 4.3.1 (Коші про лишки) і наслідок 4.3.5, отримаємо

$$\int_{\gamma} \operatorname{ctg} z dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=2\pi} \frac{\cos z}{\sin z} = 2\pi i \left(\frac{\cos z}{\sin' z} \right)_{z=2\pi} = 2\pi i.$$

Твердження 4.3.6 Якщо точка $a \in \mathbf{C}$ є полюсом порядку m для функції f , то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)].$$

Доведення. Якщо функція f має полюс порядку m в точці $a \in \mathbf{C}$, то за означенням 4.2.3 її ряд Лорана в проколотому околі цієї точки має вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_{-m} \neq 0.$$

Після домноження цієї рівності на $(z-a)^m$, матимемо

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + \dots + c_{-1} (z-a)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+m}.$$

Продиференціювавши отриману рівність $m-1$ разів, отримаємо

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] = (m-1)! c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) \dots (n+1) c_n (z-a)^{n+1}.$$

Для завершення доведення твердження 4.3.6 залишилось перейти в останній рівності до границі про $z \rightarrow a$, поділити її на $(m - 1)!$ і врахувати, що $c_{-1} = \operatorname{res}_{z=a} f(z)$ за теоремою 4.3.2.

Наслідок 4.3.7 *Нехай $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$, причому функція h аналітична в точці a і $h(a) \neq 0$. Тоді*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{h^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

Доведення. В силу теореми 4.2.5 за умов даного наслідку функція f має в точці a полюс порядку m . Тому, застосовуючи твердження 4.3.6 і враховуючи неперервність похідної $h^{(m-1)}$ аналітичної функції, одразу отримуємо формулу наслідка 4.3.7.

Приклад 3. Обчислити $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z-\pi/2)^3} dz$, де $\gamma := \{z : |z - \frac{\pi}{2}| = 1\}$.

Зазначимо, що функція $\frac{\sin z}{(z-\pi/2)^3}$ в крузі $\{z : |z - \pi/2| \leq 1\}$ є аналітичною за винятком точки $\pi/2$, а функція $\sin z$ – аналітична скрізь, причому $\sin \pi/2 \neq 0$. Тому, застосовуючи теорему 4.3.1 (Коші про лишки) і наслідок 4.3.7, отримаємо

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^3} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=\pi/2} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^3} = 2\pi i \frac{(\sin'' z)_{z=\pi/2}}{2!} = -\pi i.$$

Лишок у нескінченості.

Означення 4.3.2 Лишком $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$ функції $f(z)$ в її ізольованій особливій точці ∞ називається величина

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^{-1}} f(z) dz,$$

де $\gamma_R := \{z : |z| = R\}$ – коло достатньо великого радіуса.

Зауваження 1. Наголосимо, що коло γ_R^{-1} є орієнтовною межею проколотого кола $\{z : R < |z| < \infty\}$ нескінченості. Це повністю відповідає означенню 4.3.1 лишка для скінченої точки, в якому відповідний інтеграл також береться уздовж орієнтовної межі проколотого кола, але скінченої точки.

За наслідком 3.3.2 з теореми 3.3.1 (Коші для гомотопних кривих) інтеграл в означенні 4.3.2 не залежить від радіусу R кола γ_R . Таким чином, цей інтеграл залежить лише від характеру особливості функції в точці ∞ .

Наступна теорема є аналогом теореми 4.3.2 для нескінченної ізольованої особливої точки.

Теорема 4.3.8 Лишок функції f в ізольованій особливій точці ∞ дорівнює коефіцієнту c_{-1} (зі знаком мінус) ряду Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ функції f (при z^{-1}) в проколотому околі нескінченості, тобто,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Доведення. За означенням ізольованої особливої точки ∞ функція f аналітична в деякому проколотому околі $\{z : r < |z| < \infty\}$ нескінченості. Оберемо $R > r$. Тоді ряд Лорана функції f рівномірно збігається на колі $\gamma_R := \{z : |z| = R\}$ за властивістю 2 рядів Лорана. Тому його можна інтегрувати почленно уздовж цього кола. Проінтегрувавши рівність $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ уздовж кола γ_R , врахувавши означення лишка в нескінченості і приклад 1 з розділу 3.1, отримаємо

$$\begin{aligned} -\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma_R} z^n dz = c_{-1}. \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Зауваження 2. За наслідком 4.3.3 для скінченої усувної точки a має місце рівність $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0$. Для нескінченої точки ця рівність не виконується.

Приклад 4. Дійсно, функція $f(z) = \frac{1}{z}$ має усувну особливість у нескінченості. Але за теоремою 4.3.8 $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -1$.

Таким чином, функція може мати ненульовий лишок у нескінченості навіть якщо нескінченість не є особливою точкою.

Наслідок 4.3.9 Якщо точка ∞ є нулем порядку m для функції f , то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \begin{cases} -c_{-1}, & \text{якщо } m = 1; \\ 0, & \text{якщо } m > 1. \end{cases}$$

Доведення. Якщо функція f має нуль порядку m в точці ∞ , то за означенням 3.7.1 вона в околі нескінченості допускає подання

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-m-1}}{z^{m+1}} + \dots + \frac{c_{-m-2}}{z^{m+2}} + \dots, \quad c_{-m} \neq 0.$$

За теоремою 4.3.8 з цього подання випливає наслідок 4.3.9.

Приклад 5. Обчислити лишок $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{\cos \frac{1}{z}}{z^k}$, $k \in \mathbf{N}$.

Ясно, що $\frac{\cos \frac{1}{z}}{z^k} \sim \frac{1}{z^k}$ при $z \rightarrow \infty$. Тому за наслідком 3.7.2 функція $\frac{\cos \frac{1}{z}}{z^k}$ має в нескінченості нуль k -го порядку. Тоді за наслідком 4.3.9

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{\cos \frac{1}{z}}{z^k} = \begin{cases} -1, & \text{якщо } k=1; \\ 0, & \text{якщо } k>1. \end{cases}$$

Теорема 4.3.10 (*Коші про повну суму лишків*). Якщо функція f має в комплексній площині \mathbf{C} скінченну кількість особливих точок a_1, a_2, \dots, a_n , то повна suma лишків цієї функції дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Доведення. Якщо функція f має в комплексній площині \mathbf{C} скінченну кількість особливих точок a_1, a_2, \dots, a_n , то існує таке R , що $|a_k| < R$ для $k = 1, 2, \dots, n$. Нехай $\gamma_R := \{z : |z| = R\}$. Тоді, застосовуючи означення лишка у нескінченості з одного боку і теорему Коші про лишки – з іншого, отримаємо

$$-\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z),$$

що рівносильно твердженню теореми.

Приклад 6. Обчислити $I := \int_{\gamma_2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^4+1)^2} dz$, де $\gamma_2 = \{z : |z| = 2\}$.

Зауважимо, що функція $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^4+1)^2}$ є аналітичною у всій комплексній площині за винятком чотирьох коренів $z_k = (\sqrt[4]{-1})_k = \exp i \frac{\pi + 2\pi k}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$, та точки $z_4 = 0$, які розміщені у внутрішності кола γ_2 . Тому, застосовуючи спочатку теорему Коші про лишки, а потім теорему Коші про повну суму лишків, отримаємо

$$I = \int_{\gamma_2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^4+1)^2} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^4 \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = -2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=\infty} f(z).$$

Оскільки $f(z) \sim \frac{1}{z^8}$, то за наслідком 3.7.2 функція $f(z)$ має в нескінченості нуль 8-го порядку. Тому за наслідком 4.3.9 $I = -2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

4.4 Обчислення інтегралів $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ і $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$

Основним інструментом обчислення криволінійних інтегралів уздовж замкнутих кривих є теорема 4.3.1 Коші про лишки. Але за допомогою лишків можна обчислювати також інші типи інтегралів. В наступній теоремі наведена загальна схема обчислення невласних інтегралів виду $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

Теорема 4.4.1 Нехай функція f задоволяє наступні умови:

- 1) існує інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$;
- 2) функція $f(z)$ є аналітичною в замкненій півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ за винятком скінченного числа точок a_k , $\operatorname{Im} a_k > 0$;
- 3) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$, де $C_R := \{z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$.

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{a_k: \operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{res}_{z=a_k} f(z). \quad (4.4.1)$$

Доведення. Побудуємо замкнуту криву $\gamma_R := [-R, R] \cup C_R$. Зазначимо, що за умови 1) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Оскільки за умовою 2) теореми функція $f(z)$ має скінченне число особливих точок a_k у верхній півплощині, існує таке $R > 0$, що всі вони містяться у внутрішності γ_R і тому має місце рівність $\{a_k : a_k \in \operatorname{int} \gamma_R\} = \{a_k : \operatorname{Im} a_k > 0\}$ (\star) і виконуються всі умови теореми 4.3.1 Коші про лишки. За цією теоремою

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a_k \in \operatorname{int} \gamma_R} \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

Переходячи в цій рівності до границі при $R \rightarrow \infty$, і враховуючи умови 1) і 3) теореми і рівність (\star), отримаємо (4.4.1).

Наступна лема містить умову, достатню для виконання умови 3) теореми.

Лема 4.4.2 Якщо при достатньо великих R функція f неперервна на множині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R\}$, причому існують такі $C, \delta > 0$, що

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^{1+\delta}}, \quad |z| \geq R, \quad (4.4.2)$$

то виконується умова 3) теореми 4.4.1.

Зокрема, умова 3) теореми 4.4.1 виконується для раціональних функцій $f(z) := \frac{P_n(z)}{P_m(z)}$, де P_n і P_m – многочлени степенів n і m відповідно, причому $m - n \geq 2$.

Доведення. Перше твердження леми одразу випливає з наступної оцінки

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z)dz \right| &\leq \int_{C_R} |f(z)||dz| \leq \int_{C_R} \frac{C}{|z|^{1+\delta}} |dz| = \\ &= \frac{C}{R^{1+\delta}} \int_{C_R} |dz| = \frac{C}{R^{1+\delta}} \cdot \pi R = \frac{\pi C}{R^\delta}. \end{aligned}$$

Для раціональних функцій $f(z) = \frac{P_n(z)}{P_m(z)}$, для яких $m - n \geq 2$, має місце асимптотична рівність $f(z) \sim \frac{1}{z^2}$ при $z \rightarrow \infty$. З цієї рівності одразу випливає оцінка (4.4.2). Крім того, будь-яка ріціональна функція неперервна на множині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R\}$ при достатньо великих R .

Отже, для раціональних функцій $f(z) = \frac{P_n(z)}{P_m(z)}$, для яких $m - n \geq 2$, також виконується умова 3) теореми 4.4.1.

З теореми 4.4.1 і леми 4.4.2 одразу отримуємо

Наслідок 4.4.3 *Нехай раціональна функція $\frac{P_n(z)}{P_m(z)}$ задовольняє умови:*

*a) многочлен P_m не має дійсних коренів; b) $m - n \geq 2$.
Тоді*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} dx = 2\pi i \sum_{a_k: \operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{res}_{z=a_k} \frac{P_n(z)}{P_m(z)}.$$

Приклад 1. Обчислити $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$.

Очевидно, раціональна функція $f(z) := \frac{1}{z^4 + 1}$ задовольняє умови наслідка 4.4.2. З чотирьох коренів $z_k = \exp i \frac{\pi + 2\pi k}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$, многочлена $z^4 + 1$ у верхній півплощині розміщені z_0 і z_1 . Тому за наслідком 4.4.2 маємо

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname{res}_{z=z_1} f(z) \right).$$

Обчислимо $\operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$. Очевидно, що точки z_k є простими полюсами для функції $f(z)$. Тому за наслідком 4.3.5 маємо $\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{4z_k^3} = -\frac{z_k}{4}$. Таким чином, $I = -\frac{2\pi i}{4}(z_0 + z_1) = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$.

Аналогічно теоремі 4.4.1 доводиться

Теорема 4.4.4 *Нехай функція f задовольняє наступні умови:*

- 1) існує інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$;
- 2) функція $f(z)$ є аналітичною в замкненій півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \leq 0\}$ за винятком скінченного числа точок a_k , $\operatorname{Im} a_k < 0$;
- 3) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} f(z) dz = 0$, де $C_R^- := \{z : \operatorname{Im} z \leq 0, |z| = R\}$.

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{a_k: \operatorname{Im} a_k < 0} \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

Обчислення перетворення Фур'є $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x}dx.$

Наступна лема є аналогом леми 4.4.2.

Лема 4.4.5 (Жордан).

1) Нехай $\alpha > 0$, функція g неперервна на множині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R\}$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in C_R} |g(z)| = 0,$$

де $C_R := \{z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$. Тоді

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} g(z)e^{i\alpha z} dz = 0.$$

2) Нехай $\alpha < 0$, функція g неперервна на множині $\{z : \operatorname{Im} z \leq 0, |z| \geq R\}$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in C_R^-} |g(z)| = 0,$$

де $C_R^- := \{z : \operatorname{Im} z \leq 0, |z| = R\}$. Тоді

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} g(z)e^{i\alpha z} dz = 0.$$

Доведення. Доведемо лему для $\alpha > 0$. Для $\alpha < 0$ доведення аналогічне. Почнемо з оцінки

$$\left| \int_{C_R} g(z)e^{i\alpha z} dz \right| \leq \max_{z \in C_R} |g(z)| \int_{C_R} |e^{i\alpha z}| |dz|.$$

Оскільки для точок $z \in C_R$ має місце подання $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, то застосовуючи формулу 2.2.2 Ейлера і враховуючи рівність $|e^{ix}| = 1$, $x \in \mathbf{R}$, знаходимо

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha R(\cos t + i \sin t)}| = |e^{i\alpha R \cos t}| e^{-\alpha R \sin t} = e^{-\alpha R \sin t}.$$

Застосовуючи далі формулу 3.1.4 для обчислення криволінійного інтегралу і враховуючи симетрію синусоїди відносно прямої $x = \pi/2$, отримаємо

$$\int_{C_R} |e^{i\alpha z}| |dz| = \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin t} R dt = 2R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin t} dt.$$

Оскільки синусоїда опукла доверху на проміжку $[0, \pi/2]$, тобто, виконується нерівність $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$, $t \in [0, \pi/2]$, то

$$\int_{C_R} |e^{i\alpha z}| |dz| \leq 2R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi}t} dt = 2R \left(\frac{e^{-\alpha R \frac{2}{\pi}}}{-\alpha R \frac{2}{\pi}} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}).$$

Таким чином, маємо оцінку

$$\left| \int_{C_R} g(z) e^{i\alpha z} dz \right| \leq \max_{z \in C_R} |g(z)| \cdot \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}),$$

з якої одразу випливає твердження леми для $\alpha > 0$.

Теорема 4.4.6 I. Нехай $\alpha > 0$, а функція g задоволює наступні умови:

1) існує інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx$;

2) функція $g(z)$ є аналітичною в замкненій півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ за винятком скінченного числа точок a_k , $\operatorname{Im} a_k > 0$;

3) $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in C_R} |g(z)| = 0$,

де $C_R := \{z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{a_k: \operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{res}_{z=a_k} g(z) e^{i\alpha z}. \quad (4.4.3)$$

II. Нехай $\alpha < 0$, а функція g задоволює наступні умови:

1) існує інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx$;

2) функція $g(z)$ є аналітичною в замкненій півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \leq 0\}$ за винятком скінченного числа точок a_k , $\operatorname{Im} a_k < 0$;

3) $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in C_R^-} |g(z)| = 0$,

де $C_R^- := \{z : \operatorname{Im} z \leq 0, |z| = R\}$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{a_k: \operatorname{Im} a_k < 0} \operatorname{res}_{z=a_k} g(z) e^{i\alpha z}. \quad (4.4.4)$$

Зокрема, формули (4.4.3) і (4.4.4) мають місце для раціональної функції $g(z) := \frac{P_n(z)}{P_m(z)}$, яка задоволює умови:

a) многочлен P_m не має дійсних коренів; b) $m - n \geq 1$.

Доведення. Нехай $\alpha > 0$. Розглянемо функцію $f(z) := g(z) e^{i\alpha z}$. За допомогою леми Жордана неважко бачити, що за умов даної теореми вона задоволює умови теореми 4.4.1. З цієї теореми випливає рівність (4.4.3).

Зокрема, раціональна функція $g(z) := \frac{P_n(z)}{P_m(z)}$, для якої виконануються умови а) і б), очевидно, задовольняє умови даної теореми і тому для неї також має місце рівність (4.4.3).

У випадку $\alpha < 0$ рівність (4.4.4) випливає з теореми 4.4.4 і другої частини леми Жордана.

Обчислення косинус і синус перетворень Фур'є $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx$ і $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx$.

За формулою Ейлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx.$$

Нехай функція $f(x)$ дійснозначна. Тоді з даної формулі отримуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx.$$

У загальному випадку за допомогою формул Ейлера $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ і $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ обчислення косинус і синус перетворень Фур'є зводиться до обчислення двох перетворень Фур'є.

Приклад 2. Обчислити $I := \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx$, $a > 0$.

Враховуючи парність функції $\frac{x \sin x}{x^2 + a^2}$ і дійснозначність функції $\frac{x}{x^2 + a^2}$, отримаємо

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{ix}}{x^2 + a^2} dx.$$

За допомогою формулі (4.4.3) і твердження 4.3.4 знайдемо

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{ix}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=ai} \frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ai} \frac{ze^{iz}}{z + ai} = 2\pi i \frac{ai e^{-a}}{2ai} = \frac{\pi i}{e^a}.$$

Таким чином, $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2e^a}$.

Обчислення інтегралів виду $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$, де $R(x, y)$ – раціональна функція двох змінних.

Основна ідея обчислення інтегралів такого типу – заміна змінних $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. При такій заміні відрізок $[0, 2\pi]$ відображається в одиничне коло

$|z| = 1$, тобто замнуту криву, інтеграл уздовж якої, можна обчислити за допомогою теореми Коші при лишки. Маємо

$$dz = izdt, \quad \cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad \sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i},$$

Таким чином, після такої заміни змінних отримаємо

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} R_1(z) dz, \quad R_1(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right).$$

Приклад 3. Обчислити $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}$, $0 < |a| < 1$.

Після заміни $z = e^{ix}$ маємо

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{\left(1-2a\frac{z+\frac{1}{z}}{2}+a^2\right)iz} = \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z-a(z^2+1)+a^2z} = -\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2-z(1+a^2)+a}. \end{aligned}$$

З двох коренів знаменника, $z_1 = a$ і $z_2 = \frac{1}{a}$, перший міститься у внутрішності однічного кола $|z| = 1$, другий – у зовнішності. Тому, застосовуючи теорему Коші про лишки і наслідок 4.2.5, отримаємо

$$I = -2\pi \cdot \operatorname{res}_{z=a} \frac{1}{az^2-z(1+a^2)+a} = -2\pi \left(\frac{1}{2az-(1+a^2)} \right)_{z=a} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

Розділ 5

Аналітичне продовження

Термін аналітична функція, застосувався в попередніх розділах виключно для однозначних аналітичних функцій. Такі функції, як відомо з теореми 3.6.5 про еквівалентні підходи до означення аналітичної функції, характеризуються властивістю регулярності. За цією властивістю будь-яка однозначна аналітична в області G функція $f(z)$ в деякому околі довільної точки z_0 області G представима збіжним степеневим рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$.

Разом з тим у комплексному аналізі важливу роль відіграють багатозначні аналітичні функції. Прикладами таких функцій є $\sqrt[n]{z}$, $\ln z$.

Для спрощення термінології однозначні аналітичні функції називають регулярними, а багатозначні аналітичні функції – аналітичними.

Аналітичні функції отримують з регулярних за допомогою операції аналітичного продовження. Результатом такого продовження може бути багатозначна функція. Далі будуть розглянуті види аналітичного продовження і з'ясована причина можливої багатозначності отриманої функції.

5.1 Види аналітичного продовження

Важливу роль в питаннях аналітичного продовження відіграє теорема 3.7.4 єдиності для регулярних функцій. Нагадуємо її формульовання.

Теорема 5.1.1 (*єдиності для регулярних функцій*). Якщо функція f регулярна в області $G \subset \mathbf{C}$, а множина її нулів має в цій області граничну точку, то функція f тотожно дорівнює нулю в області G .

Означення 5.1.1 (безпосереднього аналітичного продовження).

Нехай функція f_0 регулярна в області G_0 , а функція f_1 регулярна в області G_1 , причому перетин цих областей $G_0 \cap G_1$ містить область G_0^1 .

Якщо $f_0(z) = f_1(z)$, $z \in G_0^1$, то функцію f_1 називають безпосереднім аналітичним продовженням функції f_0 з області G_0 в область G_1 (через область G_0^1), і навпаки, функцію f_0 – безпосереднім аналітичним продовженням функції f_1 з області G_1 в область G_0 (через область G_0^1).

Теорема 5.1.2 (про єдиність безпосереднього аналітичного продовження).

Нехай функція f_0 регулярна в області G_0 , а G_1 – така область, що перетин $G_0 \cap G_1$ містить область G_0^1 . Якщо безпосереднє аналітичне продовження функції f_0 з області G_0 в область G_1 (через область G_0^1) можливе, то воно єдине.

Доведення. Нехай f_1 і f_2 – безпосередні продовження функції f_0 з області G_0 в область G_1 (через область G_0^1). Тоді за означенням 5.1.1 функції f_1 і f_2 регулярні в області G_1 , причому $f_1(z) = f_0(z)$ і $f_2(z) = f_0(z)$ в області G_0^1 . Отже, множина нулів регулярені в області G_1 функції $f_1 - f_2$ містить область G_0^1 , а тому будь-яка точка цієї області є граничною для множини її нулів. Тоді функції f_1 і f_2 тотожні в області G_1 за теоремою 5.1.1 єдиності для регулярних функцій.

Означення 5.1.2 (аналітичного продовження уздовж низки областей).

Нехай G_0, G_1, \dots, G_n – низка областей, яка задовольняє умову: перетин $G_k \cap G_{k+1}$ містить область G_k^1 , $k = 0, 1, \dots, n-1$. Нехай в кожній області G_k задана регулярна функція f_k , причому f_{k+1} є безпосереднім аналітичним продовженням функції f_k .

Тоді функцію f_n називають аналітичним продовженням функції f_0 уздовж даної низки областей.

Низка областей, яка задовольняє умову даного означення називається допустимою.

З теореми 5.1.1 і означення 5.1.2 одразу випливає

Наслідок 5.1.3 Нехай функція f_0 регулярна в області G_0 , а G_0, G_1, \dots, G_n – допустима низка областей. Якщо аналітичне продовження функції f_0 уздовж даної низки областей можливе, то воно єдине.

Приклад 1. Нехай $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(z-2)^n$. Чи є функція f_2 безпосереднім аналітичним продовженням функції f_0 ? Чи є функція f_2 аналітичним продовженням функції f_0 уздовж низки областей?

Зауважимо, що суми обох рядів дорівнюють $f_1(z) := \frac{1}{1-z}$, але перший ряд збігається в кругі $G_0 := \{z : |z| < 1\}$, тоді як кругом збіжності другого є $G_2 := \{z : |z-2| < 1\}$. Отже, області визначення функцій f_1 і f_2 не перетинаються, а тому вони не можуть бути безпосереднім продовженням одна одної. Але якщо додати ще одну область $G_1 := \{z : 0 < |z-1| < 1\}$ і регулярну в ній функцію $f_1(z)$, то функція f_2 буде аналітичним продовженням функції f_0 уздовж низки областей G_0, G_1, G_2 .

Означення 5.1.3 (аналітичного продовження уздовж кривої).

Нехай γ – впорядкована крива (див. означення 1.4.1) з початком у точці $\xi_0 \in \mathbf{C}$ і кінцем у точці $\xi_1 \in \mathbf{C}$ і в точці ξ_0 задана регулярна функція $f_{\xi_0}(z)$. Функція $f_{\xi_0}(z)$ називається аналітично продовжуваною уздовж кривої γ , якщо на цій кривій задано сімейство регулярних функцій $\{f_{\xi}\}_{\xi \in \gamma}$, що неперевно залежить від параметру $\xi \in \gamma$ у тому сенсі, що існує така неперевна на кривій γ функція $\varphi(z)$, яка для кожного $\xi \in \gamma$ задовольняє умову:

$f_{\xi}(z) = \varphi(z)$ для всіх z з деякої дуги кривої γ , що містить точку ξ .

Твердження 5.1.4 Якщо функція f регулярна в області G , то вона аналітично продовжується уздовж будь-якої кривої $\gamma \subset G$, причому результатом продовження є сама функція $f(z)$.

Доведення. Дійсно, для довільної кривої $\gamma \subset G$ і довільної точки $\xi \in \gamma$ покладемо $f_\xi(z) := f(z)$ і $\varphi(z) := f(z)$, $z \in \gamma$. Тоді всі вимоги означення 5.1.3 виконуються.

Теорема 5.1.5 Аналітичне продовження уздовж кривої зводиться до аналітичного продовження уздовж низки областей.

Доведення. Нехай γ – крива з початком у точці z_0 , а f_0 – регулярна у точці z_0 функція. Розгорнемо функцію f_0 в ряд Тейлора в околі точки z_0 . Цей ряд збігається в деякому крузі $K_0 := \{z : |z - z_0| < r\}$. Через γ_0 позначимо зв'язну дугу кривої γ , з початком у точці z_0 , яка міститься в крузі K_0 і нехай z_1 – кінець дуги γ_0 . Дляожної точки $\xi \in \gamma_0$ у якості функції f_ξ з означення 5.1.3 візьмемо розвинення функції f_0 в ряд Тейлора в околі точки ξ , а в якості функції φ з цього означення – функцію f_0 .

Є дві можливості:

- 1) жоден з рядів Тейлора f_ξ , $\xi \in \gamma_0$, $\xi \neq z_1$, не містить в крузі збіжності точку z_1 ,
- 2) точка z_1 міститься в крузі збіжності одного з цих рядів.

У першому випадку аналітичне продовження уздовж кривої γ далі точки z_1 неможливо.

У другому випадку у якості $f_1(z)$ візьмемо суму f_ξ того ряду Тейлора, який збігається в точці z_1 . Після цього продовжимо виконувати аналогічні процедури із заміною точки z_0 на точку z_1 .

Якщо продовження функції f_0 уздовж кривої γ можливе, за допомогою цих процедур, внаслідок компактності кривої γ і леми Гейне-Бореля, функція f_0 буде аналітично продовжена уздовж кривої γ за скінченне число кроків.

З теореми 5.1.5 і наслідку 5.1.3 випливає

Наслідок 5.1.6 Якщо аналітичне продовження даної регулярної функції уздовж даної кривої можливе, то воно єдине.

Теорема про монодромію.

Тепер з'ясуємо причину можливої багатозначності аналітичного продовження.

Лема 5.1.7 Нехай γ – крива з початком у точці z_0 і кінцем у точці z_1 і в точці z_0 задана регулярна функція f_0 . Якщо аналітичне продовження функції f_0 уздовж кривої γ можливе, то воно можливе уздовж будь-якої кривої, гомотопної γ і достатньо близької до неї.

Доведення. Користуючись теоремою 5.1.5 замінимо аналітичне продовження уздовж кривої γ аналітичним продовженням уздовж низки областей G_0, G_1, \dots, G_n .

Нехай γ_1 – крива з початком у точці z_0 і кінцем у точці z_1 , гомотопна γ , що проходить через кожну з цих областей.

Користуючись твердженням 5.1.4, в межах кожної з областей G_k неперевно деформуємо дугу кривої γ в дугу кривої γ_1 , не змінюючи результату аналітичного продовження.

Таким чином, аналітичне продовження функції f_0 уздовж кривої γ буде замінено на аналітичне продовження цієї функції f_0 уздовж кривої γ_1 . При цьому результат продовження не зміниться.

Теорема 5.1.8 (про монодрою).

Нехай γ_0 і γ_1 — гомотопні в деякій області G криві і $S := \{\gamma_s\}_{s \in [0,1]}$ — сімейство кривих, що містяться в області G і задають неперевну деформацію кривої γ_0 в криву γ_1 .

Якщо регулярна функція аналітично продовжується уздовж будь-якої кривої сімейства S , то результат продовження не залежить від кривої даного сімейства.

Доведення. Назвемо криві $\gamma_{s_1}, \gamma_{s_2} \in S$ еквівалентними ($\gamma_{s_1} \sim \gamma_{s_2}$), якщо результат продовження уздовж цих кривих однаковий. Отже, в цій термінології треба довести, що всі криві сімейства S еквівалентні.

З леми 5.1.7 випливає, що $\gamma_s \sim \gamma_0$ для достатньо малих s .

Припустимо, що не всі криві еквівалентні і нехай $s^* := \inf\{s : \gamma_s \not\sim \gamma_0\}$.

За лемою 5.1.7 $s^* > 0$. Ясно, що $\gamma_{s^*} \not\sim \gamma_0$, бо інакше за лемою 5.1.7 $\gamma_s \sim \gamma_0$ для $s > s^*$ (достатньо близьких до s^*) і тоді $\inf\{s : \gamma_s \not\sim \gamma_0\} > s^*$.

Отже, $\gamma_{s^*} \not\sim \gamma_0$. Але тоді за лемою 5.1.7 $\gamma_s \not\sim \gamma_0$ для $s < s^*$ (достатньо близьких до s^*), що також суперечить означенню s^* .

Таким чином, отримана суперечність доводить теорему.

Наслідок 5.1.9 Нехай G — однозв'язна область, а f_0 — регулярна в точці $z_0 \in G$ функція. Якщо аналітичне продовження функції f_0 можливе уздовж будь-якої кривої, що міститься в області G , то результатом продовження є регулярна функція.

Доведення. Фіксуємо довільну точку $z_1 \in G$ і доведемо, що аналітичне продовження функції f_0 в точку z_1 не залежить від вибору кривої, що міститься в області G і з'єднує точки z_0 і z_1 . Дійсно, будь-які дві криві з початком у точці z_0 і кінцем у точці z_1 , що містяться в області G , гомотопні між собою внаслідок однозв'язності області G . Тоді за теоремою про монодромію результат аналітичного продовження функції f_0 в точку z_1 не залежить від вибору кривої.

Висновок. Багатозначність аналітичного продовження можлива лише при продовженні уздовж кривих, які обходять точки, через які аналітичне продовження неможливе.

5.2 Аналітичні функції

Означення 5.2.1 Елементом називається пара (G, f) , що складається з області G і регулярної в цій області функції f .

Означення 5.2.2 Аналітичною функцією називається сукупність елементів (G_α, f_α) , кожний з яких є аналітичним продовженням будь-якого іншого елементу даної сукупності. Регулярні функції f_α , що входять в елементи аналітичної функції, називають регулярними гілками цієї функції.

Приклад 2. а) У площині з розрізом $\mathbf{C}_\alpha := \mathbf{C} \setminus \{z : \arg z = \alpha\}$ розглянемо регулярні гілки кореня $f_\alpha := \sqrt[n]{|z|} \exp i \frac{\arg_\alpha z}{n}$ (вправа 4 розділу 2.3), де $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\alpha < \arg_\alpha z < \alpha + 2\pi$. Очевидно, що кожна з цих гілок f_{α_1} може бути отримана з будь-якої іншої гілки f_{α_2} безпосереднім аналітичним продовженням.

Сукупність елементів $(\mathbf{C}_\alpha, f_\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, утворює аналітичну функцію $\sqrt[n]{z}$.

б) У площині з розрізом \mathbf{C}_α , $\alpha \in \mathbf{R}$, розглянемо регулярні гілки логарифма $L_\alpha := \ln |z| + i \arg_\alpha z$ (вправа 4 розділу 2.3), де $\alpha < \arg_\alpha z < \alpha + 2\pi$. Очевидно, що кожна з цих гілок L_{α_1} може бути отримана з будь-якої іншої гілки L_{α_2} безпосереднім аналітичним продовженням (якщо $|\alpha_1 - \alpha_2| < 2\pi$) або аналітичним продовженням уздовж низки областей (якщо $|\alpha_1 - \alpha_2| \geq 2\pi$).

Сукупність елементів $(\mathbf{C}_\alpha, L_\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, утворює аналітичну функцію $\ln z$.

Виділення регулярних гілок аналітичних функцій.

Означення 5.2.3 (гілки аналітичної функції в області).

Нехай G – область. Сукупність усіх елементів, які є аналітичним продовженням даного елементу уздовж кривих, які містяться в області G , називають гілкою аналітичної функції в області G .

Означення 5.2.4 (аналітичної в області функції).

Якщо аналітичне продовження даного елементу можливе уздовж будь-якої кривої, яка міститься в області G , то отриману після всіх таких продовжень гілку аналітичної функції в області G називають аналітичною функцією в даній області G .

За допомогою цієї термінології теорему 5.1.8 про монодромію, точніше наслідок 5.1.9 з цієї теореми, можна сформулювати наступним чином.

Теорема 5.2.1 (про монодрою).

Функція, аналітична в однозв'язній області, є регулярною в цій області.

Зauważення 1. Ще раз наголосимо, що це не нова теорема, а лише інше формулювання теореми 5.1.8.

На цій теоремі базується наступний алгоритм виділення регулярних гілок аналітичних функцій.

Нехай задана аналітична функція в скінченнозв'язній області G .

1) Проведемо розрізи, що перетворюють область G в однозв'язну область. Для цього з'єднаємо зовнішню межеву криву γ_0 області G з кожною із внутрішніх межевих кривих $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ цієї області за допомогою розрізів уздовж жорданових кривих l_k , $k = 1, \dots, n-1$, що попарно не перетинаються. Проведення цих розрізів перетворить область G на однозв'язну область \tilde{G} .

2) Зафіксуємо в деякій точці $a \in \tilde{G}$ елемент (G_a, f_a) даної аналітичної функції. За теоремою 5.2.1 цей елемент породжує регулярну в області \tilde{G} функцію Γ_a за допомогою аналітичного продовження елемента (G_a, f_a) уздовж

усіх кривих області \tilde{G} з початком в точці a . Функція Γ_a є регулярною гілкою даної аналітичної функції.

Різні елементи даної аналітичної функції породжують різні регулярні гілки за допомогою описаного алгоритму.

Таким чином, в однозв'язній області аналітична функція розпадається (розділяється) на регулярні гілки.

Зауваження 2. а) Розрізи, що перетворюють дану багатозв'язну область G на однозв'язну область \tilde{G} можна провести багатьма різними способами. Тому і дану аналітичну функцію можна багатьма різними способами розрізати на регулярні гілки.

б) Після проведення розрізів регулярна гілка даної аналітичної функції однозначно задається за допомогою задання значення в деякій фіксованій точці області \tilde{G} .

Приклад 3. а) Розглянемо аналітичну в двозв'язній області $G = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ функцію $\sqrt[n]{z}$. Для виділення її регулярних гілок проведемо розріз уздовж променя $\{z : \arg z = \alpha\}$. В результаті отримаємо однозв'язну область $\mathbf{C}_\alpha := \mathbf{C} \setminus \{z : \arg z = \alpha\}$. В цій області функція $\sqrt[n]{z}$ роздається на n регулярних гілок

$$(\sqrt[n]{z})_k := \sqrt[n]{r} \exp i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi, \quad (5.2.1)$$

де $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

б) Розглянемо аналітичну в двозв'язній області $G = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ функцію $\ln z$. Для виділення її регулярних гілок уздовж променя $\{z : \arg z = \alpha\}$ проведемо розріз. Отримаємо однозв'язну область $\mathbf{C}_\alpha := \mathbf{C} \setminus \{z : \arg z = \alpha\}$. В цій області функція $\ln z$ роздається на злічену кількість регулярних гілок

$$(\ln z)_k := \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi, \quad (5.2.2)$$

де $k \in \mathbf{Z}$.

Зауваження 3. Змінюючи α в формулах (5.2.1) і (5.2.2), отримуємо новий набір регулярних гілок. Самі регулярні гілки в цих формулах однозначно визначаються номером k . Замість цього можна вказувати значення, яке приймає гілка в фіксованій точці $z_0 \in \mathbf{C}_\alpha$. Заданням цього значення однозначно визначається номер k гілки, а тому і сама гілка.

Поняття про ріманову поверхню аналітичної функції.

Багатозначні аналітичні функції не є функціями у власному розумінні цього слова. Але відомо, що дляожної аналітичної функції можна так задати область визначення (вона вже не буде підмножиною комплексної площини), щоб на ній дана аналітична функція стала однозначною. Такі області визначення і називаються рімановими поверхнями аналітичних функцій.

Теорія ріманових поверхонь не входить до університетського курсу комплексного аналізу. Тому ми обмежимося прикладом побудовою ріманових поверхонь функцій $\sqrt[n]{z}$ і $\ln z$.

Приклад 4. Розглянемо n одинакових екземплярів комплексних площин з розрізом $\mathbf{C} \setminus \{z : \arg z = 0\}$. Позначимо їх G_0, G_1, \dots, G_{n-1} і задамо на цих площинах відповідні регулярні гілки кореня

$$f_k := (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} \exp i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

де $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Зазначимо, що значення гілки f_0 на нижньому березі розрізу площини G_0 збігається зі значенням гілки f_1 на верхньому березі розрізу площини G_1 ; значення гілки f_1 на нижньому березі розрізу площини G_1 збігається зі значенням гілки f_2 на верхньому березі розрізу площини G_2, \dots , значення гілки f_k на нижньому березі розрізу площини G_k збігається зі значенням гілки f_{k+1} на верхньому березі розрізу площини G_{k+1} ; нарешті значення гілки f_{n-1} на нижньому березі розрізу площини G_{n-1} збігається зі значенням гілки f_0 на верхньому березі розрізу площини G_0 .

Виходячи з цього склеїмо відповідним чином розрізи площин G_k . А саме, нижній берег розрізу площини G_k – з верхнім берегом розрізу площини G_{k+1} , $k = 1, \dots, n - 1$, а нижній берег розрізу площини G_{n-1} склеїмо з верхнім берегом розрізу площини G_0 .

Отримана таким чином поверхня називається рімановою поверхнею кореня $\sqrt[n]{z}$. Вона склеєна з n площин (листів), тому її називають n -листовою.

Аналогічно будується ріманова поверхня логарифма $\text{Ln}z$. Тільки вона буде склеєна з нескінченного числа таких же листів G_k , $k \in \mathbf{Z}$, на яких задані відповідні регулярні гілки логарифма

$$(\text{Ln}z)_k := \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Для її побудови нижній берег розрізу площини G_k треба склеїти з верхнім берегом розрізу площини G_{k+1} , $k \in \mathbf{Z}$. Отримана нескінченно-листа поверхня є рімановою поверхнею логарифма $\text{Ln}z$.

Ізольовані особливі точки аналітичних функцій.

Означення 5.2.5 Точка $a \in \overline{\mathbf{C}}$ називається ізольованою особливою точкою аналітичної функції, якщо існує такий проколотий окіл цієї точки, що деякий елемент даної аналітичної функції можна аналітично продовжити уздовж будь-якої кривої, що міститься в цьому проколотому окілі.

Прикладами таких точок є точки 0 і ∞ для функцій $\sqrt[n]{z}$ і $\text{Ln}z$.

Означення 5.2.6 Нехай a – ізольована особлива точка аналітичної функції. Обходом навколо точки a будемо називати аналітичне продовження деякого елементу даної аналітичної функції уздовж замкнутої кривої, що містить у своїй внутрішності точку a і не містить інших особливих точок.

Означення 5.2.7 Нехай a – ізольована особлива точка аналітичної функції. При обході навколо точки a є дві можливості:

- 1) обхід навколо точки a приводить до початкового елементу (з якого починалось аналітичне продовження);
- 2) обхід навколо точки a приводить до іншого елементу.

У першому випадку точка a є ізольованою особливою точкою однозначного характеру, яка, як відомо з розділу 4.2, може бути усувною, полюсом або істотно особливою.

У другому випадку точка a називається ізольованою особливою точкою багатозначного характеру, або точкою розгалуження.

Означення 5.2.8 Точка розгалуження a може бути одного з двох типів:

- 1) існує скінченне число обходів навколо точки a , що приводить до початкового елементу;
- 2) ніяке скінченне число обходів навколо точки a не проводить до початкового елементу.

Точки розгалуження першого типу називають точками розгалуження скінченного порядку. При цьому найменше число обходів, що приводить до початкового елементу називається порядком розгалуження.

Точки розгалуження другого типу називаються точками розгалуження нескінченного порядку, або логарифмічними точками розгалуження.

Приклад 5. а) Точка 0 для функції $w = \sqrt[n]{z}$ є точкою розгалуження n -го порядку. Дійсно, зафіксуємо одне із значень кореня $w_0 = \sqrt[n]{r} \exp i \frac{\varphi}{n}$ в довільній точці $z_0 \neq 0$ і зробимо обхід навколо нуля. Оскільки в результаті обходу модуль r числа z_0 не зміниться, а його аргумент φ збільшиться на 2π , то значення w_0 після обходу перейде в значення $w_1 = \sqrt[n]{r} \exp i \frac{\varphi+2\pi}{n} = w_0 \exp i \frac{2\pi}{n}$. Ясно, що $w_1 \neq w_0$. За означенням точка 0 є точкою розгалуження.

Після k обходів значення w_0 перейде в значення $w_k = \sqrt[n]{r} \exp i \frac{\varphi+2\pi k}{n} = w_0 \exp i \frac{2\pi k}{n}$. Ясно, що $w_k \neq w_0$ для $k = 1, 2, \dots, n-1$, а $w_n = w_0$. Отже, точка 0 є точкою розгалуження порядку n .

Оскільки обхід навколо точки 0 одночасно є обходом навколо нескінченності, то точка ∞ для функції $\sqrt[n]{z}$ також є точкою розгалуження n -го порядку.

б) Точки 0 і ∞ для функції $\text{Ln} z$ є логарифмічними точками розгалуження. Дійсно, зафіксуємо одне із значень логарифма $w_0 = \ln r + i\varphi$ в довільній точці $z_0 \neq 0$. Після k обходів значення w_0 перейде в значення $w_k = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$. Ясно, що $w_k \neq w_0$ для довільного цілого $k \neq 0$. Отже, точка 0 є логарифмічною точкою розгалуження, тобто точкою розгалуження нескінченного порядку.

Оскільки обхід навколо точки 0 одночасно є обходом навколо нескінченності, то точка ∞ для функції $\text{Ln} z$ також є логарифмічною точкою розгалуження.

Приклад 6. Знайти ізольовані особливі точки функції $f(z) := \sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$ і з'ясувати їх характер.

Оскільки для кожного з коренів особливими є точки 0 і ∞ , то і для даної функції ці точки є особливими.

Зафіксуємо одне із значень кожного з коренів \sqrt{z} і $\sqrt[3]{z}$ в довільній точці $z_0 \neq 0$ і позначимо їх через w_0 і w_1 відповідно. Зробимо k обходів навколо нуля. Значення $s_0 := w_0 + w_1$ функції $f(z)$ після k обходів навколо нуля зміниться на $s_k = w_0 \exp i \frac{2\pi}{2}k + w_1 \exp i \frac{2\pi}{3}k$. Неважко перевірити, що $s_k \neq s_0$ при $k = 1, 2, \dots, 5$, і тільки $s_6 = s_0$.

Отже, для функції f точка 0 (і разом з нею точка ∞) є точками розгалуження шостого порядку.

Приклад 7. Знайти ізольовані особливі точки функції $f(z) := \sqrt{z^2 - 1}$ і з'ясувати їх характер.

Оскільки підкореневий вираз дорівнює нулю в точках ± 1 , ці точки і, крім того, точка ∞ є особливими точками функції $f(z)$.

Дослідимо точку 1. Для цього представимо дану функцію у вигляді добутку $f(z) = \sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$. Зафіксуємо одне із значень кожного з коренів $\sqrt{z-1}$ і $\sqrt{z+1}$ в довільній точці $z_0 \neq 0$ і позначимо їх через w_0 і w_1 відповідно. Зробимо обхід навколо точки 1, при якому точка -1 залишається зовні кривої обходу. Тоді вектор $z-1$ зробить повний оберт і тому його аргумент отримає приrost 2π . При цьому вектор $z+1$ зробить лише коливання і повернеться в початкове положення, не зробивши повного оберту, і тому не отримає приросту. Отже, після обходу навколо точки 1 значення $s_0 := w_0w_1$ функції $f(z)$ перейде у значення $s_1 = w_0 \exp i\frac{2\pi}{2}w_1 = -w_0w_1 = -s_0$, тобто, у протилежне значення. Тоді після другого обходу навколо нуля значення функції f знову змінивши знак дорівнюватиме s_0 . Таким чином, у точці 1 функція f має точку розгалуження другого порядку.

Аналогічно, з'ясовується, що у точці -1 функція f також має точку розгалуження другого порядку.

Дослідимо точку ∞ . Зафіксуємо одне із значень кожного з коренів $\sqrt{z-1}$ і $\sqrt{z+1}$ в довільній точці $z_0 \neq 0$ і позначимо їх через w_0 і w_1 відповідно. Зробимо обхід навколо точки ∞ , при якому обидві точки 1 і -1 залишаються у внутрішності кривої обходу. Тоді обидва вектори $z-1$ і $z+1$ зроблять повний оберт і тому їх аргументи отримають приrostи 2π . Отже, після обходу навколо точки ∞ значення $s_0 := w_0w_1$ функції $f(z)$ перейде у значення $s_1 = w_0 \exp i\frac{2\pi}{2}w_1 \exp i\frac{2\pi}{2} = w_0w_1 = s_0$, тобто не зміниться. Тому точка ∞ для функції f за означенням 5.2.7 є ізольованою особливою точкою однозначного характеру, які були класифіковані в розділі 4.2. Очевидно, що $\sqrt{z^2 - 1} \sim z$ при $z \rightarrow \infty$. Таким чином, за критерієм 4.2.7 у точці ∞ функція f має простий полюс.

Вправа. Знайти ізольовані особливі точки функцій $\frac{1}{1+\sqrt{z}}$, $\ln \frac{z+1}{z}$ і з'ясувати їх характер.

Розділ 6

Конформні відображення елементарними функціями

Означення конформного відображення наведено в розділі 2.7. Для зручності повторимо ці означення.

Означення 6.0.1 Відображення функцією $w = f(z)$ називається конформним в точці z_0 , якщо воно зберігає кути між кривими, що проходять через цю точку і має сталий коефіцієнт лінійного розтягу в цій точці у будь-якому напрямку.

З цього означення, наслідку 2 твердження 2.7.1 і твердження 2.7.2 випливає достатня умова конформності в точці.

Твердження 6.0.1 Відображення функцією $f(z)$, що задовільняє умову $f'(z_0) \neq 0$, є конформним в точці z_0 .

Означення 6.0.2 Відображення $w = f(z)$ називається однолистим в області G , якщо будь-яку пару z_1, z_2 різних точок області G воно переводить у пару різних образів.

Іншими словами, однолисте відображення $w = f(z)$ – це біекція множини G на $f(G)$. Отже, для однолистого відображення існує обернене відображення $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$.

Означення 6.0.3 Відображення $w = f(z)$ називається конформним в області G , якщо воно однолисте в цій області і конформне в кожній її точці.

6.1 Дробово-лінійна функція

Функція виду $w = \frac{az+b}{cz+d}$, де a, b, c, d – довільні комплексні числа, називається дробово-лінійною. Будемо вважати виконаною умову $ad - bc \neq 0$ (\star), бо інакше w є константою.

Якщо $c = 0$, функція w є лінійною $w = Az + B$. У розділі 2.7 було з'ясовано, що лінійна функція зводиться до виконання наступних перетворень: 1) поворот на кут $\arg A$; 2) лінійний розтяг в $|A|$ разів; зсув на вектор B .

Надалі будемо вважати $c \neq 0$.

Довизначимо дробово-лінійну функцію у точці $-\frac{d}{c}$ рівністю $w(-\frac{d}{c}) := \infty$ і у точці ∞ покладемо $w(\infty) = \frac{a}{c}$. Отже, вона визначена на розширеній комплексній площині $\overline{\mathbf{C}}$.

Теорема 6.1.1 Дробово-лінійна функція взаємно-однозначно і взаємно-неперервно відображає $\overline{\mathbf{C}}$ на $\overline{\mathbf{C}}$.

Доведення. Розв'язавши рівняння $w = \frac{az+b}{cz+d}$ відносно z , отримаємо $z = \frac{b-dw}{cw-a}$. За цією формулою кожному w , $w \neq \frac{a}{c}$, $w \neq \infty$, відповідає рівно одне значення z . Крім того, згідно з довизначенням точці $w = \frac{a}{c}$ відповідає значення ∞ , а значенню ∞ – відповідає $-\frac{d}{c}$.

Взаємна однозначність дробово-лінійного відображення доведена.

Неперервність довільного відображення w в точках $z \neq -\frac{d}{c}$ і $z \neq \infty$ очевидна з формули $w = \frac{az+b}{cz+d}$. А в точках $z = -\frac{d}{c}$ і $z = \infty$ вона випливає з довизначення. Оскільки обернене відображення $z = \frac{b-dw}{cw-a}$ також дробово-лінійне, воно за доведеним неперервне.

Теорема доведена.

Дослідимо конформність відображення дробово-лінійною функцією. Поняття конформного відображення було означене в скінченній точці для функцій, що приймають скінченні значення. Але оскільки дробова лінійна функція визначена і приймає значення на розширеній комплексній площині, треба довизначити поняття конформності в точці ∞ і в точці z_0 , яка відображається у нескінченість.

Означення 6.1.1 Відображення $f(z)$ називається конформним у точці ∞ , якщо відображення $f(\frac{1}{z})$ конформне у точці 0.

Відображення, для якого $f(z_0) = \infty$, називається конформним у точці z_0 , якщо відображення $\frac{1}{f(z)}$ конформне у цій точці z_0 .

Теорема 6.1.2 Дробово-лінійна функція конформно відображає $\overline{\mathbf{C}}$ на $\overline{\mathbf{C}}$.

Доведення. За теоремою 6.1.1 дробово-лінійна функція однолиста в розширеній комплексній площині.

Залишилось довести її конформність у кожній точці $z \in \overline{\mathbf{C}}$. Для точок $z \neq -\frac{d}{c}$ і $z \neq \infty$ вона випливає з того, що

$$w'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

внаслідок твердження 6.0.1 і умови $(*)$.

Доведемо конформність дробово-лінійного відображення w у точці ∞ . За означенням 6.1.1 для цього треба довести конформність відображення

$w_1(z) := w\left(\frac{1}{z}\right)$ у точці 0. Маємо $w_1(z) = \frac{a/z+b}{c/z+d} = \frac{a+bz}{c+dz}$ і

$$w'_1(z) = \frac{b(c+dz) - d(a+bz)}{(c+dz)^2} = \frac{bc-ad}{(c+dz)^2}.$$

Отже, $w'_1(0) \neq 0$ внаслідок умови (\star) . Тому за твердження 6.0.1 відображення w_1 конформне у точці 0, тобто, відображення w конформне у точці ∞ .

Насамкінець, доведемо конформність дробово-лінійного відображення w у точці $z = -\frac{d}{c}$. За означенням 6.1.1 для цього треба довести конформність відображення $w_2(z) := \frac{1}{w(z)}$ у цій точці. Маємо $w_2(z) = \frac{cz+d}{az+b}$ і

$$w'_2(z) = \frac{c(az+b) - a(cz+d)}{(az+b)^2} = \frac{cb-ad}{(az+b)^2}.$$

Отже, $w'_2(-\frac{d}{c}) \neq 0$ внаслідок умови (\star) . Тоді за твердження 6.0.1 відображення w_2 конформне у точці $-\frac{d}{c}$, а тому у цій точці і відображення w конформне.

Теорема доведена.

Неважко перевірити, що суперпозиція дробово-лінійних відображень є дробово-лінійним відображенням.

Теорема 6.1.3 *Сумність усіх дробово-лінійних відображень утворює групу відносно суперпозиції відображень.*

Вправа. Довести теорему 6.1.3 перевіривши аксіоми групи.

Означення 6.1.2 Колом у широкому сенсі (або колом на розширеній комплексній площині $\overline{\mathbf{C}}$) називається коло або пряма.

Теорема 6.1.4 (кругова властивість) *При дробово-лінійному відображенні коло в широкому сенсі відображається в коло в широкому сенсі.*

Доведення. Для $c = 0$ теорема очевидна, бо лінійне відображення зводиться до повороту, розтягу і зсуву.

Нехай $c \neq 0$. Тоді маємо тотожність

$$\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c(cz+d)},$$

з якої отримуємо подання

$$\frac{az+b}{cz+d} = A + \frac{B}{z+C},$$

де $A := \frac{a}{c}$, $B := \frac{bc-ad}{c^2}$, $C := \frac{d}{c}$. З цього подання випливає, що дробово-лінійне відображення є суперпозицією наступних відображень

$$w_1 = z + C, \quad w_2 = \frac{1}{w_1}, \quad w_3 = A + Bw_2.$$

Перше і останнє з цих відображенень лінійні, для яких теорема очевидна.

Отже, залишилось довести теорему для відображення $w := \frac{1}{z}$. Зафіксуємо коло в широкому сенсі на площині z . Як відомо з аналітичної геометрії, його рівняння має вид

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta_1x + \beta_2y + \gamma = 0.$$

Запишемо це рівняння в комплексній формі. Скориставшись очевидними рівностями $x^2 + y^2 = z\bar{z}$, $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, матимемо

$$\alpha z\bar{z} + \beta_1 \frac{z+\bar{z}}{2} + \beta_2 \frac{z-\bar{z}}{2i} + \gamma = 0,$$

або

$$\alpha z\bar{z} + \left(\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2i}\right)z + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_2}{2i}\right)\bar{z} + \gamma = 0,$$

або

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0. \quad (6.1.1)$$

Знайдемо образ цього кола в широкому сенсі при відображенні $w := \frac{1}{z}$. Оскільки $z = \frac{1}{w}$, $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$, отримаємо

$$\gamma w\bar{w} + \bar{\beta}w + \beta\bar{w} + \alpha = 0.$$

Це рівняння має такий же вид, як і рівняння (6.1.1). Отже, воно задає коло в широкому сенсі на площині w .

Теорема ловедена.

Зауваження 1. Як з'ясувати що саме буде образом заданого кола в широкому сенсі S при відображенні $w = \frac{az+b}{cz+d}$? Коло чи пряма? Щоб дати відповідь на це запитання треба прийняти до уваги, що жодне коло не проходить через точку ∞ , а будь-яка пряма проходить через нескінченність.

Отже, якщо коло в широкому сенсі S проходить через точку $-\frac{d}{c}$, яка відображається у нескінченність, то образом S буде пряма. Якщо ж коло в широкому сенсі S не проходить через точку $-\frac{d}{c}$, то його образом буде коло.

Означення 6.1.3 Точки z і z^* називаються симетричними відносно кола γ радіуса R з центром у точці a , якщо виконуються умови:

1) вони розміщені на одному промені з вершиною у точці a ;

2) $|z-a||z^*-a| = R^2$.

Зокрема, $a^* := \infty$, $\infty^* := a$.

Оскільки за першою умовою означення $\arg(z-a) = \arg(z^*-a)$, то внаслідок рівності $\arg(z-a) = -\arg(\overline{z-a})$, маємо $\arg(\overline{z-a}) \cdot (z^*-a) = 0$, тобто,

$(z-a) \cdot (z^*-a) > 0$. Тоді за другою умовою означення $(z-a) \cdot (z^*-a) = R^2$.

Звідси отримуємо

$$z^* = a + \frac{R^2}{(z-a)}. \quad (6.1.2)$$

Зокрема, для точки z^* , симетричної до точки z відносно одиничного кола $\{z : |z| = 1\}$ маємо $z^* = \frac{1}{\bar{z}}$.

Геометричний спосіб побудови симетричної точки. Якщо точка z міститься у внутрішності кола γ , то проводимо пряму $zb \perp az$ до її перетину з колом γ в точці b . Потім через точку b проводимо дотичну до кола γ до її перетину з прямою az . Ця точка перетину і є точкою z^* симетричною до точки z відносно кола γ .

Якщо точка z міститься у зовнішності кола γ , то побудова симетричної точки виконується у зворотньому порядку.

Симетричність побудованої у такий спосіб точки в обох випадках випливає з подібності трикутників abz і abz^* .

Наступна лема містить критерій симетричності точок z і z^* відносно кола.

Лема 6.1.5 *Точки z і z^* є симетричними відносно кола γ тоді і тільки тоді, коли будь-яке коло у широкому сенсі S , що проходить через точки z і z^* , є ортогональним до кола γ .*

Доведення. Нехай точки z і z^* є симетричними відносно кола γ . Ортогональність прямої zz^* до кола γ є наслідком того, що ця пряма проходить через центр a кола γ за означенням симетричних точок.

Нехай γ' — коло, що проходить через точки z і z^* . Проведемо з центра a кола γ дотичну до кола γ' , що дотикається до цього кола в точці c . За відомою з елементарної математики властивістю квадрат дотичної $|a - c|^2$ дорівнює добутку січної на її зовнішню частину, тобто, $|a - c|^2 = |a - z^*||a - z|$. З іншого боку, цей добуток за означенням симетричних точок дорівнює R^2 . Таким чином, $|a - c|^2 = R^2$, тобто, відрізок ac дотичної до кола γ' є радіусом кола γ . Це означає, що $\gamma \perp \gamma'$.

Нехай тепер будь-яке коло у широкому сенсі, що проходить через точки z і z^* , є ортогональним до кола γ . Звідси випливає, що точки z і z^* лежать на одному промені з вершиною в центрі a кола γ . Зафіксуємо далі довільне коло, що проходить через точки z і z^* і знову проведемо з центра a кола γ дотичну до кола γ' , що дотикається до цього кола в точці c . Оскільки $\gamma' \perp \gamma$, то $|a - c| = R$. Знову скористаємося тим, що квадрат дотичної $|a - c|^2 = R^2$ дорівнює добутку січної на її зовнішню частину, тобто, $R^2 = |a - z^*||a - z|$. Це означає, що точки z і z^* є симетричними відносно кола γ .

Лема доведена.

Теорема 6.1.6 (принцип збереження симетричних точок) *При дробово-лінійному відображення симетричні відносно кола в широкому сенсі, відображаються в точки, симетричні відносно образа цього кола.*

Доведення. Нехай точки z і z^* симетричні відносно кола в широкому сенсі γ , $w(z)$ —довільне дробово-лінійне відображення, w і w^* —образи точок z і z^* відповідно при відображення $w(z)$. За круговою властивістю дробово-лінійного відображення (теорема 6.1.4) образом $w(\gamma) =: \gamma'$ кола в широкому сенсі γ є знову коло в широкому сенсі γ' .

Для доведення симетричності точок w і w^* відносно кола в широкому сенсі γ' за лемою 6.1.5 досить довести, що будь-яке коло в широкому сенсі γ_1 , що проходить через точки w і w^* , є ортогональним до γ' .

Зафіксуємо довільне коло в широкому сенсі γ_1 , що проходить через точки w і w^* . Зазначимо, що зворотнє відображення w^{-1} до дробово-лінійного відображення є також дробово-лінійним. Тому образом $w^{-1}(\gamma_1) =: \gamma_0$ кола в широкому сенсі γ_1 при цьому зворотньому відображені буде знову коло в широкому сенсі γ_0 за тією ж круговою властивістю (теорема 6.1.4). Оскільки γ_1 проходить через точки w і w^* , то його прообраз (при відображені w) γ_0 пройде через точки z і z^* . А оскільки z і z^* симетричні відносно кола в широкому сенсі γ , то за лемою 6.1.5 $\gamma_0 \perp \gamma$. Тоді їх образи $\gamma_1 = w(\gamma_0)$ і $\gamma' = w(\gamma)$ також ортогональні між собою, бо за теоремою 6.1.2 дробово-лінійне відображення є конформним на $\overline{\mathbf{C}}$, зокрема, зберігає кути між кривими.

Теорема доведена.

Інваріантність ангармонічного відношення чотирьох точок при дробово-лінійному відображенні.

Означення 6.1.4 Ангармонічним відношенням чотирьох точок z, z_1, z_2, z_3 називається відношення

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Теорема 6.1.7 Дробово-лінійне відображення однозначно визначається за трьома точками $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbf{C}}$ та їх образами $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbf{C}}$ з рівняння

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}. \quad (6.1.3)$$

Іншими словами, ангармонічне відношення чотирьох точок зберігається при дробово-лінійному відображенні, тобто є інваріантом цього відображення.

Доведення. Доведемо спочатку існування дробово-лінійного відображення, що задовольняє рівняння (6.1.3), тобто, задану трійку точок z_1, z_2, z_3 відображає у задану трійку точок w_1, w_2, w_3 .

Розглянемо наступні два дробово-лінійних відображень

$$\xi_1 := \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}, \quad \xi_2 := \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}.$$

Ясно, що $\xi_1 : z_1, z_2, z_3 \rightarrow 0, \infty, 1$, а $\xi_2 : w_1, w_2, w_3 \rightarrow 0, \infty, 1$, тобто, відображення ξ_1 трійку точок z_1, z_2, z_3 відображає у трійку $0, \infty, 1$, а відображення ξ_2 трійку точок w_1, w_2, w_3 – у ту ж трійку $0, \infty, 1$. Тоді суперпозиція відображень $\xi_2^{-1} \circ \xi_1$ трійку точок z_1, z_2, z_3 відображає у трійку точок w_1, w_2, w_3 .

Доведемо тепер єдиність відображення, що задану трійку точок z_1, z_2, z_3 відображає у задану трійку w_1, w_2, w_3 . Нехай w – таке відображення. Доведемо, що $w = \xi_2^{-1} \circ \xi_1$. По-перше, зауважимо, що дробово-лінійне відображення

$f := \xi_2 \circ w \circ \xi_1^{-1}$ трійку точок $0, \infty, 1$ відображає у ту саму трійку. Оскільки $f(\infty) = \infty$, то відовраження f лінійне, тобто, $f(z) = Az + B$. Оскільки $f(0) = 0$, то $B = 0$. Нарешті, з умови $f(1) = 1$ маємо $A = 1$. Отже, відовраження f є тотожним відовраженням I . Тоді з рівняння $I = \xi_2 \circ w \circ \xi_1^{-1}$ отримуємо $w = \xi_2^{-1} \circ \xi_1$.

Теорема доведена.

Оскільки коло (круг) в широкому сенсі задається трійкою точок (межевим колом), то з теореми 6.1.7 одразу випливає такий наслідок.

Наслідок 6.1.8 *Будь-яке коло (круг) в широкому сенсі можна вібодразити в будь-яке інше коло (круг) в широкому сенсі за допомогою деякого дробово-лінійного відовраження.*

Приклад 1. Знайти загальний вид дробово-лінійного відовраження верхньої півплощини $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на одиничний круг $\{w : |w| < 1\}$.

Нехай w – шукане дробово-лінійне відовраження. За принципом відповідності меж (теорема 7.4.2) дійсна пряма відовражається на одиничне коло. Оскільки дробово-лінійна функція однолиста на розширеній комплексній площині (теорема 6.1.1), існує така точка a , $\operatorname{Im} a > 0$, що $w(a) = 0$. Тоді за принципом збереження симетричних точок (теорема 6.1.6), точка \bar{a} , що симетрична до точки a відносно дійсної прямої, відовражається у точку $0^* = \infty$, що симетрична до точки 0 (центра одиничного кола) відносно одиничного кола. Таким чином, відовраження w має вид

$$w = k \frac{z - a}{z - \bar{a}}, \quad \operatorname{Im} a > 0, \quad k \in \mathbf{C}.$$

Оскільки за принципом відповідності меж (теорема 7.4.2) точка 0 відовражається в деяку точку одиничного кола $\{w : |w| = 1\}$, то

$$1 = |w(0)| = \left| k \frac{0 - a}{0 - \bar{a}} \right| = |k|.$$

Таким чином, $k = e^{i\alpha}$, де $\alpha \in \mathbf{R}$, а загальний вид дробово-лінійного відовраження $w : \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \rightarrow \{w : |w| < 1\}$ задається формулою

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{z - \bar{a}}, \quad \operatorname{Im} a > 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Приклад 2. Знайти загальний вид дробово-лінійного відовраження $w : \{z : |z| < 1\} \rightarrow \{w : |w| < 1\}$.

Нехай w – шукане дробово-лінійне відовраження. За принципом відповідності меж (теорема 7.4.2) одиничне коло $\{z : |z| = 1\}$ відовражається на одиничне коло $\{w : |w| = 1\}$. Оскільки дробово-лінійна функція однолиста на розширеній комплексній площині (теорема 6.1.1), існує така точка a , $|a| < 1$, що $w(a) = 0$. Тоді за принципом збереження симетричних точок (теорема 6.1.6), точка $(\bar{a})^{-1}$, що симетрична до точки a відносно одинично-го кола $\{z : |z| = 1\}$ (формула 6.1.2), відовражається у точку $0^* = \infty$, що

симетрична до точки 0 (центра одиничного кола) відносно одиничного кола $\{w : |w| = 1\}$. Таким чином, відображення w має вид

$$w = k \frac{z - a}{z - \frac{1}{\bar{a}}} = k_1 \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \quad |a| < 1, \quad k_1 \in \mathbf{C}.$$

Оскільки за принципом відповідності меж точка 1 відображається в деяку точку одиничного кола $\{w : |w| = 1\}$, то

$$1 = |w(1)| = \left| k_1 \frac{1 - a}{1 - \bar{a}} \right| = |k_1|.$$

Таким чином, $k_1 = e^{i\alpha}$, де $\alpha \in \mathbf{R}$, а загальний вид дробово-лінійного відображення $w : \{z : |z| < 1\} \rightarrow \{w : |w| < 1\}$ задається формулою

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \quad |a| < 1, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Зауваження 2. Якщо при знаходженні дробово-лінійного відображення, що задовольняє рівняння (6.1.3) деякі з точок $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ дорівнюють нескінченості, треба врахувати наступну обставину. Будь-яка з цих точок входить в рівняння (6.1.3) двічі, один раз у чисельник, другий – у знаменник. Нехай, наприклад, $z_1 = \infty$. Розглянемо дріб $\frac{z - z_1}{z_3 - z_1}$, що містить точку z_1 . Оскільки $\frac{z - z_1}{z_3 - z_1} \rightarrow 1$ при $z_1 \rightarrow \infty$, то розв'язуючи рівняння (6.1.3), треба різниці $z - z_1$ і $z_3 - z_1$, що містять точку z_1 , замінити на 1.

Приклад 3. а) Знайти дробово-лінійне відображення w , що задовольняє умови $\infty \rightarrow 1$, $1 \rightarrow \infty$, $2 \rightarrow 2$; б) знайти образ першої чверті при цьому відображення.

а) За теоремою 6.1.7 відображення, що задану трійку точок z_1, z_2, z_3 відображає у задану трійку точок w_1, w_2, w_3 існує, єдине і його можна знайти з рівняння 6.1.3. Оскільки $z_1 = \infty$ і $w_2 = \infty$, то з урахуванням зауваження 2 це рівняння матиме наступний вигляд

$$\frac{1}{z - 1} : \frac{1}{2 - 1} = \frac{w - 1}{1} : \frac{2 - 1}{1}.$$

З цього рівняння отримуємо $w = \frac{z}{z - 1}$. Неважко перевірити, що знайдене відображення задовольняє умови задачі.

б) Знайдемо образ першої чверті $G_1 := \{z = x + iy : x > 0, y > 0\}$. Оскільки межа області G_1 складається з двох променів, один з яких міститься на дійсній осі, інший – на уявній, то спочатку знайдемо образи дійсної і уявної прямих. За круговою властивістю (теорема 6.1.4) образами обох прямих буде коло у широкому сенсі.

Знайдемо образ дійсної прямої. Оскільки ця пряма проходить через точку 1, що відображається у нескінченність, то враховуючи зауваження 1, робимо висновок, що образом дійсної осі буде пряма. Її легко знайти за двома

точками, що є образами двох довільно взятих точок на дійсній осі. Але в даному прикладі це можна зробити без обчислень, якщо прийняти до уваги, що знайдена функція $w = \frac{z}{z-1}$ для дійсних z приймає дійсні значення. Отже, образом дійсної осі є дійсна вісь.

Знайдемо образ уявної прямої. Оскільки ця пряма не проходить через точку 1, що відображається у нескінченість, то враховуючи зауваження 1, робимо висновок, що образом уявної осі буде коло. Знайдемо спочатку його центр a . Для цього до умови $1 \rightarrow \infty$ застосуємо принцип збереження симетричних точок (теорема 6.1.6). Згідно з цим принципом маємо $1^* \rightarrow \infty^*$. Ясно, що $1^* = -1$ (тут мається на увазі симетрія відносно уявної осі). Крім того, за означенням 6.1.3 маємо $\infty^* = a$ (тут мається на увазі симетрія відносно шуканого кола), де a — центр шуканого кола. Отже, $-1 = 1^* \rightarrow \infty^* = a$, тобто, $a = w(-1) = \frac{1}{2}$. Знайдемо тепер радіус кола. Для цього досить знайти деяку точку кола. Оскільки в коло відображається уявна пряма, то, наприклад, точка $w(0) = 0$ міститься на шуканому колі. Отже, радіус кола $R = |0 - a| = \frac{1}{2}$.

Знайдемо тепер $D_1 := w(G_1)$. Зазначимо, що знайдені образи дійсної осі (дійсна вісь) і уявної осі (коло $\{w : |w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$) розбивають площину w на 4 області D_i , $i = 1, \dots, 4$, а їх прообрази (дійсна і уявна осі) також розбивають площину z на 4 області G_i , $i = 1, \dots, 4$. Тому згідно з принципами збереження області і відповідності меж (теорема 7.2.2, 7.4.2) та з урахуванням однолистості дробово-лінійного відображення (теорема 6.1.1) область G_1 відображається в одну з областей D_i , позначимо її D_1 . Щоб знайти цю область досить знати одну точку шуканої області. Візьмемо точку області G_1 , наприклад, точку $1 + i$. Її образ $w(1 + i) = 1 - i$ міститься в шуканій області D_1 . Тепер очевидно, що $D_1 = \{w : \operatorname{Im} w < 0, |w - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$, бо саме в цій області міститься точка $1 - i$.

Приклад 4. а) Знайти дробово-лінійне відображення w , що задовольняє умови $1 \rightarrow 0$, $-1 \rightarrow \infty$, $2 \rightarrow 1$; б) знайти образ області $G := \{z : |z| < 2\}$ при цьому відображені.

а) За теоремою 6.1.7 відображення, що задану трійку точок z_1, z_2, z_3 відображає у задану трійку точок w_1, w_2, w_3 існує, єдине і його можна знайти з рівняння 6.1.3. Але в даному прикладі з перших двох умов відомі нулі чисельника і знаменника шуканої дробово-лінійної функції. Отже, ця функція w має вид $w = k \frac{z-1}{z+1}$, де коефіцієнт k легко знайти з третьої умови. Маємо

$$1 = w(2) = k \frac{2-1}{2+1} = \frac{k}{3}.$$

Таким чином, $k = 3$, $w = 3 \frac{z-1}{z+1}$.

Знайдемо тепер образ межі області G , тобто, кола $K := \{z : |z| = 2\}$. Оскільки це коло не проходить через точку -1 , що відображається у нескінченість, то згідно із зауваження 1 образом кола K буде коло, позначимо його K' . Знайдемо спочатку його центр a . Для цього до умови $-1 \rightarrow \infty$ застосуємо принцип збереження симетричних точок (теорема 6.1.6). Згідно з цим принципом маємо $(-1)^* \rightarrow \infty^*$. Знайдемо $(-1)^*$ (тут мається на увазі симетрія відносно кола K). За означенням 6.1.3 точка $(-1)^*$ міститься на

промені $(-\infty, 0]$ і задовольняє умову $|(-1)^* - 0| \cdot |-1 - 0| = 2^2$. Звідси отримуємо $(-1)^* = -4$. Крім того, за означенням 6.1.3 маємо $\infty^* = a$ (тут мається на увазі симетрія відносно кола K'). Отже, $-4 = (-1)^* \rightarrow \infty^* = a$, тобто, $a = w(-4) = 5$. Знайдемо тепер радіус кола K' . Для цього досить знайти деяку точку цього кола. Оскільки в коло K' відображається коло K , оберемо точку на колі K , наприклад, точку 2. Тоді точка $w(2) = 1$ міститься на колі K' . Отже, радіус цього кола $R = |5 - 1| = 4$.

Знайдемо, нарешті, $D := w(G)$. Згідно з принципами збереження області і відповідності меж (теорема 7.2.2, 7.4.2) та з урахуванням однолистості дробово-лінійного відображення (теорема 6.1.1) область G відображається або у внутрішність кола K' , або у його зовнішність. Щоб з'ясувати це, досить знати одну точку шуканої області D . Візьмемо точку області G , наприклад, точку 0. Її образ $w(0) = -3$ міститься в області D . Тепер очевидно, що $D = \{w : |w - 5| > 4\}$, бо саме в цій області міститься точка -3 .

6.2 Степенева функція та корінь

. Степенева функція.

Функція $w = z^n$, $n \in \mathbf{N}$, є регулярною у всій комплексній площині. Оскільки $w'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ при $z \neq 0$, то відображення степеневою функцією є конформним у всій комплексній площині за винятком (при $n > 1$) точки 0 згідно з твердженням 2.7.3.

Твердження 6.2.1 (основні геометричні властивості функції $w = z^n$).

Функція $w = z^n$ здійснює наступні відображення:

- 1) $w : \{z : \arg z = \varphi\} \rightarrow \{w : \arg w = n\varphi\}$, $\varphi \in \mathbf{R}$;
- 2) $w : \{z : |z| = r\} \rightarrow \{w : |w| = r^n\}$, $r > 0$, причому коли точка z пробігає коло $\{z : |z| = r\}$, точка w пробігає коло $\{w : |w| = r^n\}$ n разів.

Доведення. 1) Параметричне рівняння променя $\{z : \arg z = \varphi\}$ має вид $z = re^{i\varphi}$, $r \in [0, \infty)$. За формулою Муавра отримуємо рівняння образа цього променя. Воно задається формулою $w = \rho e^{in\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, де $\rho = r^n$. Це – параметричне рівняння променя $\{w : \arg w = n\varphi\}$.

2) Параметричне рівняння кола $\{z : |z| = r\}$ має вид $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. За формулою Муавра отримуємо рівняння образа цього кола. Воно задається формулою $w = r^n e^{i\psi}$, $\psi \in [0, 2n\pi]$, де $\psi = n\varphi$. Це – параметричне рівняння кола $\{w : |w| = r^n\}$ проходжуваного n разів.

Зауваження 1. За першою властивістю степенева функція збільшує кути з вершиною у точці 0 в n разів. Тому відображення степеневою функцією $w = z^n$ не є конформним у точці 0 при $n > 1$.

Області однолистості степеневої функції. За означенням 2.7.4 область G є областю однолистості степеневої функції тоді і тільки тоді, коли вона не містить різних точок $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ і $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, для яких $z_1^n = z_2^n$. Це

рівняння рівносильно системі рівнянь $r_1 = r_2$, $n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Звідси

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (6.2.1)$$

Таким чином, область G є областю однолистості степеневої функції тоді і тільки тоді, коли вона не містить різних точок $z_1 = re^{i\varphi_1}$ і $z_2 = re^{i\varphi_2}$, аргументи яких φ_1 і φ_2 пов'язані рівністю (6.2.1). Найважливішим прикладом такої області є область $D^\alpha := \{z : \alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n}\}$, тобто кут величиною $\frac{2\pi}{n}$ з вершиною в точці 0. За допомогою властивості 1 (тврдження 6.2.1), згідно з якою функція $w = z^n$ збільшує кути з вершиною у точці 0 в n разів, приходимо до висновку, що степенева функція здійснює відображення $w : D^\alpha \rightarrow \mathbf{C}_{n\alpha} := \{w : n\alpha < \arg w < n\alpha + 2\pi\}$.

Таким чином, відображення степеневою функцією є однолистим в області D^α , конформним в кожній точці цієї області і відображає цю область в комплексну площину \mathbf{C} з розрізом уздовж променя $\{w : \arg w = n\alpha\}$. Тим самим доведено наступне

Тврдження 6.2.2 Степенева функція $w = z^n$ здійснює конформне відображення області $D^\alpha := \{z : \alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n}\}$ на комплексну площину \mathbf{C} з розрізом уздовж променя $\{w : \arg w = n\alpha\}$, тобто, на область $\mathbf{C}_{n\alpha} := \{w : n\alpha < \arg w < n\alpha + 2\pi\}$.

Корінь $w = \sqrt[n]{z}$. Відображення регулярними гілками кореня.

Функція $w = \sqrt[n]{z}$ є аналітичною в двозв'язній області $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. За теоремою про монодромію (теорема 5.2.1) у будь-якій однозв'язній області вона розпадається на регулярні гілки. Для виділення її регулярних гілок проведемо розріз уздовж променя $\{z : \arg z = \alpha\}$. В результаті отримаємо однозв'язну область $\mathbf{C}_\alpha := \mathbf{C} \setminus \{z : \arg z = \alpha\}$. В цій області функція $w = \sqrt[n]{z}$ розпадається на n регулярних гілок (приклад 3 з розділу 5.2)

$$(\sqrt[n]{z})_k := \sqrt[n]{r} \exp i \frac{\arg_\alpha z + 2\pi k}{n}, \quad \alpha < \arg_\alpha z < \alpha + 2\pi, \quad (6.2.2)$$

де $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

У площині w розглянемо відповідні області D_k^α однолистості оберненої до кореня степеневої функції $z = w^n$. Вони задаються співвідношеннями

$$D_k^\alpha := \left\{ w : \frac{\alpha + 2\pi k}{n} < \arg w < \frac{\alpha + 2\pi(k+1)}{n} \right\}.$$

За твердженням 6.2.2 степенева функція $z = w^n$ кожну з цих областей D_k^α конформно відображає на область \mathbf{C}_α . Звідси одразу отримуємо

Наслідок 6.2.3 Регулярна гілка кореня $(\sqrt[n]{z})_k$, визначена рівністю (6.2.2), конформно відображає область \mathbf{C}_α на область D_k^α .

Зауваження 2. Як відомо (приклад 3 з розділу 5.2), гілки $(\sqrt[n]{z})_k$ можна задавати, вказуючи їх значення в довільній точці області \mathbf{C}_α . Визначивши в яку з областей D_k^α потрапило це значення, можна однозначно виділити регулярну гілку кореня.

Приклад 1. Знайти образ $w(D)$ області $D := \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z < 0\}$ при відображені функцією $w(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2$.

Функція w є суперпозицією двох функцій: $w_1(z) = \frac{z-i}{z+i}$ і $w_2(w_1) = w_1^2$.

Знайдемо $D_1 := w_1(D)$. Для цього спочатку знайдемо образ одиничного кола $K := \{z : |z| = 1\}$ і уявної прямої, які утворюють межу області D . І коло і уявна пряма проходять через точку $-i$, яка відображається у нескінченість. Отже, і коло і уявна пряма відображаються в прямі, перпендикулярні між собою оскільки коло і уявна пряма ортогональні, а дробово-лінійна функція конформна у кожній точці і тому зберігає кути між кривими. Очевидно, що функція $w_1(z) = \frac{z-i}{z+i}$ на уявній осі (тобто для точок виду $z = iy, y \in \mathbf{R}$) приймає дійсні значення. Отже, уявна вісь відображається в дійсну вісь. Оскільки одиничне коло відображається в ортогональну до дійсної осі пряму, досить знайти одну точку цієї прямої. Для цього знайдемо образ довільної точки кола K , наприклад точки i . Оскільки $w_1(i) = 0$, то образ кола K пройде через точку 0. Отже, коло K відображається в уявну вісь.

Дійсна і уявна прямі, що є образами уявної осі і кола K розбивають комплексну площину на чотири області, а саме на чотири квадранти. В один з них згідно з принципами збереження області і відповідності меж (теореми 7.2.2, 7.4.2) відобразиться область D . Оскільки $-\frac{1}{2} \in D$, то її образ міститься в шуканому квадранті. Маємо $w_1(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{5} + 2i$. Ясно, що точка $-\frac{3}{5} + 2i$ належить другому квадранту $\{w_1 : \frac{\pi}{2} < \arg w_1 < \pi\}$. Отже, $D_1 := w_1(D) = \{w_1 : \frac{\pi}{2} < \arg w_1 < \pi\}$.

Залишилось знайти $w(D) = w_2(D_1)$. Оскільки степенева функція $w = w_1^2$ збільшує кути з вершиною у точці 0 вдвічі за твердженням 6.2.1, то $w(D) = \{w : \pi < \arg w < 2\pi\}$.

Приклад 2. Знайти образ $w(D)$ області $D := \mathbf{C} \setminus [-i, i]$ при відображені регулярною гілкою кореня $w(z) = \sqrt{\frac{z-i}{z+i}}$, яка задана умовою $w(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Функція w є суперпозицією двох функцій: $w_1(z) = \frac{z-i}{z+i}$ і $w_2(w_1) = \sqrt{w_1}$.

Знайдемо $D_1 := w_1(D)$. Для цього спочатку знайдемо образ межі області D , тобто, відрізка $[-i, i]$ при відображені w_1 . Очевидно, що функція $w_1(z) = \frac{z-i}{z+i}$ на уявній осі (тобто для точок виду $z = iy, y \in \mathbf{R}$) приймає дійсні значення. Отже, уявна вісь відображається в дійсну вісь. Тому образом відрізка $[-i, i]$ буде частина дійсної осі. Окільки $w_1(i) = 0, w_1(-i) = \infty$, то цією частиною є один з променів з вершиною у точці 0. Враховуючи, що $w_1(0) = -1$, маємо $w_1([-i, i]) = [-\infty, 0]$. Тому область D в силу однолистості дробово-лінійного відображення і згідно з принципами збереження області і відповідності меж (теореми 7.2.2, 7.4.2) відобразиться в область $\mathbf{C} \setminus [-\infty, 0]$, тобто, в комплексну площину з розрізом уздовж променя $\{w_1 : \arg w_1 = \pi\}$. Отже, $D_1 = \{w_1 : -\pi < \arg w_1 < \pi\} = \{w_1 : \pi < \arg w_1 < 3\pi\}$.

Знайдемо тепер $w(D) = w_2(D_1)$. Оскільки відображення корнем квадратним зменшує кути з вершиною у точці 0 вдвічі, то шуканим образом є або права півплоща $\{w : -\pi/2 < \arg w < \pi/2\}$ або ліва півплоща $\{w : \pi/2 < \arg w < 3\pi/2\}$. Оскільки гілка кореня в умові задається рівністю $w(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, а точка $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, міститься в правій півплощині, то $w(D) = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$.

6.3 Показникова функція та логарифм

Показникова функція. Функція $w = e^z$ є регулярною у всій комплексній площині, причому $(e^z)' = e^z \neq 0$. Тому відображення показниковою функцією є конформним у всій комплексній площині згідно з твердженням 2.7.3.

Твердження 6.3.1 (*основні геометричні властивості функції $w = e^z$*). *Функція $w = e^z$ здійснює наступні відображення:*

- 1) $w : \{z : \operatorname{Im} z = c\} \rightarrow \{w : \arg w = c\}, c \in \mathbf{R};$
- 2) $w : \{z : \operatorname{Re} z = d\} \rightarrow \{w : |w| = e^d\}, d \in \mathbf{R}$, причому коли точка z пробігає пряму $\{z : \operatorname{Re} z = d\}$, точка w пробігає коло $\{w : |w| = e^d\}$ безліч разів.

Доведення. 1) Параметричне рівняння прямої $\{z : \operatorname{Im} z = c\}$ має вид $z = x + ic$, $x \in (-\infty, \infty)$. Оскільки $e^{x+ic} = e^x e^{ic}$, причому $r := e^x$ пробігає промінь $[0, \infty)$ коли x пробігає пряму $(-\infty, \infty)$, то рівняння образа прямої $\{z : \operatorname{Im} z = c\}$ задається формулою $w = r e^{ic}$, $r \in [0, \infty)$. Це – параметричне рівняння променя $\{w : \arg w = c\}$.

2) Параметричне рівняння прямої $\{z : \operatorname{Re} z = d\}$ має вид $z = d + iy$, $y \in (-\infty, \infty)$. Оскільки $e^{d+iy} = e^d e^{iy} = r e^{iy}$, де $r = e^d$, то рівняння образа прямої $\{z : \operatorname{Re} z = d\}$ задається формулою $w = r e^{iy}$, $y \in (-\infty, \infty)$. Це – параметричне рівняння кола $\{w : |w| = r\}$ проходжуваного безліч разів.

Області однолистості показникової функції. За означенням 2.7.4 область G є областю однолистості показникової функції тоді і тільки тоді, коли вона не містить різних точок z_1 і z_2 , для яких $e^{z_1} = e^{z_2}$. З цього рівняння маємо $e^{z_1-z_2} = 1$, тобто, $z_1 - z_2 = \operatorname{Ln} 1 = 2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$.

Таким чином, область G є областю однолистості показникової функції тоді і тільки тоді, коли вона не містить різних точок z_1 і z_2 , що пов’язані рівністю $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$. Цю умову задовольняє полоса шириною 2π , що папралельна дійсній осі, тобто

$$\Pi^\alpha := \{z : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}.$$

Образ цієї полоси знайдемо за допомогою властивості 1 (тврдження 6.3.1), згідно з якою показникова функція відображає пряму $\{z : \operatorname{Im} z = c\}$ у промінь $\{w : \arg w = c\}$. Заповнимо полосу Π^α такими прямими $\{z : \operatorname{Im} z = c\}$, де $c \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$. Тоді їх образи $\{w : \arg w = c\}$ заповнять площину з розрізом уздовж променя $\{w : \arg w = \alpha\}$. Отже, показникова функція здійснює відображення $w : \Pi^\alpha \rightarrow \mathbf{C}_\alpha := \{w : \alpha < \arg w < \alpha + 2\pi\}$.

Таким чином, відображення показниковою функцією є однолистим в області Π^α , конформним в кожній точці цієї області і відображає цю область в комплексну площину \mathbf{C} з розрізом уздовж променя $\{w : \arg w = \alpha\}$. Тим самим доведено наступне

Твердження 6.3.2 Показникова функція $w = e^z$ здійснює конформне відображення полоси $\Pi^\alpha := \{z : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$ на комплексну площину \mathbf{C} з розрізом уздовж променя $\{w : \arg w = \alpha\}$, тобто, на область $\mathbf{C}_\alpha := \{w : \alpha < \arg w < \alpha + 2\pi\}$.

Логарифмічна функція. Відображення регулярними гілками логарифма. Функція $w = \ln z$ є аналітичною в двозв'язній області $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. За теоремою про монодромію (теорема 5.2.1) у будь-якій однозв'язній області вона розпадається на регулярні гілки. Для виділення її регулярних гілок проведемо розріз уздовж променя $\{z : \arg z = \alpha\}$. В результаті отримаємо однозв'язну область $\mathbf{C}_\alpha := \mathbf{C} \setminus \{z : \arg z = \alpha\}$. В цій області функція $w = \ln z$ розпадається на злічену кількість регулярних гілок (приклад 3 з розділу 5.2)

$$(\ln z)_k := \ln r + i(\arg_\alpha z + 2\pi k), \quad \alpha < \arg_\alpha z < \alpha + 2\pi, \quad (6.3.1)$$

де $k \in \mathbf{Z}$.

У площині w розглянемо відповідні області Π_k^α однолистості оберненої до логарифма функції $z = e^w$. Вони задаються співвідношеннями

$$\Pi_k^\alpha := \{w : \alpha + 2\pi k < \operatorname{Im} w < \alpha + 2\pi(k+1)\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

За твердженням 6.3.2 показникова функція $z = e^w$ кожну з цих областей Π_k^α конформно відображає на область $\mathbf{C}_\alpha := \{w : \alpha < \arg w < \alpha + 2\pi\}$.

Звідси одразу отримуємо

Наслідок 6.3.3 Регулярна гілка логарифма $(\ln z)_k$, визначена рівністю (6.3.1), конформно відображає область \mathbf{C}_α на область Π_k^α .

Зауваження 1. Як відомо (приклад 3 з розділу 5.2), гілки $(\ln z)_k$ можна задавати, вказуючи їх значення в довільній точці області \mathbf{C}_α . Визначивши в яку з областей Π_k^α потрапило це значення, можна однозначно виділити регулярну гілку логарифма.

Приклад 1. Знайти образ $w(D)$ полоси $D := \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$ при відображені функцією $w = \operatorname{tg} z$.

Представимо функцію $w = \operatorname{tg} z$ у вигляді суперпозиції елементарних функцій, вивчених раніше. Маємо

$$w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} = -i \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}.$$

Таким чином, функція $w = \operatorname{tg} z$ є суперпозицією наступних відображень: $w_1 = 2iz$, $w_2 = e^{w_1}$, $w_3 = -i \frac{e^{w_2}-1}{e^{w_2}+1}$.

Знайдемо спочатку $D_1 = w_1(D)$. Лінійна функція $w_1 = 2iz$ здійснює розтяг в 2 рази і поворот на кут $\arg 2i = \frac{\pi}{2}$. Тому $D_1 = \{w_1 : 0 < \operatorname{Im} w_1 < \pi\}$.

Знайдемо тепер $D_2 = w_2(D_1)$. За властивостю 1 (тврдження 6.3.1) показникова функція $w_2 = e^{w_1}$ відображає пряму $\{w_1 : \operatorname{Im} w_1 = c\}$ у промінь $\{w_2 : \arg w_2 = c\}$. Заповнимо полосу $D_1 = \{w_1 : 0 < \operatorname{Im} w_1 < \pi\}$ такими прямими $\{w_1 : \operatorname{Im} w_1 = c\}$, де $c \in (0, \pi)$. Тоді їх образи $\{w_2 : \arg w_2 = c\}$ заповнять область $\{w_2 : 0 < \arg w_2 < \pi\}$, тобто верхню півплощину. Отже, $D_2 = \{w_2 : \operatorname{Im} w_2 > 0\}$.

Знайдемо, нарешті, $w(D) = w_3(D_2)$. Спочатку знайдемо образ межі області D_2 , тобто дійсної прямої при відображені w_3 . За круговою властивістю (теорема 6.1.4) це буде коло в широкому сенсі. Оскільки, точка -1 , що відображається у нескінченості, міститься на дійсній прямій, її образом буде пряма. Очевидно, що функція $w_3 = -i \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}$ на дійсній осі приймає сутінні значення. Отже, образом межі області D_2 є уявна пряма. Вона розбиває комплексну площину на ліву і праву півплощины. В одну з них згідно з принципами збереження області і відповідності меж (теореми 7.2.2, 7.4.2) і в силу однолистості дробово-лінійної функції відображається область D_2 . Оскільки $i \in D_2$ і $w_3(i) = 1$, то образом $w_3(D_2)$ є права півплощина. Таким чином, маємо $w(D) = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$.

6.4 Функція Жуковського

Ця функція має вид $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Вона носить ім'я російського математика Жуковського, бо саме він вперше застосував цю функцію для обчислення підйомної сили крила літака.

Твердження 6.4.1 *Відображення функцією Жуковського є конформним в кожній точці області $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{-1, 1\}$.*

Доведення. Оскільки $2w'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$, $z \neq 0$, то функція Жуковського регулярна в області $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, причому $w'(z) \neq 0$ для $z \neq \pm 1$. Тоді її конформність у всіх точках області $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{-1, 1\}$, окрім точок 0 і ∞ , є наслідком твердження 6.0.1.

Доведемо конформність функції Жуковського у точці 0 . Оскільки $w(0) = \infty$, то за означенням 6.1.1 її конформність у точці 0 рівносильна конформності функції $f(z) := \frac{1}{w(z)}$ у точці 0 . Маємо $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 1}$, $f'(z) = \frac{2(1-z^2)}{(1+z^2)^2}$, $f'(0) = 2 \neq 0$. Отже, функція Жуковського конформна у точці 0 внаслідок означення 6.1.1 і твердження 6.0.1.

Доведемо конформність функції Жуковського у нескінченості. За означенням 6.1.1 її конформність у точці ∞ рівносильна конформності функції $g(z) := w(\frac{1}{z})$ у точці 0 . Але $g(z) = w(z)$ і її конформність у точці 0 вже доведена.

Твердження 6.4.1 доведено.

Області однолистості функції Жуковського. За означенням 2.7.4 область G є областю однолистості функції Жуковського тоді і тільки тоді,

коли вона не містить різних точок z_1 і z_2 , для яких $\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$. З цього рівняння маємо $z_2 = \frac{1}{z_1}$. (*)

Точку z_2 , що пов'язана з точкою z_1 рівністю (*), можна отримати з точки z_1 за допомогою суперпозиції двох наступних перетворень симетрії відносно дійсної осі ($z = \bar{z}$) і симетрії відносно одиничного кола ($z_2 = \frac{1}{\bar{z}}$), що задається формулою 6.1.2. Тому кожна з наступних чотирьох областей: верхня (нижня) півплощина, внутрішність (зовнішність) одиничного кола $\{z : |z| = 1\}$ не можуть одночасно містити точки z_1 і z_2 , що пов'язані рівністю (*). Ці чотири області є найважливішими областями однолистості функції Жуковського.

Основні геометричні властивості функції Жуковського.

Нехай $z = re^{i\varphi}$. Тоді

$$w = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right) = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + i \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \quad (6.4.1)$$

Якщо $w = u + iv$, де $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$, то рівність (6.4.1) рівносильна наступній системі рівностей

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \quad (6.4.2)$$

Твердження 6.4.2 Функція Жуковського $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ здійснює наступні відображення:

1) коло $\{z : |z| = r\}$, $r \neq 1$, – відображає в еліпс \mathcal{E}_r з фокусами в точках ± 1 , що задається рівнянням

$$\frac{u^2}{a_r^2} + \frac{v^2}{b_r^2} = 1, \quad a_r := \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad b_r := \frac{1}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right|, \quad (6.4.3)$$

де a_r і b_r – півосі еліпса \mathcal{E}_r , при цьому одиничне коло $\{z : |z| = 1\}$ відображається у відрізок $[-1, 1]$, проходжуваний двічі;

2) промінь $\{z : \arg z = \varphi\}$, $\varphi \in (-\pi, \pi] \setminus \{0, \pi, \pm \frac{\pi}{2}\}$, – відображає в одну з гілок гіперболи Γ_φ з вершинами в точках $\pm \cos \varphi$, що задається рівнянням:

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1, \quad (6.4.4)$$

крім того, $\Gamma_0 = [1, \infty]$ (промінь проходиться двічі у протилежних напрямках), $\Gamma_\pi = [-\infty, -1]$ (промінь проходиться двічі у протилежних напрямках), $\Gamma_{\pm \frac{\pi}{2}}$ – уявні осі, проходжувані знизу вверх і зверху вниз відповідно.

Доведення. 1) Параметричне рівняння кола $\{z : |z| = r\}$ має вид $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тоді образ цього кола задається рівнянням (6.4.1), або системою рівнянь (6.4.2). Виключаючи з цієї системи параметр φ за допомогою тотожності $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, отримуємо рівняння (6.4.3) образа цього кола. Це – відоме рівняння еліпса \mathcal{E}_r . Рівність $\mathcal{E}_1 = [-1, 1]$ одразу випливає з (6.4.2).

2) Параметричне рівняння променя $\{z : \arg z = \varphi\}$ має вид $z = re^{i\varphi}$, $r \in [0, \infty]$. Тоді образ цього променя задається рівнянням (6.4.1), або системою рівнянь (6.4.2). Виключаючи з цієї системи параметр r за допомогою рівності $a_r^2 - b_r^2 = 1$, отримуємо рівняння (6.4.4) образа цього променя. Це – відоме рівняння гіперболи Γ_φ . Оскільки промінь $\{z : \arg z = \varphi\}$ є зв'язною множиною, то його образ при неперервному відображені також є зв'язною множиною, тобто, одією з гілок гіперболи Γ_φ .

Друга частина твердження 2 випливає безпосередньо з системи рівнянь (6.4.2).

Зауваження 1. Для довільної пари $(\mathcal{E}_r, \Gamma_\varphi)$, за винятком двох пар $(\mathcal{E}_1, \Gamma_0)$ і $(\mathcal{E}_1, \Gamma_\pi)$, має місце співвідношення $\mathcal{E}_r \perp \Gamma_\varphi$, тобто, еліпс \mathcal{E}_r і гіпербола Γ_φ ортогональні між собою, оскільки їх прообрази – коло $\{z : |z| = r\}$ і промінь $\{z : \arg z = \varphi\}$ є ортогональними, а відображення функцією Жуковського за твердженням 6.4.1 є конформним у всіх точках розширеної комплексної площини за винятком точок ± 1 .

Зауваження 2. Яка з двох гілок гіперболи Γ_φ є образом даного променя $\{z : \arg z = \varphi\}$ легко з'ясувати за знаком $\cos \varphi$ із системи рівнянь (6.4.2). За допомогою тієї ж системи рівнянь з'ясовується напрямок проходження даної гілки гіперболи за знаком $\sin \varphi$. Отже, образом променя $\{z : \arg z = \varphi\}$ з першої або четвертої чверті є права гілка гіперболи Γ_φ (проходжувана знизу вверх або зверху вниз відповідно), а образом променя $\{z : \arg z = \varphi\}$ з другої або третьої чверті є ліва гілка гіперболи Γ_φ (проходжувана знизу вверх або зверху вниз відповідно).

Образами променів $\{z : \arg z = \varphi\}$ і $\{z : \arg z = -\varphi\}$, $\varphi \in (0, \pi)$, є одна і та ж гілка гіперболи, але проходжувана в різних напрямках.

Зауваження 3. Має місце рівність $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_{\frac{1}{r}}$ (як рівність множин), але для $r \neq 1$ ці еліпси проходяться в протилежних напрямках. При $r > 1$ еліпс \mathcal{E}_r проходиться проти годинникової стрілки, а при $r < 1$ еліпс \mathcal{E}_r проходиться за годинниковою стрілкою. Ці факти також легко з'ясувати за допомогою системи рівнянь (6.4.2).

У наступному твердженні з'ясовані образи основних областей однолистості при відображені функцією Жуковського.

Твердження 6.4.3 1) Функція Жуковського конформно відображає кожну з областей $\{z : |z| < 1\}$ і $\{z : |z| > 1\}$ на область $\overline{\mathbf{C}} \setminus [-1, 1]$.

2) Функція Жуковського конформно відображає верхню (нижню) півплощину на область $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, \infty]\}$.

Доведення. Як було з'ясовано раніше, всі чотири області $\{z : |z| < 1\}$, $\{z : |z| > 1\}$, $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ є областями однолистості функції Жуковського і за твердженням 6.4.1 в будь-якій точці кожної з цих областей відображення функцією Жуковського є конформним. Отже, відображення цією функцією є конформним в кожній з цих областей. Залишилося знайти образи цих областей.

Знайдемо образ внутрішності одиничного кола $\{z : |z| < 1\}$. Заповнимо її колами $\{z : |z| = r\}$, $r \in [0, 1)$. За твердженням 6.4.2 образом кожного з кіл

$\{z : |z| = r\}$, $r \in (0, 1)$, є еліпс \mathcal{E}_r . Коли r зростає в проміжку $(0, 1)$ піввісь $a_r := \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$ еліпса \mathcal{E}_r неперервно і монотонно спадає від ∞ до 1, а піввісь $b_r := \frac{1}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right|$ – неперервно і монотонно спадає від ∞ до 0. Таким чином, еліпси \mathcal{E}_r , $r \in [0, 1]$, заповнять область $\overline{\mathbf{C}} \setminus [-1, 1]$.

Знайдемо образ зовнішності одиничного кола $\{z : |z| > 1\}$. Заповнимо її колами $\{z : |z| = r\}$, $r \in (1, \infty]$. Оскільки має місце рівність $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_{\frac{1}{r}}$ (як рівність множин), то еліпси \mathcal{E}_r , $r \in (1, \infty]$, заповнять ту ж саму множину, що і еліпси \mathcal{E}_r , $r \in [0, 1)$, тобто, множину $\overline{\mathbf{C}} \setminus [-1, 1]$.

Знайдемо образ верхньої півплощини $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Заповнимо її променями $\{z : \arg z = \varphi\}$, $\varphi \in (0, \pi)$. За твердженням 6.4.2 образом кожного з променів $\{z : \arg z = \varphi\}$ є одна з гілок гіперболи Γ_φ . Коли φ зростає в проміжку $(0, \frac{\pi}{2})$ праві гілки гіпербол Γ_φ заповнюють праву півплощину $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ з розрізом уздовж променя $\Gamma_0 = [1, +\infty]$. Крім того, за твердженням 6.4.2 промінь $\{z : \arg z = \frac{\pi}{2}\}$ відображається в уявну вісь. Коли φ зростає в проміжку $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ліві гілки гіпербол Γ_φ заповнюють ліву півплощину $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ з розрізом уздовж променя $\Gamma_0 = [-\infty, -1]$. Отже, коли φ зростає в проміжку $(0, \pi)$ гілки гіпербол Γ_φ заповнюють область $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, \infty]\}$.

Образом нижньої півплощини $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ є та ж сама область $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, \infty]\}$ оскільки образами променів $\{z : \arg z = \varphi\}$ і $\{z : \arg z = -\varphi\}$, $\varphi \in (0, \pi)$, є одна і та ж гілка гіперболи, проходжувана в різних напрямках.

Твердження 6.4.3 доведене.

Приклад 1. Знайти образ одиничного півкруга $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при відображені функцією Жуковського.

Заповнимо півкруг радіусами $re^{i\varphi}$, $r \in (0, 1)$, змінюючи кут φ в проміжку $(0, \pi)$. Радіус $re^{i\varphi}$, $r \in (0, 1)$, міститься на промені $\{z : \arg z = \varphi\}$, який за твердженням 6.4.2 відображається в одну з гілок гіперболи Γ_φ . При цьому радіус $re^{i\varphi}$, $r \in (0, 1)$, відображається в частину гіперболи Γ_φ , що розміщена в нижній пів площині, оскільки в параметричному рівнянні цієї гіперболи (6.4.2) уявна частина v від'ємна для $r \in (0, 1)$. Неважко з'ясувати, що частини гіпербол Γ_φ , $(0, \pi)$, які розміщені в нижній пів площині, заповнять нижню пів площину,

Таким чином, функція Жуковського конформно відображає одиничний півкруг $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ на нижню пів площину $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Приклад 2. Знайти образ полоси $D := \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$ при відображені функцією $w = \sin z$.

Представимо функцію $w = \sin z$ суперпозицією функцій, вивчених раніше. Маємо

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{iz}}{i} + \frac{1}{\frac{e^{iz}}{i}} \right).$$

Таким чином, функція $w = \sin z$ є суперпозицією наступних функцій $w_1 = iz$, $w_2 = e^{w_1}$, $w_3 = -iw_2$, $w_4 = \frac{1}{2} \left(w_3 + \frac{1}{w_3} \right)$.

Знайдемо $D_1 := w_1(D)$. Оскільки відображення $w_1 = iz$ здійснює поворот на кут $\arg i = \frac{\pi}{2}$, то $D_1 := \{w_1 : 0 < \operatorname{Im} w_1 < \frac{\pi}{2}\}$.

Знайдемо $D_2 := w_1(D_1)$. Заповнимо полосу $D_1 := \{w_1 : 0 < \operatorname{Im} w_1 < \frac{\pi}{2}\}$ прямими $\{w_1 : \operatorname{Im} w_1 = c\}$, $c \in (0, \frac{\pi}{2})$. Пряму $\{w_1 : \operatorname{Im} w_1 = c\}$ функція $w_2 = e^{w_1}$ відображає в промінь $\{w_2 : \arg w_2 = c\}$ за твердженням 6.3.1. Ці промені заповнюють першу чверть. Отже, $D_2 = \{w_2 : 0 < \arg w_2 < \frac{\pi}{2}\}$.

Знайдемо $D_3 := w_3(D_2)$. Оскільки відображення $w_3 = -iw_2$ здійснює поворот на кут $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$, то $D_3 := \{w_3 : -\frac{\pi}{2} < \arg w_3 < 0\}$, тобто, четверта чверть.

Знайдемо $D := w_4(D_3)$. Заповнимо область $D_3 := \{w_3 : -\frac{\pi}{2} < \arg w_3 < 0\}$ променями $\{w_3 : \arg w_3 = \varphi\}$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. За твердженням 6.4.2 (з урахуванням зауваження 2) образом променя $\{w_3 : \arg w_3 = \varphi\}$ є права гілка гіперболи Γ_φ . Неважко бачити, що ці гілки гіпербол заповнюють праву площину з розрізом уздовж променя $[1, +\infty]$.

Таким чином, $w(D) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\} \setminus [1, +\infty]$.

6.5 Приклади побудови конформних відображень

Основною задачею теорії конформних відображень є побудова конформного відображення $w : G_1 \rightarrow G_2$, де G_1 і G_2 – задані області. Найважливішою теоремою, що описує умови існування такого відображення є

Теорема 6.5.1 (Ріман). Для будь-якої однозв'язної області G , межа якої містить щонайменше дві точки, існує регулярна в області G функція, яка конформно відобразує область G на одиничний круг $\{z : |z| < 1\}$.

Означення 6.5.1 Дві області, кожну з яких можна конформно відобразити на іншу, називаються конформно еквівалентними.

Наслідок 6.5.2 Будь-які дві однозв'язні області, межі яких містять щонайменше дві точки, є конформно еквівалентними.

Для розв'язання основної задачі теорії конформних відображень в конкретних випадках використовують геометричні властивості конкретних відображень. При цьому відображення будеться у декілька кроків, як суперпозиція кількох більш простих відображень.

Приклад 1. Знайти функцію, що здійснює конформне відображення $w : \{z : \operatorname{Re} z > 0, |z - 2| > 2\} \rightarrow \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

Зауважимо, що межею верхньої півплощини $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ є пряма, а частину межі відображуваної області $\{z : \operatorname{Re} z > 0, |z - 2| > 2\}$ утворює коло. Тому треба "спрямити" це коло, тобто відобразити його в пряму. При цьому іншу частину межі відображуваної області, – пряму, треба також відобразити в пряму. Таку задачу можна розв'язати за допомогою дробово-лінійної функції, враховуючи її кругову властивість. Для розв'язання цієї задачі треба спільну точку зазначених кола і прямої, а саме точку 0, відобразити у нескінченість. Прикладом такої функції є $w_1 = \frac{1}{z}$.

Знайдемо образ області $D := \{z : \operatorname{Re} z > 0, |z - 2| > 2\}$ при відображення функцією $w_1 = \frac{1}{z}$. Для цього спочатку знайдемо образ її межі. Очевидно, на уявній осі функція $w_1 = \frac{1}{z}$ приймає суттєві значення. Тому образом уявної осі є уявна вісь. Оскільки коло $\{z : |z - 2| = 2\}$ є дотичним до уявної осі, а дробово-лінійна функція зберігає кути між кривими, то образом цього кола є паралельна до уявної осі пряма. Для її знаходження досить знайти одну точку цієї прямої. Оберемо, наприклад, точку 4 на колі, її образ $w_1(4) = \frac{1}{4}$ міститься на шуканій прямій. Отже, ця пряма – $\{w_1 : \operatorname{Re} w_1 = \frac{1}{4}\}$. Ця пряма разом з уявною віссю за принципами збереження області і відповідності меж (теореми 7.2.2, 7.4.2) утворюють межу шуканої області $D_1 := w_1(D)$. Таким чином, $D_1 = \{w_1 : 0 < \operatorname{Re} w_1 < \frac{1}{4}\}$.

Відобразимо тепер полосу $D_1 = \{w_1 : 0 < \operatorname{Re} w_1 < \frac{1}{4}\}$ на полосу $D_2 = \{w_2 : 0 < \operatorname{Im} w_2 < \pi\}$, яку внаслідок твердженням 6.3.1 показникова функція $w = e^{w_2}$ відображає в потрібну верхню півплощину. Щоб відобразити полосу D_1 на полосу D_2 треба виконати наступні два переворення: поворот на кут $\frac{\pi}{2}$ і розтяг в 4π разів. Ці перетворення здійснюють лінійна функція $w_2 = 4\pi i w_1$.

Отже, шукане конформне відображення $w : \{z : \operatorname{Re} z > 0, |z - 2| > 2\} \rightarrow \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ здійснює суперпозиція наступних трьох функцій: $w_1 = \frac{1}{z}$, $w_2 = 4\pi i w_1$, $w = e^{w_2}$. Таким чином, $w = e^{\frac{4\pi i}{z}}$.

Приклад 2. Знайти функцію, що здійснює конформне відображення $w : \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, ih] \rightarrow \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, де $h > 0$.

Спочатку відобразимо область $D := \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, ih]$ на площину з розрізом уздовж променя $[-h^2, +\infty]$. Для цього треба всі кути з вершиною у точці 0 збільшити вдвічі. Таке відображення здійснює степенева функція $w_1 = z^2$. Зокрема, відрізок $[0, ih]$ відобразиться у відрізок $[-h^2, 0]$, а промені $[-\infty, 0]$, $[0, +\infty]$ – у промінь $[0, +\infty]$. Отже, $D_1 := w_1(D) = \overline{\mathbf{C}} \setminus [-h^2, +\infty]$.

Тепер за допомогою зсуву $w_2 := w_1 + h^2$ здійснимо наступне відображення $w_2 : D_1 \rightarrow D_2 := \overline{\mathbf{C}} \setminus [0, +\infty]$.

Отримана область D_2 – це кут $\{w_2 : 0 < \arg w_2 < 2\pi\}$ з вершиною у точці 0. Щоб отримати верхню півплощину $\{w : 0 < \arg w < \pi\}$ залишилось зменшити його вдвічі за допомогою підходящої гілки кореня $w = \sqrt{w_2}$. Її можна вилілити, вказавши її значення в деякій точці області D_2 , наприклад, $\sqrt{-1} = i$.

Таким чином, шукана функція є суперпозицією наступних функцій $w_1 = z^2$, $w_2 = w_1 + h^2$, $w = \sqrt{w_2}$ тобто, $w = \sqrt{z^2 + h^2}$.

Приклад 3. Знайти функцію, що здійснює конформне відображення $w : \overline{\mathbf{C}} \setminus [-i, +i] \rightarrow \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

Спочатку відобразимо область $D := \overline{\mathbf{C}} \setminus [-i, +i]$ на область $\overline{\mathbf{C}} \setminus [0, +\infty]$. Це можна зробити за допомогою дробово-лінійної функції, що відрізок $[-i, i]$ відображає на промінь $[0, +\infty]$. Для цього один з кінців цього відрізка треба відобразити в точку 0, інший – в нескінченність. Такій умові задовільняє, наприклад, відображення $w_1 = -\frac{z+i}{z-i}$. Ця функція відображає точку 0 у точку

1. Отже, внаслідок однолистості дробово-лінійної функції, вона відображає відрізок $[-i, i]$ на промінь $[0, +\infty]$. Тому за принципами відповідності меж і зображення області (теореми 7.4.2, 7.2.2) функція w_1 здійснює відображення області $D := \overline{\mathbf{C}} \setminus [-i, +i]$ на область $\overline{\mathbf{C}} \setminus [0, +\infty]$.

Залишилось, як і в попередньому прикладі, за допомогою однієї з гілок кореня $w = \sqrt{w_1}$ відобразити площину з розрізом $\overline{\mathbf{C}} \setminus [0, +\infty]$ на верхню півплощину. Таким чином, маємо шукане відображення $w = \sqrt{-\frac{z+i}{z-i}}$.

Приклад 4. Знайти функцію, що здійснює конформне відображення $w : \{z : |z| > 1, z \neq [1, 2]\} \rightarrow \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

За твердженням 6.4.3 функція Жуковського $w_1 = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ відображає зовнішність одиничного кола $w : \{z : |z| > 1\}$ на область $\overline{\mathbf{C}} \setminus [-1, +1]$. При цьому відрізок $[1, 2]$ відображається у відрізок $[w_1(1), w_1(2)]$, тобто у відрізок $[1, \frac{5}{2}]$. Отже, область $D := \{z : |z| > 1, z \neq [1, 2]\}$ відображається в область $\overline{\mathbf{C}} \setminus [-1, \frac{5}{2}]$. Далі, як у прикладі 3, за допомогою функції $w_2 := -\frac{w_1+1}{w_1-\frac{5}{2}}$ відображаємо цю область в площину з розрізом $\overline{\mathbf{C}} \setminus [0, +\infty]$ і потім за допомогою однієї з гілок кореня $w = \sqrt{w_2}$ відобразимо цю площину з розрізом на верхню півплощину. Таким чином,

$$w = \sqrt{-\frac{w_1+1}{w_1-\frac{5}{2}}} = \sqrt{-\frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+1}{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})-\frac{5}{2}}}.$$

Приклад 5. Знайти функцію, що здійснює конформне відображення $w : \{z : \operatorname{Im} z > 0, 0 < \operatorname{Re} z < h\} \rightarrow \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, де $h > 0$.

Повернемо півполосу $\{z : \operatorname{Im} z > 0, 0 < \operatorname{Re} z < h\}$ на кут $\frac{\pi}{2}$ і розтягнемо її в $\frac{\pi}{h}$ разів за допомогою лінійного відображення $w_1 = \frac{\pi}{h}iz$. Отримаємо півполосу $\{w_1 : \operatorname{Re} w_1 < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$.

Кожну з півпрямих $\{w_1 : \operatorname{Re} w_1 < 0, \operatorname{Im} w_1 = c\}$, $c \in (0, \pi)$, що заповнюють цю півполосу, показникова функція $w_2 = e^{w_1}$ відображає у частину променя $\{w_2 : \arg w_2 = c\}$, що міститься в одиничному крузі $\{w_2 : |w_2| < 1\}$, тобто у радіус цього круга, який міститься на промені $\{w_2 : \arg w_2 = c\}$ (цей факт доводиться так само, як і властивість 1 твердження 6.3.1). Щі радіуси заповнять верхній одиничний півкруг $\{w_2 : |z| < 1, \operatorname{Im} w_2 > 0\}$.

За прикладом 1 розділу 6.4 функція Жуковського відображає цей півкруг на нижню півплощину. Отже, функція $w = -\frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$ цей півкруг відображає на верхню півплощину. Таким чином, маємо шукане відображення

$$w = -\frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{w_1} + \frac{1}{e^{w_1}}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{h}iz} + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{h}iz}}\right).$$

Приклад 6. Знайти функцію, що здійснює конформне відображення $w : \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1, z \neq [0, \alpha i]\} \rightarrow \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, де $\alpha \in (0, 1)$.

За прикладом 1 розділу 6.4 функція Жуковського $w_1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ відображає півкруг $\{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\}$ на нижню півплощину. При цьому відрізок $[0, \alpha i]$ відображається в промінь $[ai, -i\infty]$ уявної осі, де $a = w_1(\alpha i) = \frac{i}{2}(\alpha - \frac{1}{\alpha})$.

Тоді функція $w_2 = -\frac{1}{w_1}$ відобразить цю нижню площину з розрізом уздовж променя $[ai, -i\infty]$ уявної осі на верхню півплощину з розрізом уздовж відрізка $[0, hi]$, де $h = -\frac{1}{a}$.

Для завершення побудови потрібного відображення залишилось скористатися розв'язком задачі з прикладу 2.

Приклад 7. Знайти функцію, що здійснює конформне відображення $w : \{z : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\} \setminus [i\frac{\pi}{2} - ai, i\frac{\pi}{2}] \rightarrow \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, де $a > 0$.

При розв'язанні задачі з прикладу 5 було з'ясовано, що експонента $w_1 = e^z$ відображає півполосу $\{z : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на одиничний півкруг $\{w_1 : \operatorname{Im} w_1 > 0, |w_1| < 1\}$. При цьому очевидно, що відрізок $[i\frac{\pi}{2} - ai, i\frac{\pi}{2}]$ відображається у відрізок $[0, \alpha i]$, де $\alpha = e^{-a}$.

Таким чином, показникова функція $w_1 = e^z$ відображає задану область $\{z : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\} \setminus [i\frac{\pi}{2} - ai, i\frac{\pi}{2}]$ на одиничний півкруг з розрізом $\{w_1 : \operatorname{Im} w_1 > 0, |w_1| < 1, w_1 \neq [0, \alpha i]\}$.

Для завершення побудови потрібного відображення залишилось скористатися розв'язком задачі з попереднього прикладу.

Вправа. Використовуючи геометричні властивості елементарних функцій перевірити, що всі відображення, які утворюють суперпозиції розв'язків задач з прикладів 1–7 є конформними. Тому і функції, що є розв'язками цих задач здійснюють конформні відображення.

Розділ 7

Основні принципи теорії конформних відображень

7.1 Принцип аргументу. Теорема Руше

Нехай функція $f(z)$ регулярна і не дорівнює нулю в проколотому околі $0 < |z - a| < r$ точки $a \neq \infty$. Тоді функція $\ln f(z)$ є аналітичною в цьому околі і за теоремою про монодромію (теорема 5.2.1) розпадається в проколотому околі $0 < |z - a| < r$ з розрізом уздовж довільного радіуса на регулярні гілки.

Означення 7.1.1 Похідна регулярної гілки аналітичної функції $\ln f(z)$ називається логарифмічною похідною функції $f(z)$, тобто, логарифмічна похідна функції $f(z)$ дорівнює

$$\frac{d}{dz} \ln f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Означення 7.1.2 Логарифмічним лишком функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці a називається лишок її логарифмічної похідної в цій точці.

З означення логарифмічної похідної зрозуміло, що нулі функції є особливими точками її логарифмічної похідної. Тому функція може мати ненульовий логарифмічний лишок у своїх нулях.

Лема 7.1.1 *Логарифмічний лишок регулярної функції в точці, що є нулем цієї функції, дорівнює порядку цього нуля.*

Доведення. Нехай a – нуль порядку n , $n \in \mathbf{N}$, регулярної в точці a функції f . За критерієм порядку нуля (тврдження 3.7.1) в околі точки a функція f допускає подання $f(z) = (z-a)^n h(z)$, де $h(z)$ – регулярна в точці a функція, причому $h(a) \neq 0$. Тоді

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1}h(z) + (z-a)^n h'(z)}{(z-a)^n h(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Оскільки функція $\frac{h'(z)}{h(z)}$ є регулярною в точці a , за теоремою Тейлора її можна розгорнути в околі точки a у збіжний степеневий ряд. Отже, маємо розвинене

ння логарифмічної похідної функції f в ряд Лорана

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

З цього розвинення за твердженням 4.3.2 отримуємо $\text{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = c_{-1} = n$.

Лема доведена.

Лема 7.1.2 *Логарифмічний лишок регулярної функції в її полюсі, дорівнює порядку цього полюса зі знаком мінус.*

Доведення. Нехай a — полюс порядку n , $n \in \mathbf{N}$, регулярної в проколотому околі точки a функції f . Зауважимо, що

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{d}{dz} \ln \frac{1}{f(z)} = -\frac{g'(z)}{g(z)}, \quad g(z) := \frac{1}{f(z)}.$$

За твердженням 4.2.6 функція $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ має в точці a нуль порядку n . Для завершення доведення леми залишилось застосувати лему 7.1.1.

Означення 7.1.3 Функція f називається мероморфною в області G , якщо в цій області вона не має інших особливих точок, окрім полюсів.

Функція f називається мероморфною в замкненій області \overline{G} , якщо вона мероморфна в такій області D , що $\overline{G} \subset D$.

Означення 7.1.4 Символами $N(f)$ і $P(f)$ позначимо кількість нулів (полюсів) функції f області G з урахуванням їх кратностей, тобто кожний нуль чи полюс будемо рахувати стільки разів, який його порядок.

Теорема 7.1.3 (принцип аргументу). *Якщо функція f мероморфна в замкненій області \overline{G} комплексної площини ($\overline{G} \subset \mathbf{C}$) і не тотожна нулю в області G , а межа цієї області є зв'язною спрямлюваною кривою і не містить ні нулів, ні полюсів функції f , то*

$$N(f) - P(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (7.1.1)$$

Доведення. Доведемо спочатку, що функція f має в області G скінченну кількість полюсів p_1, p_2, \dots, p_n і скінченну кількість нулів a_1, a_2, \dots, a_m .

Дійсно, припустимо, що область G містить послідовність полюсів функції f . Тоді внаслідок компактності множини \overline{G} з цієї послідовності полюсів можна виділити збіжну до точки множини \overline{G} підпослідовність і ця точка є неізольованою особливою точкою функції f , що суперечить її мероморфності в замкненій області \overline{G} .

Припустимо тепер, що область G містить послідовність нулів a_n функції f . Тоді внаслідок компактності множини \overline{G} з цієї послідовності нулів можна

виділити збіжну до точки $a \in \overline{G}$ підпослідовність. Оскільки функція не має в замкненій області \overline{G} інших особливих точок, окрім полюсів, то існує границя $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$. Більше того, ця границя дорівнює нулю, оскільки точка a є гранично для нулів функції f . Отже, точка a є нулем функції f . За умовою межа області не містить нулів функції f . Також точка a не може збігатися з однією з точок p_1, p_2, \dots, p_n . Тому вона належить області $D := G \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. В цій області D функція f регулярна і множина її нілів має граничну точку $a \in D$. Тоді за теоремою єдності (теорема 3.7.4) функція f тотожна нулю в області D . Звідси одразу випливає, що $f \equiv 0$ в області G , що суперечить умові теореми.

Таким чином, функція f має в області G скінченну кількість полюсів p_1, p_2, \dots, p_n і скінченну кількість нулів a_1, a_2, \dots, a_m . Тоді функція $g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$ є регулярною в замкненій області \overline{G} за винятком скінченного числа точок, що містяться в області G . Отже, виконані умови теореми Коші про лишки (теорема 6.3.1). Застосовуючи цю теорему та леми 7.1.1 і 7.1.2, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=a_k} g(z) - \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=p_k} g(z) = N(f) - P(f).$$

Теорема доведена.

Геометричне формулювання принципа аргументу. Припустимо додатково до умов теореми 7.1.3, що межа ∂G області G є кусково-гладкою кривою. Нехай $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, – параметричне рівняння межі ∂G області G . Тоді

$$\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} z'(t) dt.$$

Очевидно, що первісною для підінтегральної функції в правому інтегралі цієї рівності є функція $\Phi(t) := \ln f(z(t))$, де $\ln f(z)$ – довільна регулярна гілка логарифма $\operatorname{Ln} f(z)$. Тому за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Оскільки $\operatorname{Ln} f(z) = \ln |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z)$, то для виділення регулярної гілки логарифма $\operatorname{Ln} f(z)$ уздовж межі області G досить виділити неперервну гілку $\arg f(z)$ уздовж цієї межі. Зазначимо, що приріст $\ln |f(z)|$ уздовж замкнutoї кривої ∂G дорівнює нулю. Тому

$$\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = i \{ \arg f(\beta) - \arg f(\alpha) \} =: i \Delta_{\partial G} \arg f. \quad (7.1.2)$$

Означення 7.1.5 Величина $\Delta_{\partial G} \arg f := \{\arg f(\beta) - \arg f(\alpha)\}$, де $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, – параметричне рівняння межі ∂G області G , називається приrostом аргументу функції f уздовж межі області G .

З проведених міркувань і рівностей (7.1.1) і (7.1.2) отримуємо

Теорема 7.1.4 (геометричний варіант принципу аргументу). Якщо за умов теореми 7.1.3 межа ∂G області G є кусково-гладкою кривою, то

$$N(f) - P(f) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f.$$

Зауваження 1. Величина $\Delta_{\partial G} \arg f := \{\arg f(\beta) - \arg f(\alpha)\}$ для замкнутої кривої ∂G області G є числом виду $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Таким чином, величина $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f$ з правої частини геометричного варіанту принципу аргументу є числом оборотів, що здійснює вектор $f(z)$, коли вектор z пробігає межу ∂G області G .

Теорема 7.1.5 (теорема Руше). Якщо функції f і g регулярні в замкненій області \overline{G} комплексної площини ($\overline{G} \subset \mathbf{C}$), межа якої ∂G є зв'язною кусково-гладкою кривою, причому на цій межі виконується нерівність

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad z \in \partial G, \quad (7.1.3)$$

то

$$N(f) = N(f + g),$$

де $N(f)$ – число нулів функції f в області G з урахуванням їх кратностей.

Доведення. Перевіримо, що за умов теореми Руше для кожної з функцій f і $f + g$ виконуються умови принципу аргументу. Дійсно, жодна з них не має полюсів в замкненій області \overline{G} , зокрема, на межі цієї області. Крім того, з умови (7.1.3) випливає, що ці функції на мають нулів на межі області. Тому внаслідок їх регулярності в замкненій області \overline{G} жодна з функцій f і $f + g$ не тотовожна нулю в області G . Отже, застосовуючи теорему 7.1.4, отримаємо

$$N(f) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f, \quad N(f + g) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg(f + g).$$

Таким чином, для доведення теореми Руше залишилось довести рівність

$$\Delta_{\partial G} \arg(f + g) = \Delta_{\partial G} \arg f.$$

Оскільки функція f не має нулів на межі ∂G області G , для точок $z \in \partial G$ виконується рівність $f(z) + g(z) = f(z)(1 + \frac{g(z)}{f(z)})$. Тому

$$\Delta_{\partial G} \arg(f + g) = \Delta_{\partial G} \arg f + \Delta_{\partial G} \arg \left(1 + \frac{g}{f}\right)$$

і для доведення теореми залишилось довести рівність

$$\Delta_{\partial G} \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0.$$

Оскільки за умовою (7.1.3) для вектора $\frac{g(z)}{f(z)}$, $z \in \partial G$, виконується нерівність $|\frac{g(z)}{f(z)}| < 1$, то для вектора $1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ маємо нерівність $\operatorname{Re} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) > 0$, $z \in \partial G$, тобто цей вектор залишається в правій півплощині, коли аргумент z пробігає межу ∂G області G . Отже, цей вектор не може зробити повний оборот навколо точки нуль і тому $\Delta_{\partial G} \arg \left(1 + \frac{g}{f} \right) = 0$.

Теорема доведена.

Приклад . Знайти число коренів рівняння

$$P(z) = 0 \quad (7.1.4)$$

в кільці $1 < |z| < 2$, де $P(z) := z^8 - 5z^5 - 2z + 1$.

Через N_1 позначимо число коренів рівняння (7.1.4) в крузі $|z| < 2$, а символом N_2 – число коренів цього рівняння в замкненому крузі $|z| \leq 1$. Тоді шукане число коренів рівняння (7.1.4) в кільці $1 < |z| < 2$ дорівнює $N_1 - N_2$.

Знайдемо N_1 . Нехай $f_1(z) := z^8$, $g_1(z) := -5z^5 - 2z + 1$. Тоді на колі $|z| = 2$ маємо

$$|f_1(z)| = 2^8 = 256, \quad |g_1(z)| \leq 5 \cdot 2^5 + 2 \cdot 2 + 1 = 5 \cdot 32 + 5 = 165.$$

Отже, виконана умова (7.1.3) теореми Руше, тобто, $|f_1(z)| > |g_1(z)|$ для точок z кола $\{z : |z| = 2\}$. Тому за цією тоеремою маємо

$$N_1 = N(P) = N(f_1 + g_1) = N(f_1) = 8,$$

де 8–число коренів (з урахуванням їх кратностей) рівняння $z^8 = 0$ в крузі $|z| < 2$,

Знайдемо тепер N_2 . Нехай $f_2(z) := -5z^5 + 1$, $g_2(z) := z^8 - 2z$. Тоді на колі $|z| = 1$ маємо

$$|f_2(z)| = |-5z^5 + 1| \geq 5|z|^5 - 1 = 5 - 1 = 4, \quad |g_2(z)| \leq |z|^8 + 2|z| = 1 + 2 = 3.$$

Отже, виконана умова (7.1.3) теореми Руше, тобто, $|f_2(z)| > |g_2(z)|$ для точок z кола $\{z : |z| = 1\}$. Тому рівняння (7.1.4) не має коренів на колі $\{z : |z| = 1\}$ (оскільки $P(z) = f_2(z) + g_2(z)$) і за тоеремою Руше маємо

$$N_2 = N(P) = N(f_2 + g_2) = N(f_2) = 5,$$

де 5–число коренів (з урахуванням їх кратностей) рівняння $5z^5 = 1$ в крузі $|z| < 1$,

Таким чином, шукане число коренів рівняння (7.1.4) в кільці $1 < |z| < 2$ дорівнює $N_1 - N_2 = 8 - 5 = 3$.

Вправа . За допомогою теореми Руше довести основну теорему алгебри.

7.2 Принцип збереження області

Теорема 7.2.1 Якщо функція f регулярна в області G і не є сталою в цій області, то образом $f(G)$ області G при відображені функцією f є область.

Доведення. Доведемо, що множина $f(G) := \{w : w = f(z), z \in G\}$ є зв'язною. Нехай w_1 і w_2 — довільні точки множини $f(G)$, а z_1 і z_2 — їх прообрази, тобто, $w_1 = f(z_1)$ і $w_2 = f(z_2)$, $z_1, z_2 \in G$. Оскільки множина G є областю, точки z_1 і z_2 можна з'єднати кривою γ , що міститься в області G . Тоді образ цієї кривої $f(\gamma)$ є кривою, яка з'єднує точки w_1 і w_2 і міститься в множині $f(G)$. Отже, множина $f(G)$ є зв'язною.

Доведемо тепер, що множина $f(G)$ є відкритою. Зафіксуємо довільну точку $w_0 \in f(G)$ і нехай z_0 — її прообраз, тобто, $w_0 = f(z_0)$, $z_0 \in G$. Оскільки множина G є областю, існує окіл $B(z_0, r)$ цієї точки, який міститься в області G , причому цей окіл можна обрати так, щоб $\overline{B(z_0, r)} \subset G$. Більше того, за теоремою єдності (теорема 3.7.4) існує такий окіл $O(z_0)$ точки z_0 , в якому функція $f(z) - w_0$ не має інших нулів, окрім точки z_0 (інакше функція $f(z) - w_0$ була б тотожна нулю, що неможливо за умовою теореми). Зменшуючи у разі потреби радіус r околу $B(z_0, r)$, можна вважати, що $\overline{B(z_0, r)} \subset O(z_0)$. Нехай $\gamma := \{z : |z - z_0| = r\}$ — межеве коло цього околу. Покладемо $R := \min_{z \in \gamma} |f(z) - w_0|$. Внаслідок припущення $\overline{B(z_0, r)} \subset O(z_0)$ має

місце нерівність $R > 0$ (бо інакше функція $f(z) - w_0$ мала б нуль на колі γ).

Доведемо, що $B(w_0, R) \subset f(G)$ (це і буде означати, що множина $f(G)$ відкрита). Для цього зафіксуємо довільну точку $w_1 \in B(w_0, R)$, тобто, для цієї точки виконується нерівність $|w_1 - w_0| < R$, і доведемо, що $w_1 \in f(G)$.

Розглянемо функцію $f(z) - w_1$ в околі $B(z_0, r)$. Представимо її у вигляді

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + w_0 - w_1.$$

Для точок z межевого кола γ околу $B(z_0, r)$ внаслідок означення R і вибору точки w_1 виконується нерівність

$$|f(z) - w_0| \geq R > |w_1 - w_0|, \quad z \in \gamma.$$

Тому за теоремою Руше (теорема 7.1.5) маємо рівність

$$N(f(z) - w_1) = N(f(z) - w_0),$$

де $N(f)$ — число нулів (з урахуванням їх кратностей) функції f в околі $B(z_0, r)$. Оскільки функція $f(z) - w_0$ має нуль в околі $B(z_0, r)$ (точку z_0), то внаслідок останньої рівності і функція $f(z) - w_1$ також має нуль в цьому околі, тобто, існує така точка $z_1 \in B(z_0, r)$, що $f(z_1) = w_1$. Оскільки $B(z_0, r) \subset G$, це означає, що $w_1 \in f(G)$. Таким чином, $B(w_0, R) \subset f(G)$ і відкритість множини $f(G)$ доведена.

Теорема доведена.

Зауваження. За умов теореми 7.2.1 відображення функцією f може не бути конформним, оскільки в цій теоремі немає умови однолистості функції.

Будемо тепер розглядати однолисті функції. Тоді теорема 7.2.1 може бути уточнена наступним чином.

Теорема 7.2.2 (*умова конформності відображення області на область*).

Регулярна і однолиста в області G функція f конформно відображає область G на область $f(G)$.

Доведення. За умов теореми 7.2.2 виконані умови теореми 7.2.1 оскільки однолиста функція не може бути сталою. Тому образом області G є область $f(G)$ за теоремою 7.2.1 і залишилось довести конформність в кожній точці відображення регулярною і однолистою в області G функцією f . Для цього за твердженням 2.7.3 досить перевірити виконання умови $f'(z) \neq 0$ в кожній точці $z \in G$.

Припустимо супротивне. Нехай існує така точка $z_0 \in G$, що $f'(z_0) = 0$. Через n , $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, позначимо найменший номер похідної функції f в точці z_0 , яка не дорівнює нулю. Такий скінчений номер існує, бо інакше за теоремою Тейлора $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} c_k (z - z_0)^k$ функція f була б сталаю c_0 в околі точки z_0 , що неможливо для однолистої функції.

Нехай $w_0 := f(z_0)$. Повторюючи міркування з доведення теореми 7.2.1, побудуємо такий окіл $B(z_0, r)$ точки z_0 , що $\overline{B(z_0, r)} \subset G$, в якому функція $f(z) - w_0$ не має інших нулів, окрім точки z_0 . Більше того, зменшуючи у разі потреби радіус r цього околу, можна вважати, внаслідок теореми єдності (теорема 3.7.4), що $f'(z) \neq 0$, $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Як і при доведенні теореми 7.2.1 побудуємо окіл $B(w_0, R)$ точки w_0 , де $R := \min_{z \in \gamma} |f(z) - w_0| > 0$, а $\gamma := \{z : |z - z_0| = r\}$ — межеве коло околу $B(z_0, r)$. Зафіксуємо $w_1 \in B(w_0, R)$, $w_1 \neq w_0$, і розглянемо функцію $f(z) - w_1$ в околі $B(z_0, r)$. Представимо її у вигляді

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + w_0 - w_1.$$

При цьому, як і при доведенні теореми 7.2.1, виконується нерівність

$$|f(z) - w_0| \geq R > |w_1 - w_0|, \quad z \in \gamma.$$

Тому за теоремою Руше (теорема 7.1.5) отримуємо

$$N(f(z) - w_1) = N(f(z) - w_0),$$

де $N(f)$ — число нулів (з урахуванням їх кратностей) функції f в околі $B(z_0, r)$. Оскільки функція $f(z) - w_0$ має (з урахуванням кратностей) в околі $B(z_0, r)$ не менше двох нулів за припущенням ($f(z_0) - w_0 = 0$, $f'(z_0) = 0$), то внаслідок останньої рівності з теореми Руше і функція $f(z) - w_1$ в цьому околі також має не менше n нулів (з урахуванням їх кратностей). Але похідна f' не має нулів в проколотому околі $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ за побудовою. Тому функція $f(z) - w_1$ не має кратних нулів в цьому околі. Отже, існують n , $n \geq 2$, різних точок $z_1, z_2, \dots, z_n \in B(z_0, r)$, для яких $f(z_1) = f(z_2) = \dots = f(z_n) = w_1$, що суперечить однолистості функції f . Таким чином, нерівність $f'(z) \neq 0$, $z \in G$, доведена. Теорема доведена.

При доведенні теореми 7.2.2 встановлено

Наслідок 7.2.3 Для регулярної і однолистої в області G функції f в кожній точці області G виконується нерівність $f'(z) \neq 0$.

7.3 Принцип максимуму модуля. Лема Шварца

Теорема 7.3.1 (принцип максимуму модуля).

Якщо функція f регулярна в області G , а її модуль досягає свого локального максимума в деякій точці z_0 цієї області, то функція f є сталою в області G .

Доведення. За означенням точка z_0 є точкою локального максимума модуля функції f , якщо існує окіл $B := B(z_0, r)$ цієї точки, в якому має місце нерівність

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \quad z \in B := B(z_0, r). \quad (7.3.1)$$

Доведемо теорему від супротивного. Припустимо, що функція f не є сталаю. Тоді за теоремою 7.2.1 образом $f(B)$ області $B := B(z_0, r)$ є область. Зокрема, $f(B)$ є відкритою множиною, яка свою точку $w_0 := f(z_0)$ містить разом з деяким околом $B_1 := B(w_0, R)$, тобто, $B_1 \subset f(B)$. В цьому околі B_1 знайдеться така точка w_1 , що $|w_1| > |w_0|$. Дійсно, якщо $w_0 = 0$, це очевидно. Якщо ж $w_0 \neq 0$, то з'єднаємо точки 0 і w_0 відрізком $[0, w_0]$ і тоді на продовженні цього відрізка, що знаходиться в околі $B(w_0, R)$, знайдеться шукана точка $w_1 \in B_1$, $|w_1| > |w_0|$. Оскільки $B_1 \subset f(B)$, то $w_1 \in f(B)$, тобто, існує така точка $z_1 \in B$, що $w_1 = f(z_1)$. Таким чином, для точки $z_1 \in B$ має місце нерівність $|f(z_1)| = |w_1| > |w_0| = |f(z_0)|$, що суперечить нерівності (7.2.1).

Наслідок 7.3.2 Якщо функція f регулярна в області G і неперервна в замкнні \bar{G} цієї області, то її модуль $|f|$ досягає свого максимума на межі ∂G області G .

В теорії конформних відображенень широко застосовується наступна лема.

Лема 7.3.3 (Шварца).

Нехай функція f регулярна в одиничному крузі $B := \{z : |z| < 1\}$ і задоволяє умови:

- 1) $|f(z)| \leq 1$, $z \in B$,
- 2) $f(0) = 0$.

Тоді

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in B. \quad (7.3.2)$$

Більше того, якщо нерівність (7.3.2) в деякій точці $z_0 \in B$, $z_0 \neq 0$, обертається в рівність, то функція f є лінійною функцією виду $f(z) = e^{i\alpha}z$, де $\alpha \in \mathbf{R}$.

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi(z) := \frac{f(z)}{z}$. Оскільки в точці 0 функція $f(z)$ має нуль, то функція $\varphi(z)$ в точці 0 має усувну особливість і, після довизначення в цій точці за неперервністю, стає регулярною в точці 0 і в одиничному крузі $B := \{z : |z| < 1\}$.

Зафіксуємо $r < 1$. За наслідком 7.3.21 з принципа максимума модуля функція $\varphi(z)$ в крузі $B_r := \{z : |z| \leq r\}$ досягає максимума свого модуля $|\varphi|$ на межевому колі $\gamma_r := \{z : |z| = r\}$ круга B_r . Тобто, враховуючи умову 1) леми, маємо

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{\max_{z \in \gamma_r} |f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}, \quad z \in B_r, \quad r < 1. \quad (7.3.3)$$

Зафіксуємо тепер довільну точку $z \in B$ і оберемо таке число $r < 1$, що $|z| < r$. Тоді $z \in B_r$ і виконується нерівність (7.3.3). Переходячи в ній до границі при $r \rightarrow 1$, отримаємо нерівність (7.3.2).

Доведемо друге твердження леми. Нехай існує така точка $z_0 \in B$, $z_0 \neq 0$, що $|f(z_0)| = |z_0|$. Це означає, що регулярна в одиничному крузі B функція $\varphi(z) := \frac{f(z)}{z}$ досягає максимума свого модуля в точці z_0 цієї області B . Тоді за принципом максимума модуля (теорема 7.3.1) функція $\varphi(z)$ є сталою, що дорівнює 1 за модулем, тобто, $\varphi(z) = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Отже, $f(z) = e^{i\alpha}z$.

Лема доведена.

Геометричний зміст леми Шварца. Лінійна функція $f(z) = e^{i\alpha}z$, як відомо, здійснює поворот на кут α .

Якщо нерівність (7.3.2) є строгою, тобто, $|f(z)| < |z|$ для всіх $z \in B$, $z \neq 0$, то функція $f(z)$ відображає одиничний круг $B := \{z : |z| < 1\}$ на одиничний круг B . При цьому, кожне коло $\gamma_r := \{z : |z| = r\}$, $r < 1$, відображається у внутрішність $\{z : |z| < r\}$ цього кола. Якщо ж існує точка $z_0 \in B$, $z_0 \in \gamma_r$, $r \in (0, 1)$, яка відображається в точку цього ж кола γ_r , то відображення функцією $f(z)$ є поворотом на деякий кут.

Наступне твердження містить приклад застосування леми Шварца в теорії конформних відображень. Раніше в прикладі 2 розділу 6.1 було знайдено загальний вид дробово-лінійної функції, що здійснює відображення одиничного круга $B := \{z : |z| < 1\}$ на одиничний круг B . Ця функція має вид

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \quad |a| < 1, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

З наступного твердження випливає, що цією формулою задається загальний вид конформного відображення одиничного круга B на одиничний круг B .

Твердження 7.3.4 *Будь-яке конформне відображення одиничного круга $B := \{z : |z| < 1\}$ на одиничний круг B є дробово-лінійним.*

Доведення. Нехай регулярна функція $f(z)$ конформно відображає одиничний круг $B := \{z : |z| < 1\}$ на одиничний круг B . Покладемо $a := f(0)$ і розглянемо функцію $L(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$. Вона конформно відображає одиничний круг B на одиничний круг B , причому $L(a) = 0$. Тоді функція $\varphi(z) := L(f(z))$ регулярна в B , конформно відображає B на B і $\varphi(0) = 0$. Таким чином, функція $\varphi(z)$ задовільняє умови леми Шварца. За лемою Шварца має місце нерівність $|\varphi(z)| \leq |z|$, $z \in B$.

Обернена функція $\varphi^{-1}(w)$ також регулярна в B , конформно відображає B на B і $\varphi^{-1}(0) = 0$. Отже, функція $\varphi^{-1}(w)$ також задовільняє умови леми Шварца. За лемою Шварца маємо $|\varphi^{-1}(w)| \leq |w|$, $w \in B$. Поклавши $w = f(z)$, перепишемо цю нерівність у вигляді $|z| \leq |\varphi(z)|$, $z \in B$. Враховуючи доведену раніше нерівність протилежного сенсу, маємо $|\varphi(z)| = |z|$, $z \in B$. З цієї рівності, за другою частиною леми Шварца, робимо висновок, що функція $\varphi(z)$ є лінійною. Тоді функція $f = L^{-1}(\varphi)$ є дробово-лінійною, як суперпозиція дробово-лінійних.

Твердження 7.3.4 доведене.

7.4 Принцип відповідності меж

Цей принцип складають дві теореми. Прямий принцип сформульовано нижче без доведення.

Теорема 7.4.1 *Нехай G і D – однозв'язні області комплексної площини, обмежені замкнутими, жордановими, кусково-гладкими кривими. Якщо функція f конформно відображає область G на область D , то її можна продовжити до гомеоморфізму замикань \overline{G} і \overline{D} цих областей. Зокрема, продовжена функція взаємно-однозначно і взаємно неперервно відображає межу ∂G області G на межу ∂D області D .*

Для побудови конформного відображення області G на область D більш важливим є зворотний принцип.

Теорема 7.4.2 *(зворотний принцип відповідності меж) Нехай G і D – однозв'язні області комплексної площини, обмежені замкнутими, жордановими, кусково-гладкими кривими. Якщо функція f регулярна в області G , неперервна в її замиканні \overline{G} , і взаємно-однозначно відображає межу ∂G області G на межу ∂D області D , то f конформно відображає область G на область D .*

Доведення. Згідно з принципом збереження області (теорема 7.2.2) для доведення теореми достатньо довести, по-перше, що функція f однолиста в області G , і, по-друге, що $f(G) = D$. Для цього, в свою чергу, досить довести виконання двох наступних умов:

1) функція f приймає будь-яке значення з області D рівно в одній точці області G ;

2) Функція f не приймає в області G значень, що не належать області D .

Доведемо виконання першої умови. Зафіксуємо довільне значення $w_0 \in D$ і покажемо, що існує єдина точка $z_0 \in G$, для якої $w_0 = f(z_0)$. Для цього підрахуємо число нулів $N_G(f(z) - w_0)$ функції $f(z) - w_0$ в області G . Зауважимо, що ця функція $f(z) - w_0$ не має нулів на межі ∂G області G , бо за умовою функція f взаємно-однозначно відображає ∂G на ∂D , а $w_0 \notin \partial D$. Тому внаслідок неперервності функція $f(z) - w_0$ не має нулів в деякій межевій полосі, тобто, існує така крива $\gamma \subset G$, що гомотопна ∂G , а замикання

полоси з межею $\partial G \cup \gamma^{-1}$ не містить нулів функції $f(z) - w_0$. Цей факт легко випливає з леми Гейне-Бореля (лема 3.2.3).

Нехай $G_0 := \text{int } G$. Тоді функція f регулярна в замиканні $\overline{G_0}$. За принципом аргумента (теорема 7.1.4) маємо

$$N_G(f(z) - w_0) = N_{G_0}(f(z) - w_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma(\arg f(z) - w_0),$$

де $N_D(f)$ – число нулів (з урахуванням їх кратностей) функції f в області D .

Зазначимо, що приріст аргументу $\Delta_\gamma(\arg f(z) - w_0)$ уздовж кривої γ неперевно змінюється при неперервній деформації кривої γ . Разом з тим величина $\frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma(\arg f(z) - w_0)$ є цілочисельною. Тому при невеликій деформації кривої γ величина $\frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma(\arg f(z) - w_0)$ залишається сталою. Отже, можна вважати, що

$$\Delta_\gamma(\arg f(z) - w_0) = \Delta_{\partial G}(\arg f(z) - w_0).$$

Таким чином, маємо рівність

$$N_G(f(z) - w_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G}(\arg f(z) - w_0),$$

де величина $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G}(\arg f(z) - w_0)$ є числом оборотів, що здійснює вектор $f(z) - w_0$, коли вектор z пробігає межу ∂G області G . Але функція f взаємно-однозначно відображає межу ∂G області G на межу ∂D області D . Тому вектор $f(z) - w_0$ здійснює рівно один оборот коли вектор z пробігає межу ∂G області G . Тоді має місце рівність $N_G(f(z) - w_0) = 1$. Вона означає, що існує єдина точка $z_0 \in G$, для якої $f(z_0) = w_0$. Отже, перша умова виконується.

Доведемо виконання другої умови. Спочатку покажемо, що функція f не приймає значень $w_1 \notin \overline{D}$, тобто, значень із зовнішності межі ∂D області D . Повторюючи міркування із доведення виконання першої умови, отримаємо

$$N_G(f(z) - w_1) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G}(\arg f(z) - w_1),$$

Покажемо, що $\Delta_{\partial G}(\arg f(z) - w_1) = 0$, тобто, вектор $f(z) - w_1$ не робить жодного обороту, коли вектор z пробігає межу ∂G області G . Дійсно, оскільки зовнішність межі ∂D області D є областю і містить точки w_1 і ∞ , то існує крива γ , що з'єднує ці точки і міститься у зовнішності межі ∂D області D . Тому крива γ не перетинається з межею ∂D області D . А коли вектор z пробігає межу ∂G області G , вектор $f(z)$ за умовою пробігає межу ∂D області D . Тому вектор $f(z) - w_1$ не перетинає криву γ , і не робить повного обороту. Отже, $N_G(f(z) - w_1) = 0$. Це означає, що функція $f(z)$ не приймає в області G значень із зовнішності межі ∂D області D .

Залишилось довести, що функція $f(z)$ не приймає в області G значень з межі ∂D області D . Це одразу випливає із щойно доведеного факту і принципу збереження області (теорема 7.2.1).

Таким чином, друга умова також виконується і теорема доведена.

Приклад. Знайти образ області $G := \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$ при відображені функцією Жуковського $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Чи є конформним це відображення?

Зазначимо, що межа ∂G області G складається з променів $[-\infty, -1]$, $[1, \infty]$ і півкруга $G := \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| = 1\}$, які проходяться зліва направо. Їх образами при відображені функцією Жуковського є промені $[-\infty, -1]$, $[1, \infty]$ і відрізок $[-1, 1]$ відповідно (проходжувані зліва направо). Отже, границя області G взаємно-однозначно відображається функцією Жуковського у границю верхньої півплощини $G := \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. При цьому функція Жуковського є регулярною в області G і непервною в замиканні цієї області. Таким чином, виконуються всі умови зворотного принципу відповідності меж. Тому образом області G при відображені функцією Жуковського є верхня півплощина $D := \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. При цьому відображення $w : G \rightarrow D$ є конформним за тим же зворотним принципом.

7.5 Единість конформного відображення

Теорема Рімана (теорема 6.5.1) дає достатню умову існування конформного відображення однієї області на іншу.

Згідно з цією теоремою будь-яку однозв'язну область, межа якої містить щонайменше дві точки, можна конформно відобразити регулярною функцією на одиничний круг $\{z : |z| < 1\}$.

Зокрема, кожну з будь-яких двох однозв'язних областей, межі яких містить щонайменше дві точки, можна конформно відобразити на іншу.

Наступна теорема дає достатню умову єдності конформного відображення однієї області на іншу.

Теорема 7.5.1 (теорема єдності). Для будь-якої однозв'язної області G , межа якої містить щонайменше дві точки, і заданої пари чисел z_0 і α , де $z_0 \in G$, $\alpha \in \mathbf{R}$, існує єдина регулярна функція f , яка конформно відображає область G на одиничний круг $\{z : |z| < 1\}$ і задоволює умови

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha. \quad (7.5.1)$$

Доведення. Нехай w —довільна регулярна функція, яка здійснює конформне відображення $w : G \rightarrow \{z : |z| < 1\}$. Існування такої функції гарантує теорема Рімана. Нехай далі

$$a := w(z_0), \quad \beta := \arg w'(z_0).$$

Розглянемо відображення з прикладу 2 роділу 6.1

$$L(z) = e^{i(\alpha-\beta)} \frac{z-a}{\bar{a}z-1}.$$

Воно відображає одиничний круг $\{z : |z| < 1\}$ на одиничний круг і задовольняє умови

$$L(a) = 0, \quad \arg L'(a) = \alpha - \beta.$$

Покажемо, що функція $f(z) := L(w(z))$ задовольняє умови теореми. Дійсно, по-перше, функція f регулярна і конформно відображає область G на одиничний круг $\{z : |z| < 1\}$. Доведемо, що вона задовольняє умови (7.5.1). Маємо

$$f(z_0) = L(w(z_0)) = L(a) = 0,$$

$$\arg f'(z_0) = \arg L'(w(z_0)) \cdot w'(z_0) = \arg L'(a) + \arg w'(z_0) = (\alpha - \beta) + \beta = \alpha.$$

Отже, існування шуканої функції доведено.

Доведемо її єдиність. Припустимо, існують дві регулярні функції f_1 і f_2 , які конформно відображають область G на одиничний круг $\{z : |z| < 1\}$ і задовольняють умови (7.5.1), тобто

$$f_i(z_0) = 0, \quad \arg f'_i(z_0) = \alpha, \quad i = 1, 2.$$

Розглянемо функцію $F(w) := f_1(f_2^{-1}(w))$. Вона є регулярною в одиничному крузі $B := \{w : |w| < 1\}$ і конформно відображає його в одиничний круг B , причому $f(0) = 0$. Отже, регулярна функція F задовольняє умови леми Шварца (лема 7.3.3). За цією лемою має місце нерівність $|F(w)| \leq |w|$, $w \in B$, тобто, $|f_1(f_2^{-1}(w))| \leq |w|$. Поклавши в цій нерівності $w = f_2(z)$, отримаємо $|f_1(z)| \leq |f_2(z)|$, $z \in B$. Помінявши місцями функції f_1 і f_2 і повторивши міркування, отримаємо нерівність $|f_2(z)| \leq |f_1(z)|$, $z \in B$. Таким чином, $|f_1(z)| = |f_2(z)|$, $z \in B$.

Розглянемо функцію $\varphi(z) := \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$. Довизначивши її в точці z_0 рівністю $\varphi(z_0) := \frac{f'_1(z_0)}{f'_2(z_0)}$, отримаємо регулярну в одиничному крузі B функцію, модуль якої є костантою, а саме, $|\varphi(z)| = 1$, $z \in B$. За принципом максимума модуля (теорема 7.3.1) маємо $\varphi(z) = e^{i\gamma}$, де $\gamma \in \mathbf{R}$. Покажемо, що $\gamma = 0$. Дійсно,

$$\gamma = \arg \varphi(z) = \arg \varphi(z_0) = \arg f'_1(z_0) - \arg f'_2(z_0) = \alpha - \alpha = 0.$$

Таким чином, $\varphi(z) = 1$, $z \in B$, тобто $f_1(z) = f_2(z)$, $z \in B$.

Теорема доведена.

7.6 Принцип симетрії Рімана-Шварца

У розділі 5 розглянуто види аналітичного продовження. Але жоден з них не дає ефективного алгоритму аналітичного продовження. Саме такий алгоритм міститься в принципі симетрії Рімана-Шварца. Для подальшого необхідні деякі додаткові відомості з теорії інтегралу, зокрема, узагальнення інтегральної теореми і формули Коші, а також інтеграл типу Коші.

Теорема 7.6.1 (узагальнення інтегральної теореми Коші). Якщо функція f є регулярною в області G і неперервною в її замиканні $\overline{G} \in \mathbf{C}$, то

$$\int_{\partial G} f(\xi) d\xi = 0.$$

Теорема 7.6.2 (у загальнення інтегральної формулі Коши). Якщо функція f є регулярною в області G і неперервною в її замиканні $\overline{G} \in \mathbf{C}$, то для довільної точки $z \in G$ має місце рівність

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Означення 7.6.1 Нехай γ —довільна спрямлювана крива, а функція f неперервна на цій кривій. Тоді існує інтеграл

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \notin \gamma.$$

Цей інтеграл називається інтегралом типу Коши.

Теорема 7.6.3 (про регулярність інтегралу типу Коши). За умов означення 7.6.1 інтеграл типу Коши $F(z)$ є функцією регулярною в будь-якій області, що не містить точок кривої γ , і для його похідних k -го порядку $k \in \mathbf{N}$, виконується рівність

$$F^{(k)}(z) := \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi, \quad z \notin \gamma. \quad (7.6.1)$$

Доведення. Доведемо рівність (7.6.1) для $k = 1$. Задовільно довільну точку $z \notin \gamma$. Нехай $d := \rho(z, \gamma)$. Тоді $d > 0$. Оберемо $h \in \mathbf{C}$, що задовільняє умову $|h| < \frac{d}{2}$. Отримаємо інтегральне представлення дogrаничної різниці для похідної $F'(z)$. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z - h} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} d\xi. \end{aligned}$$

Покладемо

$$r := \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Для доведення теореми у випадку $k = 1$ досить показати, що $r \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Для цього отримаємо інтегральне представлення для різниці r . Маємо

$$r = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi =$$

$$= \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)^2} d\xi$$

Для доведення того, що $r \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, оцінимо $|r|$ зверху. Враховуючи, що для точок $\xi \in \gamma$ виконуються нерівності

$$|\xi - z| \geq d, \quad |\xi - z - h| \geq |\xi - z| - |h| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2},$$

маємо

$$|r| \leq \frac{|h|}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z - h||\xi - z|^2} |d\xi| \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{\max_{\xi \in \gamma} |f(\xi)|}{\frac{d}{2} \cdot d^2} \cdot l(\gamma),$$

де $l(\gamma)$ —довжина кривої γ . З цієї оцінки одразу отримуємо $r \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Рівність (7.6.1) для $k = 1$ доведена. Таким чином, інтеграл типу Коші $F(z)$ є функцією регулярною в будь-якій області, що не містить точок кривої γ .

Рівність (7.6.1) для $k > 1$ доводиться методом математичної індукції за допомогою міркувань, аналогічних тим, що були застосовані у випадку $k = 1$.

Означення 7.6.2 (аналітичного продовження через дугу кривої).

Нагадаємо, що елементом називаються пара (G, f) , що складається з області G і регулярної в ній функції f .

Нехай (G_1, f_1) і (G_2, f_2) —два елементи, в яких області G_1 і G_2 не перетинаються, а їх межі ∂G_1 і ∂G_2 перетинаються по відкритій дузі δ , причому множина $G := G_1 \cup G_2 \cup \delta$ є областю.

Говорять, що кожна з регулярних функцій f_1 і f_2 є аналітичним продовженням іншої через дугу δ , якщо існує регулярна в області G функція f , яка збігається з функцією f_i в області G_i , $i = 1, 2$.

Теорема 7.6.4 (про аналітичне продовження через дугу кривої).

Нехай області G_1 і G_2 не перетинаються, а їх межі ∂G_1 і ∂G_2 перетинаються по відкритій дузі δ , причому множина $G := G_1 \cup G_2 \cup \delta$ є областю.

Якщо функції f_1 і f_2 є регулярними в областях G_1 і G_2 відповідно, і неперервними в замиканнях $\overline{G_1}$ і $\overline{G_2}$ відповідних областей, а на дузі δ вони збігаються, тобто, $f_1(z) = f_2(z)$, $z \in \delta$, то кожна з цих функцій є аналітичним продовженням іншої через дугу δ .

Доведення. Розглянемо наступну функцію

$$f(z) := \begin{cases} f_1(z), & \text{якщо } z \in \overline{G_1}; \\ f_2(z), & \text{якщо } z \in \overline{G_2}. \end{cases}$$

Її означення є коректним, оскільки $f_1(z) = f_2(z)$, $z \in \overline{G_1} \cap \overline{G_2} =: \delta$, причому функція f неперервна в $\partial G_1 \cup \partial G_2$ і регулярна в кожній з областей G_1 і G_2 .

Для доведення теореми згідно з означенням 7.6.2 досить довести регулярність функції f в області G . Для цього розглянемо інтеграл типу Коші

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in G.$$

За теоремою 7.6.3 цей інтеграл $F(z)$ є регулярною в області G функцією.

Таким чином, для доведення теореми залишилось довести рівність

$$F(z) = f(z), \quad z \in G.$$

Нехай спочатку $z \notin \delta$. Тоді інтеграл $F(z)$ можна подати у вигляді

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =: I_1 + I_2,$$

оскільки в цій формулі інтегрування уздовж спільної для меж ∂G_1 і ∂G_2 дуги δ проводиться двічі у протилежних напрямках.

Якщо $z \in G_1$, то $I_1 = f(z)$ за інтегральною формулою Коші (теорема 7.6.2), а $I_2 = 0$ за інтегральною теоремою Коші (теорема 7.6.1).

Якщо $z \in G_2$, то $I_2 = f(z)$ за інтегральною формулою Коші (теорема 7.6.2), а $I_1 = 0$ за інтегральною теоремою Коші (теорема 7.6.1).

Отже, $F(z) = f(z)$ для $z \in G_1 \cup G_2$. Звідси граничним переходом отримуємо рівність $F(z) = f(z)$ для $z \in \delta$ внаслідок неперевності функцій $F(z)$ і $f(z)$ на дузі δ .

Теорема доведена.

Теорема 7.6.5 (*принцип симетрії Рімана-Шварца*).

Нехай G —область, що не перетинається з дійсною віссю, а перетином її межі ∂G з дійсною віссю є відкритий інтервал δ . Нехай далі G^* —область, симетрична до області G відносно дійсної осі.

Якщо функція f є регулярною в області G і неперервною в її замиканні, а в інтервалі δ вона приймає дійсні значення, то її можна аналітично продовжити через інтервал δ в область G^* за формулою

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{якщо } z \in G \cup \delta; \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{якщо } z \in G^*. \end{cases}$$

Доведення. Доведемо, що функція $f_1(z) := \overline{f(\bar{z})}$ регулярна в області G^* . Дійсно, для довільного $z \in G^*$ маємо $\bar{z} \in G$ і тому, внаслідок регулярності функції f в області G , отримуємо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(z+h) - f_1(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{f(\bar{z}+h)} - \overline{f(\bar{z})}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\overline{\frac{f(\bar{z}+h) - f(\bar{z})}{h}} \right) = \overline{f'(\bar{z})}.$$

Отже, функція $f_1(z)$ регулярна в області G^* . Окрім того, вона неперервна в замиканні області G^* , оскільки функція $f(z)$ неперервна в замиканні області G , і операція спряження теж є неперервною. Нарешті, оскільки за умовою функція $f(z)$ приймає дійсні значення на дійсній осі, то для $z = x \in \delta$ маємо

$$f_1(z) = f_1(x) = \overline{f(\bar{x})} = \overline{f(x)} = f(x) = f(z),$$

тобто, значення функцій f і f_1 на інтервалі δ збігаються.

Таким чином, виконані всі умови теореми 7.6.4 і за цією теоремою функція $f_1(z) := \overline{f(\bar{z})}$ є аналітичним продовженням функції f через дугу δ .

Теорема доведена.

Принцип симетрії Рімана-Шварца допускає наступне узагальнення. Зазначимо, що у формулюванні цього принципу термін коло вживается у широкому сенсі (означення 6.1.2).

Теорема 7.6.6 (*узагальнений принцип симетрії Рімана-Шварца*).

Нехай G -область, що не перетинається з колом K_1 , а перетином ії межі ∂G з колом K_1 є відкрита дуга δ цього кола. Нехай далі G^* -область, симетрична до області G відносно кола K_1 (див. означення 6.1.3).

Якщо функція f є регулярною в області G і неперервною в ії замиканні, а на дузі δ вона приймає значення, що містяться на колі K_2 , то ії можна аналітично продовжити через дугу δ в область G^* за формуллю

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{якщо } z \in G \cup \delta; \\ f^*(z^*), & \text{якщо } z \in G^*, \end{cases}$$

де z^* -точка, симетрична до точки z відносно кола K_1 , а $f^*(w)$ -точка симетрична до точки $f(w)$ відносно кола K_2 .

Приклад 1. Нехай $G := \{z : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$. Знайти аналітичне продовження функції $f(z) := \ln|z| + i \arg z$ з області G в симетричну відносно дійсної осі область $G^* := \{z : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z < 0\}$ через кожний з інтервалів $\delta_1 := (1, 2)$ і $\delta_2 := (-2, -1)$, де символом $\arg z$ позначено головне значення аргумента, яке міститься в проміжку $(-\pi, \pi]$.

Спочатку довизначимо за неперервністю функцію f на інтервалах δ_1 і δ_2 . Маємо

$$f(z) = \ln|z|, \quad z \in \delta_1, \quad f(z) = \ln|z| + i\pi, \quad z \in \delta_2.$$

Через f_1 (f_2) позначимо продовження функції f через інтервал δ_1 (δ_2) відповідно. За теоремою 7.6.5 отримуємо

$$f_1(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\ln|\bar{z}| + i \arg \bar{z}} = \overline{\ln|z| - i \arg z} = \ln|z| + i \arg z.$$

Зауважимо далі, що образ відрізка δ_2 міститься на прямій $\operatorname{Im} w = \pi$. Через w^* позначимо точку симетричну до точки w відносно цієї прямії. Очевидно, що $\operatorname{Im} w + \operatorname{Im} w^* = 2\pi$, тобто, $\operatorname{Im} w^* = 2\pi - \operatorname{Im} w$. Тому, за теоремою 7.6.6 маємо

$$f_2(z) = f^*(\bar{z}) = (\ln|\bar{z}| + i \arg \bar{z})^* = (\ln|z| - i \arg z)^* = \ln|z| + i(2\pi + \arg z).$$

Наступне твердження, що одразу випливає з принципу симетрії Рімана-Шварца є основою для застосувань цього принципу при побудові конформних відображені симетричних відносно дійсної осі областей.

Наслідок 7.6.7 Якщо за умов теореми 7.6.5 функція f конформно відображає область G на область D , а образом межевого відрізка δ при відображеннянні функцією f є відрізок $\delta' \subset \mathbf{R}$, то функція

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{якщо } z \in G \cup \delta; \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{якщо } z \in G^*, \end{cases}$$

що є аналітичним продовженням функції f через дугу δ , конформно відображає область $G \cup \delta \cup G^*$ на область $D \cup \delta' \cup D^*$, де D^* —область, симетрична до області D відносно дійсної осі.

Приклад 2. Знайти функцію, що здійснює конформне відображення $w : G_0 := \mathbf{C} \setminus \{[-3i, 3i] \cup [-4, \infty]\} \rightarrow \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

Розглянемо верхню половину області G_0 , а саме, верхню півплощину з розрізом по відрізку $[0, 3i]$, тобто, $G := \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, 3i]$. За прикладом 2 розділу 6.5 одна з регулярних гілок кореня $w_1 := \sqrt{z^2 + 9}$ конформно відображає область G на верхню півплощину $D := \{w_1 : \operatorname{Im} w_1 > 0\}$.

Нехай $\delta := [-\infty, -4]$. Зауважимо, що $G_0 = G \cup \delta \cup G^*$, де G^* —область, симетрична до області G відносно дійсної осі, при цьому функція w_1 відображає промінь δ у промінь $\delta' := [-\infty, -5]$. Тоді за наслідком 7.6.7 аналітичне продовження функції w_1 через дугу δ , тобто відповідна регулярна гілка кореня $\sqrt{z^2 + 9}$ в області G_0 , конформно відображає область $G_0 = G \cup \delta \cup G^*$ на область $D_0 = D \cup \delta' \cup D^*$, де D^* —область, симетрична до області D відносно дійсної осі, тобто, нижня півплощина. Очевидно, що $D_0 = \mathbf{C} \setminus [-5, \infty]$.

Залишилось відобразити область D_0 на верхню півплощину. Це можна зробити так само, як у прикладі 2 розділу 6.5. Спочатку за допомогою зсуву $w_2 := w_1 + 5$ відображаємо область D_0 на область $D_1 = \mathbf{C} \setminus [0, \infty]$, тобто, на кут $\{w_2 : 0 < \arg w_2 < 2\pi\}$ з вершиною у точці 0, і потім зменшуємо цей кут вдвічі за допомогою підходящої регулярної гілки кореня $w = \sqrt{w_2}$.

Отже шукана функція дається формулою $w = \sqrt{5 + \sqrt{z^2 + 9}}$.

Зміст

1 Комплексна площа	3
1.1 Комплексні числа	3
1.2 Метричні поняття на комплексній площині	6
1.3 Розширення комплексна площа. Сфера Рімана	7
1.4 Криві та області на комплексній площині	9
2 Диференційовні функції	12
2.1 Степеневі ряди	12
2.2 Означення деяких функцій за допомогою степеневих рядів	14
2.3 Критерій диференційовності функцій комплексної змінної	16
2.4 Поняття про аналітичну функцію	19
2.5 Гармонічні функції, їх взаємозв'язок з функціями аналітичними	20
2.6 Задача відновлення аналітичної функції	22
2.7 Геометричний зміст аргумента і модуля похідної	24
3 Теорія інтегралу Коші	27
3.1 Криволінійний інтеграл	27
3.2 Інтегральна теорема Коші	30
3.3 Узагальнення теореми Коші	35
3.4 Інтегральна формула Коші	37
3.5 Розгортання аналітичних функцій в ряд Тейлора	40
3.6 Першіна	45
3.7 Нулі аналітичних функцій. Теорема єдності	48
4 Теорія лишків Коші	53
4.1 Ряди Лорана	53
4.2 Ізольовані особливі точки аналітичних функцій	60
4.3 Лишки	68
4.4 Обчислення інтегралів $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ і $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$	74
5 Аналітичне продовження	81
5.1 Види аналітичного продовження	81
5.2 Аналітичні функції	84
6 Конформні відображення елементарними функціями	90
6.1 Дробово-лінійна функція	90
6.2 Степенева функція та корінь	99

6.3	Показникова функція та логарифм	102
6.4	Функція Жуковського	104
6.5	Приклади побудови конформних відображень	108
7	Основні принципи теорії конформних відображень	112
7.1	Принцип аргументу. Теорема Руше	112
7.2	Принцип збереження області	117
7.3	Принцип максимуму модуля. Лема Шварца	119
7.4	Принцип відповідності меж	121
7.5	Єдиність конформного відображення	123
7.6	Принцип симетрії Рімана-Шварца	124