

**Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара**

Кафедра математичного аналізу та оптимізації

А. М. Пасько

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО КУРСУ «ВИЩА
МАТЕМАТИКА» ЗА ТЕМАМИ
«МАТРИЧНА АЛГЕБРА», «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»**

Дніпро

2025

УДК 512.64(072)

П19

Наведено теоретичний матеріал та основні типи задач з лінійної алгебри та алгебри матриць. Для студентів університету денної та заочної форм навчання, що вивчають курс «Вища математика».

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету.

Рецензенти:

Пипка О. О., доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри геометрії та алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара;
Величко Т. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Українського державного хіміко-технологічного університету.

**П19 Пасько А. М. Методичні вказівки до курсу «Вища математика» за
темами
«Матрична алгебра», «Лінійна алгебра»**

© Пасько А. М. 2025

Зміст

Передмова	4
1. Матриці: основні означення та дії над ними.	4
2. Визначники матриць	8
3. Властивості визначників	10
4. Обчислення визначників методом накопичення нулів	13
5. Розв’язання систем лінійних рівнянь методом Крамера.	14
6. Обернена матриця	22
7. Матричний метод розв’язання систем лінійних рівнянь.	24
8. Метод Гауса розв’язання систем лінійних рівнянь.	32
Бібліографічний опис.	44

Передмова

Більшість сучасних природничих та технічних дисциплін буквально пронизані вищою математикою. Саме тому без вищої математики годі собі уявити підготовку фахівців цих галузей. Важливими розділами вищої є теми, пов'язані з матричною алгеброю, лінійною алгеброю. Зокрема ці теми широко застосовуються в системах штучного інтелекту.

Метою цього посібника є ознайомлення здобувачів вищої освіти з елементами матричної та лінійної алгебри. Перший розділ методичних вказівок присвячений матрицям: основним означенням та діям над ними. Другий та третій – визначникам матриць. Четвертий – практичному прийому обчислення визначників, який полягає в накопиченні нулів у одному з рядків або стовпців матриці, визначник якої обчислюється. П'ятий – методу Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь. Шостий – поняттю оберненої матриці. Сьомий – матричному методу розв'язання систем лінійних рівнянь. Восьмий – методу Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь.

1. Матриці: основні означення та дії над ними.

Означення. Матрицею розміру $m \times n$ (читається «розміру m на n ») називається прямокутна таблиця чисел, у якій m стовпців та n рядків. Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

є матриця розміру 3 на 4 (три рядки та чотири стовпці). Загальний вигляд матриці $m \times n$ такий

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(1-й індекс позначає номер рядка, в якому стоїть елемент матриці, 2-й – стовпця).

Означення. Нульовою матрицею називають матрицю, всі елементи якої – нулі. Приклад нульової матриці розміру 3×4 –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення. Якщо кількість стовпців матриці дорівнює кількості рядків ($m=n$), матрицю називають квадратною порядку n .

Приклад квадратної матриці порядку 4 –

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний вигляд квадратної матриці порядку 4 –

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Означення. Головною діагоналлю квадратної матриці порядку n називають послідовність $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ елементів, що знаходяться вздовж уявної лінії, котра з'єднує лівий верхній кут квадратної матриці з правим нижнім.

Іноді також розглядають т. зв. побічну діагональ квадратної матриці.

Означення. Побічною діагоналлю квадратної матриці називають послідовність елементів, що знаходяться вздовж уявної лінії, котра з'єднує правий верхній кут квадратної матриці з лівим нижнім.

Означення. Діагональною матрицею порядку n називають квадратну матрицю порядку n , за межами головної діагоналі якої скрізь стоять нулі.

Діагональна матриця порядку n має вигляд

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Означення. Одиничною матрицею порядку n називають квадратну матрицю порядку n , всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, а за межами головної діагоналі скрізь стоять нулі.

Одинична матриця порядку 2 має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, одинична матриця порядку

3 – вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, одинична матриця порядку 4 – вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, і т.д.

Перейдемо до дій над матрицями.

Означення. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

– дві матриці однакового розміру $m \times n$. Їх сумою називається 3-тя матриця C розміру $m \times n$, компоненти якої c_{ij} дорівнюють сумам відповідних компонент матриць A, B : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Тобто

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Нехай A – матриця,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

λ – дійсне число. Множення матриці A та числа λ визначається як множення на λ всіх компонент матриці A . Тобто

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3/2 & 2 & 5/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 11/2 & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення. Різницею двох матриць A , B однакового розміру називається сума матриці A та помноженої на (-1) матриці B :

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

Перейдемо до множення матриць.

Означення. Нехай A – матриця розміру $m \times n$ із елементами a_{ij} , B – матриця розміру $n \times q$ з елементами b_{ij} (зверніть увагу, що кількість стовпців 1-ї матриці збігається з кількістю рядків другої). Тоді їх добутком називається матриця C розміру $m \times q$, елементи якої визначаються рівністю

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Приклад. Перемножимо дві квадратні матриці порядку 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & -3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & -3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Оскільки в означенні множення матриць кількість стовпців 1-ї матриці збігається з кількістю з кількістю рядків 2-ї, добутки AB та BA визначені одночасно лише коли обидві матриці квадратні одного порядку. Утім,

навіть і в цьому випадку добуток узагалі кажучи залежить від порядку множників, тобто множення матриць *непереставне*: в загальному випадку $AB \neq BA$. Щоб переконатися в цьому візьмемо дві квадратні матриці 2-го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема. Множення будь-якої квадратної матриці A на одиничну матрицю того самого порядку, як справа, так і зліва, не змінює матриці A : $AE = EA = A$, E – одинична матриця.

Нам залишилось розглянути лише одну операцію, яка виконується над однією матрицею, а не над двома.

Означення. Транспонувати матрицю означає зробити її рядки стовпцями, а стовпці – рядками. Транспонована матриця A позначається A^T .

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 3 & 2 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 11 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

З квадратною матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Визначники матриць.

Кожній квадратній матриці ставиться у відповідність число, яке називається її визначником або детермінантом. Для матриць 2-го порядку визначник визначається так:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 2$$

Щоб перейти до означення визначника 3-го порядку, тобто визначника квадратної матриці 3-го порядку нам знадобиться пара допоміжних означень.

Означення. Розглянемо елемент a_{ij} квадратної матриці 3-го порядку. Викресливши подумки в матриці i -й рядок та j -й стовпець, одержуємо квадратну матрицю, визначник Δ_{ij} якої називається доповнювальним мінором або просто мінором елемента a_{ij} .

Приклад. Розглянемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Викресливши з неї подумки 1-й рядок та 1-й стовпець, одержимо мінор

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Викресливши з неї подумки 1-й рядок та 3-й стовпець, одержимо мінор

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

Викресливши з неї подумки 2-й рядок та 2-й стовпець, одержимо мінор

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Означення. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} квадратної матриці 3-го порядку називається $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Приклад. Для матриці з попереднього прикладу

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 1) = -7,$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Означення. Визначником матриці 3-го порядку називається сума добутків її 1-го рядка на їх алгебраїчні доповнення.

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 40 - 5 \cdot 15 - 2 \cdot 1 = \\ = 80 - 75 - 2 = 3$$

Ми дали означення детермінанта 3-го порядку, спираючись на визначник другого порядку. Аналогічно, спираючись на визначник 3-го порядку, можна дати означення доповнювальних мінорів, алгебраїчних доповнень елементів квадратної матриці 4-го порядку, відтак дати означення її детермінанта як суми добутків елементів 1-го рядка на їх алгебраїчні доповнення. Аналогічно, спираючись на визначники 4-го порядку, можна дати означення визначникам 5-го порядку і т.д. Таким чином, ми отримуємо означення визначників будь-якого порядку.

3. Властивості визначників.

1. Визначник матриці не змінюється при її транспонуванні.

$$\det A^T = \det A$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

2. При перестановці якихось двох рядків або якихось двох стовпців визначника, останній змінює своє значення на протилежне.

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

(переставлено 1-й та 3-й стовпці).

3. Визначник з двома однаковими рядками або стовпцями дорівнює нулю.

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(2-й та 3-й стовпці однакові).

4. Спільний множник всіх елементів одного рядка (або одного стовпця)

можна винести за знак визначника

Приклад.

$$\begin{vmatrix} ma & ma' & ma'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

5. Якщо кожен елемент якогось стовпця (рядка) є сума двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників: в одному замість кожної суми стоїть лише 1-й доданок, в другому – тільки 2-й (решта елементів обох визначників ті самі, що в даному).

Приклад.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6. Якщо до певного стовпця визначника додати (або відняти) інший стовпець, помножений на якесь число, то новий визначник дорівнюватиме старому. Те саме для рядків.

Приклад. Додамо до 1-го рядка визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2-й рядок. Одержимо рівний йому визначник

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи останній за 1-м рядком, одержимо

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

7. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення. Це означає, що визначник можна розкласти не лише за 1-м, але за будь-яким рядком (або стовпцем).

Приклад. Розкладаючи визначник із попереднього прикладу за 3-м рядком, одержимо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Розкладаючи за 2-м стовпцем, знову одержимо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

Приклад. Розкладаючи визначник $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ за 3-м стовпцем, одержимо

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 + 5 = 3.$$

8. Визначник добутку матриць дорівнює добутку їх визначників

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

4. Обчислення визначників методом накопичення нулів.

Цей метод особливо зручний, коли елементи визначника – цілі числа.

Спочатку вибираємо рядок (чи стовпець) по якому ми будемо вести розклад. Бажано, щоб там уже був нуль. Далі, використовуючи властивість 6 попереднього розділу, робимо так, щоб у цьому рядку (стовпці) було якнайбільше нулів. Відтак розкладаємо визначник по цьому рядку (стовпцю).

Приклад. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

Будемо вести розклад по 3-му рядку. Віднімаємо від 2-го та 3-го стовпців подвоєний 4-й. Визначник дорівнюватиме:

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи його за 3-м рядком, одержимо

$$-2 \begin{vmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Для обчислення останнього визначника вибираємо 3-й стовпець. Віднімаємо від 1-го рядка потроєний 3-й. Одержимо

$$-2 \begin{vmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -15 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-2) \begin{vmatrix} -15 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-54) = -216$$

Отже, обчислюваний визначник

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -216.$$

5. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Крамера.

Метод Крамера застосовується для розв'язання систем з n лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими. Для простоти розглянемо метод Крамера на прикладі систем трьох рівнянь із трьома невідомими.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Формуємо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

і визначники змінних

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Можливі 3 випадки.

1. Визначник системи $\Delta \neq 0$. Система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

2. Визначник системи $\Delta = 0$, але щонайменше один із визначників

$$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$$

– відмінний від нуля. Система несутісна, тобто не має розв'язків.

3. Визначник системи $\Delta = 0$, і всі визначники $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Система може бути як несутісною, так і мати безліч розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 5, \\ 5x - 6y - 4z = -3, \\ -4x + 5y + 3z = 1. \end{cases}$$

Формуємо та обчислюємо визначники. Визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Для того, щоб спростити його обчислення додаємо до 2-го рядка подвоєний 1-й (при цьому 3-й елемент 2-го рядка перетвориться на нуль). Розкладаючи, відтак, визначник за 3-м стовпцем, одержимо

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 11 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 2(55 + 8) + 3(6 - 44) = \\ &= 126 - 114 = 12 \neq 0. \end{aligned}$$

Система, отже, має єдиний розв'язок. Обчислюємо визначники змінних.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Знову додаємо до 2-го рядка подвоєний 1-й і розкладаємо визначник за 3-м стовпцем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 66 - 3 \cdot 18 = 12.$$

Для обчислення визначника

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знов додамо до 2-го рядка подвоєний 1-й. Одержаний визначник

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 11 & 7 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

розкладаємо за 3-м стовпцем

$$\Delta_y = 2 \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = 78 + 3(21 - 55) = -24.$$

Нарешті

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для спрощення обчислення цього визначника додамо до 2-го стовпця подвоєний 3-й і розкладаємо за 2-м стовпцем

$$\begin{aligned} \Delta_z &= \begin{vmatrix} 3 & -6 & 5 \\ 5 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-6) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 3(-2 \cdot 7 + 34) = 60. \end{aligned}$$

За формулами Крамера знаходимо відповідь:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-24}{12} = -2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5.$$

Приклад 2. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x + 5y - z = 4, \\ 5x - y - z = 2, \\ 2x \quad - 2z = 4. \end{cases}$$

Відсутність змінної y у 3-му рівнянні тлумачимо як рівність нулю відповідного коефіцієнта при цій змінній. У такому разі визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Додаючи в цьому визначнику 1-й стовпець до 3-го стовпця, відтак розкладаючи за 3-м стовпцем, одержуємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Визначник змінної x

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Додамо в цьому визначнику до 1-го стовпця подвоєний 3-й, відтак розкладемо за 1-м стовпцем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Визначник змінної y

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Віднявши від 3-го рядка подвоєний другий, одержимо визначник, всі елементи третього рядка якого – нулі.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи такий визначник за третім рядком, одержуємо

$$\Delta_y = 0.$$

Нарешті, визначник змінної z

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Відніmemo від 1-го та 3-го рядка визначника подвоєний 2-й. Одержимо

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи цей визначник за 3-м стовпцем, будемо мати

$$\Delta_z = -2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

За формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Приклад 3. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x - y - z = -2, \\ x + y + 2z = 5, \\ -x + y - z = 0. \end{cases}$$

Випиcуємо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Додаємо в цьому визначнику до 2-го та 3-го рядків 1-й рядок. Одержимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

розкладаючи який за 2-м стовпцем, будемо мати

$$\Delta = -(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

Визначник системи відмінний від нуля, отже система має єдиний розв'язок. Для його знаходження обчислюємо визначники змінних.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

До 2-го та 3-го рядків визначника додамо 1-й рядок. Буде

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Одержаний визначник розкладемо за 2-м стовпцем.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4.$$

Визначник змінної y дорівнює

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Від 2-го рядка віднімемо , а до 3-го рядка додамо 1-й рядок. Отримаємо

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи, тепер, за 1-м стовпцем, одержимо

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -14 + 6 = -8.$$

Визначник змінної z

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

До 2-го та 3-го рядків додаємо 1-й і розкладаємо визначник за 3-м рядком

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

Знаходимо, тепер, розв'язок

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Приклад 4. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = -1, \\ 2x + y + z = 3, \\ x - y + z = -4. \end{cases}$$

Визначник системи має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

для спрощення його обчислення додамо 1-й рядок до 2-го і 3-го рядків. Вийде визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix},$$

розкладаючи який за 3-м стовпцем, одержимо

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 + 4) = 11.$$

Перейдемо до обчислення визначників змінних.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

додамо в ньому також 1-й рядок до 2-го та 3-го рядків,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

і розкладаючи за 3-м стовпцем, одержимо

$$\Delta_x = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 - 5) = 11.$$

Визначник змінної y

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix},$$

в якому теж додамо 1-й рядок до 2-го та 3-го,

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

і, розкладаючи за 3-м стовпцем, одержимо

$$\Delta_y = - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -(-25 - 8) = 33.$$

Нарешті, визначник змінної z

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix},$$

для його обчислення віднімемо від 1-го рядка подвоєний 3-й, а до 2-го рядка додамо 3-й.

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Розкладаємо, відтак, за 2-м стовпцем,

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -22.$$

За формулами Крамера знаходимо відповідь

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{11}{11} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-22}{11} = -2.$$

6. Обернена матриця.

Означення. Нехай A – квадратна матриця порядку n . Оберненою матрицею до матриці A називається квадратна матриця A^{-1} , така що

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

де E – одинична матриця порядку n .

З огляду на властивість 8 визначників

$$\det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A = \det E = 1,$$

отже

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Це означає, що обернена матриця існує тільки в матриць з ненульовим визначником (такі матриці називаються невинродженими). Більш того, має місце теорема.

Теорема. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

має обернену тоді й тільки тоді, коли вона не вироджена $\det A \neq 0$, при цьому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A , T – символ транспонування.

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Насамперед переконаємось, що в матриці A існує обернена. Для цього знайдемо її визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для спрощення відшукування визначника додамо 1-й рядок до 2-го. Вийде

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

і розкладаючи за 2-гим стовпцем, одержимо

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0.$$

Матриця не вироджена, отже має обернену. Алгебраїчні доповнення її елементів дорівнюють

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6. \end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних рівнянь, у якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Нехай, для простоти, це буде три.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Відповідно до правила множення матриць, цю систему можна записати як одне матричне рівняння

$$AX=B, \tag{1}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

– матриця системи,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

– стовпець невідомих,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

– стовпець вільних членів.

Якщо матриця системи – невироджена, то обидві частини матричного рівняння (1) можна помножити на матрицю A^{-1} , обернену до неї. В результаті одержимо, що стовпець невідомих можна знайти за формулою

$$X = A^{-1}B. \quad (2)$$

Отже, формула (2) дозволяє знайти розв’язок системи.

Приклад 1. Розв’язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 7, \\ 2x + \quad 3z = 8, \\ x + 5y + 2z = 10. \end{cases}$$

Запишемо систему в матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Тоді, якщо матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

– не вироджена, то система має розв’язок

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці системи

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

розкладаємо за 2-м рядком

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2(-17) - 3 \cdot 11 = 1 \neq 0,$$

отже матриця системи – невироджена. Її алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -15, A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 17, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3, A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 2(-1) = 2.$$

Отже,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -15 & -1 & 10 \\ 17 & 1 & -11 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \\ &= \begin{pmatrix} -15 & -1 & 10 \\ 17 & 1 & -11 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -15 & 17 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 10 & -11 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 17 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 10 & -11 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \cdot 7 + 17 \cdot 8 - 3 \cdot 10 \\ -1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 10 \\ 10 \cdot 7 - 11 \cdot 8 + 2 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, маємо розв'язок

$$x = 1, y = 1, z = 2.$$

Приклад 2. Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 5, \\ 5x - 6y - 4z = -3, \\ -4x + 5y + 3z = 1. \end{cases}$$

Матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Її визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Для того, щоб спростити його обчислення додаємо до 2-го рядка подвоєний 1-й (при цьому 3-й елемент 2-го рядка перетвориться на нуль). Розкладаючи, відтак, визначник за 3-м стовпцем, одержимо

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 11 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 2(55 + 8) + 3(6 - 44) = \\ &= 126 - 114 = 12 \neq 0. \end{aligned}$$

Алгебраїчні доповнення

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2, A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 1, A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2, A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 17, A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -31, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -4, A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 22, A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -38. \end{aligned}$$

В такому разі обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 17 & -31 \\ -4 & 22 & -38 \end{pmatrix}^T,$$

і після транспонування одержимо

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 17 & 22 \\ 1 & -31 & -38 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 17 & 22 \\ 1 & -31 & -38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 + 17 \cdot (-3) + 22 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 - 31 \cdot (-3) - 38 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отже, відповідь $x=1$, $y=-2$, $z=5$.

Приклад 3. Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 3x + 5y - z = 4, \\ 5x - y - z = 2, \\ 2x - 2z = 4. \end{cases}$$

Матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Її визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Додаючи в цьому визначнику 1-й стовпець до 3-го стовпця, відтак розкладаючи за 3-м стовпцем, одержуємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Матриця системи, отже, має обернену.

Алгебраїчні доповнення

$$\begin{aligned}A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \\A_{21} &= -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 10, A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4, A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 10, \\A_{31} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6, A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -8.\end{aligned}$$

В такому разі обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 10 & -4 & 10 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}^T,$$

і після транспонування одержимо

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 2,5 & -1,5 \\ 0 & -1 & 0,5 \\ 0,5 & 2,5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 2,5 & -1,5 \\ 0 & -1 & 0,5 \\ 0,5 & 2,5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, відповідь $x=1$, $y=0$, $z=-1$.

Приклад 4. Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} x - y - z = -2, \\ x + y + 2z = 5, \\ -x + y - z = 0. \end{cases}$$

Матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Йї визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Додаємо в цьому визначнику до 2-го та 3-го рядків 1-й рядок. Одержимо визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

розкладаючи який за 2-м стовпцем, будемо мати

$$\det A = -(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Матриця системи, отже, має обернену.

Алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

В такому разі обернена матриця

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T,$$

і після транспонування одержимо

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,75 \\ -0,5 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,75 \\ -0,5 & 0 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, відповідь $x=1$, $y=2$, $z=1$.

Приклад 5. Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = -1, \\ 2x + y + z = 3, \\ x - y + z = -4. \end{cases}$$

Матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

її визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

для спрощення його обчислення додамо 1-й рядок до 2-го і 3-го рядків. Вийде визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix},$$

розкладаючи який за 3-м стовпцем, одержимо

$$\det A = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 + 4) = 11 \neq 0.$$

Матриця системи, отже, має обернену. Алгебраїчні доповнення

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7. \end{aligned}$$

В такому разі обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}^T,$$

і після транспонування одержимо

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -5 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -5 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, відповідь $x=1, y=3, z=-2$.

8. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь.

Розглянемо систему з m лінійних рівнянь із n невідомими

[illegible]

Означення. Елементарними перетвореннями над системою (1) називають такі дії:

- 1) переставлення місцями двох рівнянь системи;
- 2) додавання (або віднімання) до одного з рівнянь системи іншого рівняння, помноженого на ненульове число.

Метод Гаусса полягає в тому, що систему (1) із допомогою елементарних перетворень приводять до т. зв. східчастого вигляду

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{a}_{11}x_1 + \dots & & + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ & \bar{a}_{2k}x_k + \dots & + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ & & \bar{a}_{3l}x_l + \dots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3, \\ & \dots\dots\dots & \\ & & \bar{a}_{rs}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r, \\ & & 0 = \bar{b}_{r+1}, \\ & & \dots\dots\dots \\ & & 0 = \bar{b}_m. \end{array} \right. \quad (2)$$

Можливі 3 випадки.

- 1) Система (2) містить рівняння вигляду $0 = \bar{b}_t, \bar{b}_t \neq 0$. В такому разі вона, очевидно, несумісна.
- 2) Всі $\bar{b}_{r+1} = \dots = \bar{b}_m = 0, r < n$. В такому разі система має безліч розв'язків.
- 3) $r=n$. В такому разі система (2) має трикутний вигляд і має єдиний розв'язок.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2u = -2, \\ 2x + y + z + 2u = -1, \\ 2x - 2y + z + 4u = -2, \\ x + 3y + 2z + u = 2. \end{cases}$$

Щоб виключити з останніх трьох рівнянь системи змінну z , віднімемо від 2-го та 3-го рівнянь подвоєне 1-ше, а від 4-го віднімемо 1-ше

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2u = -2, \\ 5y - 5z - 2u = 3, \\ 2y - 5z = 2, \\ 5y - z - u = 4. \end{cases}$$

Від 4-го рівняння віднімемо 2-ге

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2u = -2, \\ 5y - 5z - 2u = 3, \\ 2y - 5z = 2, \\ 4z + u = 1. \end{cases}$$

Від 2-го віднімаємо подвоєне 3-тє

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2u = -2, \\ y + 5z - 2u = -1, \\ 2y - 5z = 2, \\ 4z + u = 1. \end{cases}$$

Від 3-го віднімаємо подвоєне 2-ге

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2u = -2, \\ y + 5z - 2u = -1, \\ -15z + 4u = 4, \\ 4z + u = 1. \end{cases}$$

Додаємо до 3-го 4-те рівняння, помножене на 4

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2u = -2, \\ y + 5z - 2u = -1, \\ z + 8u = 8, \\ 4z + u = 1. \end{cases}$$

Віднімаємо від 4-го рівняння 3-тє, помножене на 4

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2u = -2, \\ y + 5z - 2u = -1, \\ z + 8u = 8, \\ -31u = -31. \end{cases}$$

З останнього рівняння маємо $u=1$. Підставляючи це в 3-тє, одержуємо

$$z + 8 \cdot 1 = 8,$$

з чого бачимо $z=0$. Підставляючи це в 2-ге, одержуємо

$$y + 5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -1,$$

з чого бачимо $y=1$. Підставляючи в 1-ше, одержуємо

$$x - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = -2,$$

звідки $x = -2$. Отже, відповідь $x = -2$, $y = 1$, $z = 0$, $u = 1$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 4u = 4, \\ 2x + y - 4z + 2u = 0, \\ x - 2y + 3z - 4u = 0, \\ 3x - 4y + 2z - 2u = 0. \end{cases}$$

Ставимо 3-тє рівняння на 1-ше місце

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4u = 0, \\ 2x - y + 3z - 4u = 4, \\ 2x + y - 4z + 2u = 0, \\ 3x - 4y + 2z - 2u = 0. \end{cases}$$

Віднімаємо від 2го рівняння подвоєне 1-ше

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4u = 0, \\ 3y - 3z + 4u = 4, \\ 2x + y - 4z + 2u = 0, \\ 3x - 4y + 2z - 2u = 0. \end{cases}$$

Від 3-го рівняння також віднімаємо подвоєне 1-ше

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4u = 0, \\ 3y - 3z + 4u = 4, \\ 5y - 10z + 10u = 0, \\ 3x - 4y + 2z - 2u = 0. \end{cases}$$

Від 4-го рівняння віднімаємо потроєне 1-ше

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4u = 0, \\ 3y - 3z + 4u = 4, \\ 5y - 10z + 10u = 0, \\ 2y - 7z + 10u = 0. \end{cases}$$

Щоб позбутися змінної y в 3-тньому рівнянні віднімаємо від 3-го рівняння суму 2-го та 4-го

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4u = 0, \\ 3y - 3z + 4u = 4, \\ -4u = -4, \\ 2y - 7z + 10u = 0. \end{cases}$$

Ділимо третє рівняння на (-4) і міняємо місцями з 4-м

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4u = 0, \\ 3y - 3z + 4u = 4, \\ 2y - 7z + 10u = 0, \\ u = 1. \end{cases}$$

Віднімаємо 3-тє рівняння від 2-го

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4u = 0, \\ y + 4z - 6u = 4, \\ 2y - 7z + 10u = 0, \\ u = 1. \end{cases}$$

Віднімемо від 3-го рівняння подвоєне 2-ге

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4u = 0, \\ y + 4z - 6u = 4, \\ -15z + 22u = -8, \\ u = 1. \end{cases}$$

З останнього рівняння бачимо, що $u=1$. Підставляючи знайдене нами значення u в 3-тє рівняння, бачимо $z=2$. Підставляючи $z=2, u=1$ у 2-ге рівняння, бачимо $y=2$, і нарешті, підставляючи це все в 1-ше рівняння, бачимо $x=2$. Отже, відповідь: $x=2, y=2, z=2, u=1$.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 2u = -2, \\ x + 2y - 2z + 2u = 2, \\ x - y + 2z + u = -1, \\ x - 2y + 3z - 2u = 0. \end{cases}$$

Міняємо місцями 1-ше рівняння з останнім

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 2u = 0, \\ x + 2y - 2z + 2u = 2, \\ x - y + 2z + u = -1, \\ 2x - 3y + 4z - 2u = -2. \end{cases}$$

Віднімаємо від 2-го рівняння 1-ше

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 2u = 0, \\ 4y - 5z + 4u = 2, \\ x - y + 2z + u = -1, \\ 2x - 3y + 4z - 2u = -2. \end{cases}$$

Віднімаємо 1-ше рівняння від 3-го

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 2u = 0, \\ 4y - 5z + 4u = 2, \\ y - z + 3u = -1, \\ 2x - 3y + 4z - 2u = -2. \end{cases}$$

Віднімаємо від 4-го рівняння подвоєне 1-ше

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 2u = 0, \\ 4y - 5z + 4u = 2, \\ y - z + 3u = -1, \\ y - 2z + 2u = -2. \end{cases}$$

Міняємо місцями 2-ге та 3-тє рівняння

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 2u = 0, \\ y - z + 3u = -1, \\ 4y - 5z + 4u = 2, \\ y - 2z + 2u = -2. \end{cases}$$

Віднімаємо від 3-го рівняння 2-ге, помножене на 4

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 2u = 0, \\ y - z + 3u = -1, \\ -z - 8u = 6, \\ y - 2z + 2u = -2. \end{cases}$$

Віднімаємо 2-ге рівняння від 4-го, 3-тє ділимо на (-1)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 2u = 0, \\ y - z + 3u = -1, \\ z + 8u = -6, \\ -z - u = -1. \end{cases}$$

Додаємо 3-тє рівняння до 4-го

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 2u = 0, \\ y - z + 3u = -1, \\ z + 8u = -6, \\ 7u = -7. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $u = -1$, підставляючи знайдене нами значення u в 3-тє рівняння, бачимо $z = 2$. Підставляючи $z = 2$, $u = -1$ у 2-ге рівняння, бачимо $y = 4$, і нарешті, підставляючи це все в 1-ше рівняння, бачимо $x = 0$. Отже, відповідь: $x = 0$, $y = 4$, $z = 2$, $u = -1$.

Приклад 4. Розв'язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3u = 2, \\ 2x + 3y + z + 2u = 2, \\ 2x + y - 2z - u = 2, \\ 4x + 3y - 4z - u = 2. \end{cases}$$

Віднімемо від 2-го рівняння подвоєне перше

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3u = 2, \\ y + 5z - 4u = -2, \\ 2x + y - 2z - u = 2, \\ 4x + 3y - 4z - u = 2. \end{cases}$$

Віднімемо від 3-го рівняння подвоєне перше

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3u = 2, \\ y + 5z - 4u = -2, \\ -y + 2z - 7u = -2, \\ 4x + 3y - 4z - u = 2. \end{cases}$$

Віднімемо від 4-го рівняння 1-ше, помножене на 4

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3u = 2, \\ y + 5z - 4u = -2, \\ -y + 2z - 7u = -2, \\ -y + 4z - 13u = -6. \end{cases}$$

До 3-го рівняння додаємо 2-ге

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3u = 2, \\ y + 5z - 4u = -2, \\ 7z - 11u = -4, \\ -y + 4z - 13u = -6. \end{cases}$$

До 4-го рівняння додамо 2-ге

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3u = 2, \\ y + 5z - 4u = -2, \\ 7z - 11u = -4, \\ 9z - 17u = -8. \end{cases}$$

Віднімаємо від 3-го рівняння 4-те

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3u = 2, \\ y + 5z - 4u = -2, \\ -2z + 6u = 4, \\ 9z - 17u = -8. \end{cases}$$

Додамо до 4-го рівняння 3-тє, помножене на 4

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3u = 2, \\ y + 5z - 4u = -2, \\ -2z + 6u = 4, \\ z + 7u = 8. \end{cases}$$

Міняємо місцями два останні рівняння

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3u = 2, \\ y + 5z - 4u = -2, \\ z + 7u = 8, \\ -2z + 6u = 4, \end{cases}$$

Додаємо до 4-го рівняння подвоєне 3-тє

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3u = 2, \\ y + 5z - 4u = -2, \\ z + 7u = 8, \\ 20u = 20. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $u = 1$, підставляючи знайдене нами значення u в 3-тє рівняння, бачимо $z = 1$. Підставляючи $z = 1$, $u = 1$ у 2-ге рівняння, бачимо $y = -3$, і нарешті, підставляючи це все в 1-ше рівняння, бачимо $x = 4$. Отже, відповідь: $x = 4$, $y = -3$, $z = 1$, $u = 1$.

Приклад 5. Розв'язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z + u = 2, \\ 2x - 2y + z + 2u = 1, \\ 2x + y + 4z - 3u = 2, \\ 3x - y + 4z - u = 1. \end{cases}$$

Віднімаємо 3-тє рівняння від 1-го

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 4u = 0, \\ 2x - 2y + z + 2u = 1, \\ 2x + y + 4z - 3u = 2, \\ 3x - y + 4z - u = 1. \end{cases}$$

Віднімаємо від 2-го рівняння подвоєне 1-ше

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 4u = 0, \\ 4y + 5z - 6u = 1, \\ 2x + y + 4z - 3u = 2, \\ 3x - y + 4z - u = 1. \end{cases}$$

Віднімаємо від 3-го рівняння подвоєне 1-ше

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 4u = 0, \\ 4y + 5z - 6u = 1, \\ 7y + 8z - 11u = 2, \\ 3x - y + 4z - u = 1. \end{cases}$$

Віднімаємо від 4-го рівняння потроєне 1-ше

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 4u = 0, \\ 4y + 5z - 6u = 1, \\ 7y + 8z - 11u = 2, \\ 8y + 10z - 13u = 1. \end{cases}$$

Віднімаємо 3-тє рівняння від 4-го

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 4u = 0, \\ 4y + 5z - 6u = 1, \\ 7y + 8z - 11u = 2, \\ y + 2z - 2u = -1. \end{cases}$$

Міняємо місцями 4-те рівняння з 3-м

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 4u = 0, \\ y + 2z - 2u = -1, \\ 7y + 8z - 11u = 2, \\ 4y + 5z - 6u = 1. \end{cases}$$

Віднімаємо від 3-го рівняння 2-ге, помножене на 7

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 4u = 0, \\ y + 2z - 2u = -1, \\ -6z + 3u = 9, \\ 4y + 5z - 6u = 1. \end{cases}$$

Віднімаємо від 4-го рівняння 2-ге, помножене на 4, а 3-тє поділимо на (-3) .

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 4u = 0, \\ y + 2z - 2u = -1, \\ 2z - u = -3, \\ -3z + 2u = 5. \end{cases}$$

Додаємо 4-те рівняння до 3-го

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 4u = 0, \\ y + 2z - 2u = -1, \\ -z + u = 2, \\ -3z + 2u = 5. \end{cases}$$

Віднімаємо від 4-го рівняння потроєне 3-тє

$$\begin{cases} x - 3y - 2z + 4u = 0, \\ y + 2z - 2u = -1, \\ -z + u = 2, \\ -u = -1. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $u = 1$, підставляючи знайдене нами значення u в 3-тє рівняння, бачимо $z = -1$. Підставляючи $z = -1, u = 1$ у 2-ге рівняння, бачимо $y = 3$, і нарешті, підставляючи це все в 1-ше рівняння, бачимо $x = 3$. Отже, відповідь: $x = 3, y = 3, z = -1, u = 1$.

Приклад 6. Розв'язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x - 2y + z + u = 1, \\ 2x - y + 4z - 2u = 2, \\ x - y + 2z + u = 0, \\ x + y + 2z - 2u = -1. \end{cases}$$

Ставимо 3-тє рівняння на 1-ше місце

$$\begin{cases} x - y + 2z + u = 0, \\ x - 2y + z + u = 1, \\ 2x - y + 4z - 2u = 2, \\ x + y + 2z - 2u = -1. \end{cases}$$

Віднімаємо від 2-го та 4-го 1-ше, а від 3-го – подвоєне перше рівняння

$$\begin{cases} x - y + 2z + u = 0, \\ -y - z = 1, \\ y + -4u = 2, \\ 2y - 3u = -1. \end{cases}$$

Множимо 2-ге рівняння на (-1)

$$\begin{cases} x - y + 2z + u = 0, \\ y + z = -1, \\ y + -4u = 2, \\ 2y - 3u = -1. \end{cases}$$

Віднімаємо від 3-го рівняння 2-ге, а від 4-го – подвоєне 2-ге

$$\begin{cases} x - y + 2z + u = 0, \\ y + z = -1, \\ z + 4u = -3, \\ -2z - 3u = 1. \end{cases}$$

Додамо до 4-го рівняння подвоєне 3-тє

$$\begin{cases} x - y + 2z + u = 0, \\ y + z = -1, \\ z + 4u = -3, \\ 5u = -5. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $u = -1$, підставляючи знайдене нами значення u в 3-тє рівняння, бачимо $z = 1$. Підставляючи $z = 1, u = -1$ у 2-ге рівняння, бачимо $y = -2$, і нарешті, підставляючи це все в 1-ше рівняння, бачимо $x = -3$. Отже, відповідь: $x = -3, y = -2, z = 1, u = -1$.

Бібліографічний опис

1. Вища математика: підручник / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків [та ін.]; за ред. М. І. Шинкарика. Тернопіль: Вид-во Карп'юка, 2003. 480с.
2. Вища математика: збірник задач / за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ: Вид-во А.С.К., 2003. 480 с.
3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Р. В. Коляда, Я. С. Пушак, І. О. Мельник. Львів: Магнолія 2006, 2010. 332 с.
4. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. Київ: А.С.К., 2006. 648 с.
5. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1. Київ: Техніка, 2000. 592 с.