Вступ

У курсі алгебри середньої школи задачам на доведення нерівностей відводиться дуже мало часу. Тому учні досить часто не вміють розв'язувати такі задачі або допускають багато помилок при доведенні нерівностей, виконуючи нерівносильні перетворення. Крім того, в програму шкільного курсу включено лише декілька методів доведення нерівностей, за допомогою яких не завжди можна довести нерівність.

У посібнику розглядаються різні методи та прийоми доведення нерівностей, наводяться приклади розв'язування задач кожним методом та подані задачі для самостійної роботи студентів. Посібник також може бути використаний для організації конкурсів, факультативних занять з математики у середній школі, підготовки учнів до олімпіад з математики.

Методи доведення нерівностей

Нехай задані нерівність і деяка множина значень змінних, та потрібно довести, що усі елементи вказаної множини належать множині розв'язків даної нерівності. Такі задачі прийнято називати задачами на доведення нерівностей.

Якщо в задачі на доведення нерівності множина значень змінної не оговорюється – це означає, що справедливість нерівності потрібно встановити для усіх дійсних значень змінної.

Для розв'язання таких задач використовують різні прийоми і методи.

Метод використання означення нерівності між двома числами

За означенням нерівність $a > b$ має місце лише тоді, коли $a - b$ – додатне число. Тому для доведення нерівності $f(a, b, \dots, k) > g(a, b, \dots, k)$ на заданій множині значень $a, b, \dots, k$ необхідно розглянути різницю $f(a, b, \dots, k) - g(a, b, \dots, k)$ й переконатися у тому, що вона додатна для заданих значень $a, b, \dots, k$. Так само для доведення нерівності $f(a, b, \dots, k) \geq g(a, b, \dots, k)$ достатньо показати, що різниця $f(a, b, \dots, k) - g(a, b, \dots, k)$ є невід'ємною для заданих $a, b, \dots, k$.

Приклад 1. Довести, що для $a \geq 0, b \geq 0$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(така нерівність має назву нерівності Коші, або нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним невід'ємних чисел a і b).

Доведення. Для всіх $a \geq 0, b \geq 0$ розглянемо різницю

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$$

Отже, для $a \geq 0, b \geq 0$ має місце нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Зазначимо, що знак рівності у даній нерівності має місце тільки, коли $a = b$.

Приклад 2. Довести, що для $a > 0, b > 0$ має місце нерівність

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Доведення. Розглянемо різницю

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0,$$

причому знак рівності має місце лише, коли $a = b$.

Отже, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ для всіх $a > 0, b > 0$.

Приклад 3. Довести нерівність $18m^2 + 4n^2 + c^2 \geq 6m(2n + c)$.

Доведення. Оскільки не вказано множину значень для m, n, c, вважатимемо, що $m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Для цих значень змінних отримуємо:

$$18m^2 + 4n^2 + c^2 - 6m(2n + c) = (9m^2 - 12mn + 4n^2) + (9m^2 - 6mc + c^2) =$$
$$= (3m - 2n)^2 + (3m - c)^2 \geq 0$$

Отже, $18m^2 + 4n^2 + c^2 \geq 6m(2n + c)$, $\forall m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

Знак рівності має місце, коли $m = \frac{c}{3}$ і $n = \frac{c}{2}$.

Метод використання властивостей нерівностей

Для доведення нерівностей використовують властивості нерівностей, які вивчаються в курсі алгебри середньої школи:

1) якщо $a \geq b$ і $b \geq c$, то $a \geq c$;
2) якщо $a \geq b$, то $a + c \geq b + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$;
3) якщо $a \geq b$ і $c \geq d$, то $a + c \geq b + d$;
4) якщо $a \geq b$ і $c \geq d$, то $a - d \geq b - c$;
5) якщо $a \geq b$ і $c > 0$, то $ac \geq bc$;
6) якщо $a \geq b$ і $c < 0$, то $ac \leq bc$;
7) якщо $a \geq b > 0$ і $c \geq d > 0$, то $ac \geq bd$;
8) якщо $a \geq b > 0$ і $c > d > 0$, то $ac > bd$;
9) якщо $a \geq b > 0$ і $c \geq d > 0$, то $\frac{a}{d} \geq \frac{b}{c}$;
10) якщо $a \geq b > 0$ і $c > d > 0$, то $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$;
11) якщо $0 < b \leq a$ або $b \leq a < 0$, то $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$.

Аналогічні властивості мають місце й для строгих нерівностей, в такому випадку усі нестрогі нерівності слід замінити на строгі.

Приклад 4. Довести, що для всіх дійсних a, b, c таких, що $a^4 + c > 0$, $b^4 + c < 0$, $a < b$ має місце нерівність $a + b < 0$.

Доведення. Оскільки $a^4 + c > 0$, $b^4 + c < 0$, то за правилом віднімання нерівностей (властивість 4) отримуємо $a^4 - b^4 > 0$.

Враховуючи, що $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) > 0$ і $a - b < 0$ (за умовою), а $a^2 + b^2 \geq 0$, отримуємо, що $a + b < 0$, що й потрібно було довести.

Приклад 5. Довести, що для всіх дійсних a, b і c, таких, що $a \geq 2b$ і $b \geq 2c$, має місце нерівність $a - 3c + 1 > 0{,}5b$.

Доведення. Для всіх дійсних a, b і c, таких, що $a \geq 2b$ і $b \geq 2c$, маємо:

$$a - 2c \geq b\ . \qquad (1)$$

Оскільки $b \geq 2c$, то $c \leq 0{,}5b$ і $c - 1 < c \leq 0{,}5b$, або

$$c - 1 < 0{,}5b. \qquad (2)$$

Віднімаючи нерівності (1) і (2), отримуємо

$$a - 3c + 1 > 0{,}5b.$$

Синтетичний метод

Метод полягає в тому, що, використовуючи деякі відомі (опорні) нерівності, за допомогою низки перетворень отримують нерівність, котру потрібно довести. Як опорні нерівності можна використовувати, наприклад, такі нерівності:

1) $a^2 \geq 0$;
2) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, де $a \geq 0, b \geq 0$;
3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, де $a > 0, b > 0$;
4) $ax^2 + bx + c > 0$, де $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$;
5) $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$.

Приклад 6. Довести нерівність $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$, $\quad n \in \mathbb{N},\ n > 1$.

Доведення. Візьмемо за опорну нерівність Коші:

$$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{n \cdot 1};$$

$$\frac{(n-1)+2}{2} \geq \sqrt{(n-1) \cdot 2};$$

$$\frac{(n-2)+3}{2} \geq \sqrt{(n-2) \cdot 3};$$

$$\ldots$$

$$\frac{2+(n-1)}{2} \geq \sqrt{2 \cdot (n-1)};$$

$$\frac{1+n}{2} \geq \sqrt{1 \cdot n}.$$

Помноживши ці n нерівностей, отримаємо:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq \sqrt{(n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1)(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)n)} = \sqrt{n!\,n!} = n!$$

У першій опорній нерівності Коші знак рівності можливий лише тоді, коли $n = 1$, але за умовою $n > 1$, тому перша опорна нерівність може бути тільки строгою, і після множення опорних нерівностей отримана нерівність також буде строгою, тобто $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!, \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1$.

Приклад 7. Довести, що, коли $a > 0, b > 0, c > 0$, має місце нерівність

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Доведення. Візьмемо за опорні такі нерівності:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2,\ \ \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2,\ \ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2.$$

Додаючи опорні нерівності, отримаємо

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 6.$$

Виконаємо рівносильні перетворення:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6;$$

$$\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right) \geq 9;$$

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c} \geq 9;$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Оскільки опорні нерівності перетворюються на рівності лише тоді, коли, відповідно $a = b,\ a = c,\ b = c$, то в отриманій після додавання і перетворень нерівності знак рівності має місце лише тоді, коли $a = b = c$.

Метод доведення від супротивного

Нехай потрібно довести, що $A > B$. Припускаючи протилежне, що $A \leq B$, приходять до суперечності, з чого роблять висновок, що $A > B$.

Приклад 8. Довести, що, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, то

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

Доведення. Припустимо протилежне, що існують такі невід'ємні значення a, b, c, d, для яких указана нерівність не виконується, тобто

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

Оскільки обидві частини цієї нерівності невід'ємні, то підносячи їх до квадрату та виконуючи рівносильні перетворення, отримуємо:

$$(a+c)(b+d) < ab + cd + 2\sqrt{abcd}$$

$$ab + cb + ad + cd < ab + cd + 2\sqrt{abcd}$$

$$\frac{bc+ad}{2} < \sqrt{(bc)(ad)},$$

що суперечить нерівності Коші.

Метод рівносильних перетворень

Нехай потрібно довести нерівність $A > B$ в деякій області D. За допомогою рівносильних перетворень в області D нерівність

$$A > B \tag{3}$$

перетворюють до очевидної нерівності

$$\alpha > \beta. \tag{4}$$

Оскільки нерівність (4) очевидна і рівносильна нерівності (3) в області D, то й нерівність (3) є вірною.

Очевидна нерівність часто приймає вигляд $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$.

Метод рівносильних перетворень ще називають аналітичним.

Приклад 9. Довести, що $\sqrt{10} + \sqrt{2} > \sqrt{15}$.

Доведення. Виконаємо рівносильні перетворення. Оскільки обидві частини цієї нерівності невід'ємні, то підносячи їх до квадрату, отримуємо:

$$10 + 2\sqrt{20} + 2 > 15,$$

що рівносильно

$$2\sqrt{20} > 3,$$

і знову, підносячи до квадрату, отримуємо очевидну нерівність:

$$4 \cdot 20 > 9.$$

Отже, початкова нерівність доведена.

Метод посилення нерівності або метод оцінок

Метод полягає в наступному: нехай необхідно довести нерівність $A > B$. Ліву частину нерівності, що доводиться, зменшимо: $A > A'$, а праву – збільшимо: $B' > B$, причому так, щоб отримати вочевидь вірну нерівність $A' > B'$. Таким чином, отримаємо такий «ланцюжок» нерівностей:

$$A > A' > B' > B.$$

Звідси робимо висновок, що $A > B$.

Приклад 10. Довести, що, коли $n \in \mathbb{N}, n > 1,$ виконується нерівність:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Доведення. Маємо:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2 \cdot 2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{2-1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3 \cdot 3} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{3-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

… … … … … … … … … … … … … … … … …

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-(n-1)}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Таким чином, ліва частина нашої нерівності оцінюється так:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Нерівність доведено.

Приклад 11. Довести нерівність:

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}}} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} < 5$$

(Кожний доданок містить n коренів).

Доведення. Скористаємось тим фактом, що $\sqrt[3]{6} < 2,\ \sqrt{6} < 3.$

Тоді отримаємо послідовно такий «ланцюжок» нерівностей:

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}}} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} <$$

$$< \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots \sqrt[3]{6 + 2}}} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6 + 3}}} <$$

$$< \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots \sqrt[3]{8}}} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{9}}} < \cdots < 2 + 3 = 5.$$

Нерівність доведено.

Метод математичної індукції

Метод математичної індукції застосовують для доведення нерівностей, змінна яких належить множині натуральних чисел.

Нехай потрібно довести нерівність

$$P(n) > Q(n), \quad \forall n \geq k_0, n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

(якщо нерівність потрібно довести $\forall n \in \mathbb{N}$, то $k_0 = 1$).

За методом математичної індукції:

1) доводять, що нерівність (5) має місце, коли $n = k_0$;
2) виходячи з індуктивного припущення, що нерівність (5) справедлива, коли $n = k \ \ (k \geq k_0)$, доводять справедливість нерівності, коли $n = k + 1$.

Приклад 12. Довести нерівність

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad \forall n > 1.$$

Доведення. Перевіримо виконання нерівності, коли $n = 2$:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2 < 2\sqrt{2}.$$

Отже, коли $n = 2$, нерівність доведена.

Припустимо, що нерівність справедлива, коли $n = k \geq 2$, тобто

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}.$$

Доведемо, використовуючи попереднє припущення, що нерівність має місце і для $n = k + 1$:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4k^2+4k}+1}{\sqrt{k+1}} < \frac{\sqrt{4k^2+4k+1}+1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2k+1+1}{\sqrt{k+1}} = 2\sqrt{k+1}.$$

Нерівність для $n = k + 1$ доведена, а отже, за принципом математичної індукції вона має місце і для довільного $n > 1$.

Приклад 13. Довести, що для довільного натурального $n \geq 10$ має місце нерівність $2^n - n^3 > 23$.

<u>Доведення.</u> Перевіримо виконання нерівності для $n = 10$.

$$2^{10} - 10^3 = 24 > 23$$

Отже, коли $n = 10$, нерівність доведена.

Припустимо, що для деякого $k \ \ (k \in \mathbb{N}, k \geq 10) \ \ 2^k - k^3 > 23$, і доведемо нерівність $2^{k+1} - (k+1)^3 > 23$.

Перетворимо ліву частину цієї нерівності та скористаємося індуктивним припущенням:

$$2^{k+1}-(k+1)^3=2\cdot 2^k-k^3-3k^2-3k-1=$$
$$=2(2^k-k^3)+k^3-3k^2-3k-1>2\cdot 23+(k^3-3k^2)-(3k-9)-10=$$
$$=36+k^2(k-3)-3(k-3)=36+(k-3)(k^2-3)>23,$$

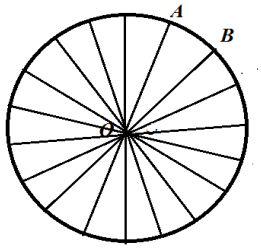
оскільки для $k\geq 10$ $(k-3)(k^2-3)>0$.

Отже, за принципом математичної індукції $2^n-n^3>23, \forall n\geq 10, n\in\mathbb{N}$.

Тригонометричний метод

Тригонометричний метод полягає в тому, що у ході доведення нерівностей використовують формули тригонометрії.

Приклад 14. Довести нерівність: $\sin 20°<\frac{7}{20}$.



Доведення. Розділимо одиничний круг з центром в точці O на 18 однакових секторів з центральним кутом 20°. Площа кожного такого сектора дорівнює $1/18$ площі одиничного круга, тобто дорівнює $\pi/18$. Розглянемо трикутник AOB. Знайдемо його площу:

$$S_{\Delta\text{AOB}}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\sin 20°<S_{\text{сект.}AOB}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\frac{1}{2}\sin 20°<\frac{\pi}{18}\iff \sin 20°<\frac{\pi}{9}<\frac{3{,}15}{9}=\frac{7}{20}.$$

Нерівність доведено.

Приклад 15. Довести, що якщо $\alpha,\beta,\gamma-$ кути трикутника, то

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos\gamma>\frac{3}{4}.$$

Доведення. Розглянемо вираз у лівій частині нерівності:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos\gamma=1+\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+\cos(180°-(\alpha+\beta))=$$
$$=1+\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)=1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=1+\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)-1).$$

Виходячи з нерівності $(x+y)^2\geq 4xy, \forall x,y\in\mathbb{R}$, отримуємо:

$$4\cdot\cos(\alpha+\beta)(1-\cos(\alpha-\beta))\leq((\cos(\alpha+\beta)+1-\cos(\alpha-\beta))^2=$$
$$=(1-2\sin\alpha\sin\beta)^2$$

Оскільки $\alpha, \beta -$ кути трикутника, то вірна нерівність:

$$0 < 2\sin\alpha\sin\beta < 2.$$

Тому

$$(1 - 2\sin\alpha\sin\beta)^2 < 1.$$

Тоді

$$4\cos(\alpha+\beta)(1-\cos(\alpha-\beta)) < 1 \iff 4\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)-1) > -1 \iff$$

$$\iff \cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)-1) > -\frac{1}{4} \iff$$

$$\iff \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma = 1 + \cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)-1) > \frac{3}{4}.$$

Нерівність доведено.

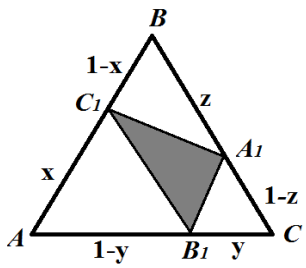
Геометричний метод

Геометричний метод полягає в тому, що при доведенні нерівностей використовуються факти та співвідношення, отримані в курсі геометрії.

Приклад 16. Довести нерівність:

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1, \ \ \forall x, y, z \in (0; 1).$$

Доведення. Розглянемо правильний трикутник ABC із стороною 1. Нехай A_1, B_1, $C_1 -$ точки відповідно на сторонах BC, CA, AB. Покладемо $AC_1 = x$, $CB_1 = y$, $BA_1 = z$. Тоді $BC_1 = 1 - x$, $CA_1 = 1 - z$, $AB_1 = 1 - y$.



Розглянемо очевидну нерівність:

$$S_{\Delta AB_1C_1} + S_{\Delta CB_1A_1} + S_{\Delta BA_1C_1} < S_{\Delta ABC}. \qquad (6)$$

Оскільки

$$S_{\Delta AB_1C_1} = \frac{1}{2}x(1-y)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\Delta CB_1A_1} = \frac{1}{2}y(1-z)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\Delta BA_1C_1} = \frac{1}{2}z(1-x)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

то з нерівності (6) отримаємо:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\big(x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)\big)<\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Leftrightarrow$$

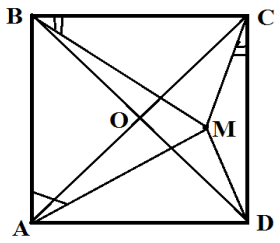
$$\Leftrightarrow\ x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1,\ \ \forall x,y,z\in(0;1).$$

Нерівність доведено.

Приклад 17. Всередині квадрата ABCD довільно вибрано точку M. Довести, що виконується нерівність:

$$\angle MAB+\angle MBC+\angle MCD+\angle MDA>135°.$$

Доведення. Нехай точка O – точка перетину діагоналей квадрата ABCD. Очевидно, що



$$\Delta AOB=\Delta BOC=\Delta COD=\Delta DOA.$$

Точка M опиниться в одному з зазначених трикутників.

(Якщо точка M буде належати межі двох трикутників, то можна вважати, що вона потрапила в будь-який з цих трикутників).

Нехай $M\in\Delta COD$. Тоді, очевидно, $\angle MAB\geq 45°$, $\angle MBC=45°-\angle DBM$, $\angle MDA=45°+\angle MDB$.

Тому, $\angle MAB+\angle MBC+\angle MDA\geq 135°+\angle MDB-\angle DBM$.

Оскільки в будь-якому трикутнику навпроти більшої сторони лежить більший кут, а $MB\geq MD$, то з ΔDBM випливає нерівність $\angle DBM\leq\angle MDB$.

Тоді $\angle MAB+\angle MBC+\angle MDA\geq 135°$, а оскільки $\angle MCD>0$, то

$$\angle MAB+\angle MBC+\angle MCD+\angle MDA>135°.$$

Нерівність доведено.

Метод використання похідної

Апарат математичного аналізу, яким володіють учні старших класів середньої школи, дає можливість застосувати похідну для доведення нерівностей.

При цьому слід користуватися такими фактами.

1. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a,b)$, причому $f(a)=M$, і на цьому проміжку похідна $f'(x)<0$, то $f(x)\leq M$, $\forall x\in[a,b)$. Відповідно, якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a,b]$, причому $f(b)=m$, і на цьому проміжку похідна $f'(x)<0$, то $f(x)\geq m$, $\forall x\in(a,b]$.
2. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a,b)$, причому $f(a)=M$, і на цьому проміжку похідна $f'(x)>0$, то $f(x)\geq M$, $\forall x\in[a,b)$. Відповідно, якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a,b]$,

причому $f(b) = m$, і на цьому проміжку похідна $f'(x) > 0$, то $f(x) \leq m$, $\forall x \in (a, b]$.

3. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a, b]$, причому $f(a) = M$ і $f(b) = m$, і на цьому проміжку похідна $f'(x) < 0$, то $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$.

4. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a, b]$, причому $f(a) = M$ і $f(b) = m$, і на цьому проміжку похідна $f'(x) > 0$, то $M \leq f(x) \leq m, \forall x \in [a, b]$.

5. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку (a, b) $([a, b], [a, b), (a, b])$, і в одній з точок цього проміжку набуває найбільшого значення, що дорівнює M, то на цьому проміжку $f(x) \leq M$.

6. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку (a, b) $([a, b], [a, b), (a, b])$, і в одній з точок цього проміжку набуває найменшого значення, що дорівнює m, то на цьому проміжку $f(x) \geq m$.

7. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку (a, b) $([a, b], [a, b), (a, b])$, і на цьому проміжку набуває найменшого значення, що дорівнює m, і найбільшого значення, що дорівнює M, то на цьому проміжку $m \leq f(x) \leq M$.

З перших двох тверджень випливає такий алгоритм для доведення нерівності $f(x) \leq M, \forall x \in [a, b)$, або $f(x) \geq m,\ \forall x \in (a, b]$:

1) знайти похідну $f'(x)$ і встановити її знак на даному проміжку;
2) обчислити значення $f(a) = M$ $(f(b) = m)$;
3) якщо $f'(x) < 0$, то виконується нерівність $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq m)$, якщо $f'(x) > 0$, то $f(x) \geq M$ $(f(x) \leq m)$.

Аналогічні міркування проводимо і у випадках 3-4.

З тверджень 5-7 випливає такий алгоритм для проміжку (a, b) (на прикладі нерівності $f(x) \geq m$ на (a, b)):

1) знайти похідну $f'(x)$;
2) визначити критичні точки на (a, b);
3) з'ясувати характер екстремумів в цих точках: нехай у точці $x_0 \in (a, b)$ досягається найменше значення;
4) обчислити $m = f(x_0)$;
5) зробити висновок, що $f(x) \geq m, \forall x \in (a, b)$.

Якщо у точці $x_1 \in (a, b)$ досягається найбільше значення, що дорівнює M, то $f(x) \leq M$.

Тоді $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in (a, b)$.

Щодо тверджень 5-7 на проміжках $[a, b], [a, b), (a, b]$, то для визначення найбільшого (найменшого) значень функції $f(x)$ в цьому випадку треба, порівняно з попереднім, обчислити ще $f(a)$ і $f(b)$ (якщо a і (чи) b належать проміжку).

Приклад 18. Довести нерівність:

$$\lg x - \frac{2x}{\ln 10} \leq -\frac{2}{\ln 10}\ , x \in [1; +\infty).$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = \lg x - \frac{2x}{\ln 10}$.

1) Знайдемо її похідну та визначимо на проміжку $[1;+\infty)$ знак цієї похідної:

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}-\frac{2}{\ln 10}=-\frac{2}{\ln 10}\left(\frac{x-0{,}5}{x}\right)<0.$$

Отже, функція $f(x)$ для всіх $x\in[1;+\infty)$ є спадною.

2) Обчислимо $f(1)$: $f(1)=\lg 1-\frac{2}{\ln 10}=-\frac{2}{\ln 10}$.
3) Згідно з твердженням 1 дістанемо, що

$$\lg x-\frac{2x}{\ln 10}\le-\frac{2}{\ln 10}\ ,x\in[1;+\infty).$$

Нерівність доведено.

Приклад 19. Довести нерівність:

$$0\le\sin x+\operatorname{tg}x\le\frac{\sqrt{2}}{2}+1,\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right].$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(x)=\sin x+\operatorname{tg}x$ на проміжку $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

1) $f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}>0,\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
2) $f(0)=\sin 0+\operatorname{tg}0=0;\ \ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+1.$
3) $\inf\limits_{x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right].}f(x)=0,\ \ \sup\limits_{x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right].}f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+1.$

Тому $\quad 0\le\sin x+\operatorname{tg}x\le\frac{\sqrt{2}}{2}+1,\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Нерівність доведено.

Приклад 20. Довести нерівність:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sin x}{2+\cos x}\le\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}\ ,\forall x\in\mathbb{R}$.

1) $f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin x\sin x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$.
2) Знайдемо критичні точки функції $f(x)$: $\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=0$.
   Зазначимо, що $(2+\cos x)^2\ne 0,\forall x\in\mathbb{R}$, тому $2\cos x+1=0$.
   Звідси отримаємо:

$$\cos x=-\frac{1}{2},$$

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

3) Дослідимо знак похідної на $\mathbb{R}$.
   В околі точок $x_k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, похідна змінює знак з «+» на «-», отже, це - точки максимуму.
   В околі точок $x_m = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, похідна змінює знак з «-» на «+», тому це - точки мінімуму.
4) Обчислимо значення функції в точках екстремуму:

$$f(x_k) = f\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)}{2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2\left(2 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

$$f(x_m) = f\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m\right) = \frac{\sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m\right)}{2 + \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m\right)} = \frac{-\sqrt{3}}{2\left(2 - \frac{1}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, m \in \mathbb{Z}.$$

Тоді на множині $\mathbb{R}$ будемо мати:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sin x}{2 + \cos x} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Нерівність доведено.

Графічний метод

Деякі нерівності доцільно доводити графічно. Якщо ліва і права частини нерівності – вирази з однією і тією самою змінною, то доведення, наприклад, нерівності $f(x) > g(x)$ за певних умов, що можуть накладатися на x, проводиться за таким алгоритмом:

1) будують графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$;
2) з'ясовують, чи для всіх x із заданої множини ординати точок графіка функції $y = f(x)$ більші за відповідні ординати точок графіка функції $y = g(x)$ (графік функції $y = f(x)$ для таких значень x повинен лежати вище від графіка функції $y = g(x)$).

Якщо відповідь ствердна, то нерівність вважається доведеною. Аналогічно, трактується доведення нерівностей: $f(x) \geq g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$.

(Коли маємо нестрогі нерівності, графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$ можуть мати спільні точки).

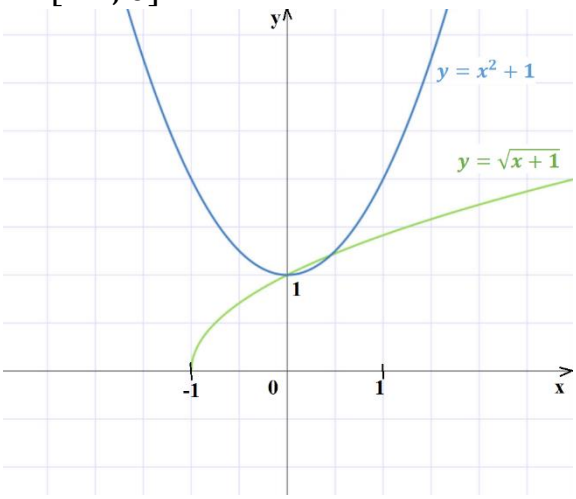
Графічний метод доведення нерівностей слід, очевидно, використовувати в тих випадках, коли доведення іншими методами виконати неможливо, і за умови, що можна побудувати графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$.

Графічний метод бажано застосовувати тоді, коли він більш раціональний за інші методи доведення нерівностей або рівноцінний їм.

Приклад 21. Довести нерівність:

$$x^2 + 1 \geq \sqrt{x+1}, \forall x \in [-1; 0].$$

Доведення. Розглянемо функції $f(x) = x^2 + 1$ і $g(x) = \sqrt{x+1}$. Побудуємо їх графіки в одній системі координат.



Із рисунка робимо висновок, що на проміжку $[-1; 0]$ графік функції $f(x) = x^2 + 1$ лежить не нижче графіка функції $g(x) = \sqrt{x+1}$.

Тому

$$x^2 + 1 \geq \sqrt{x+1}, \forall x \in [-1; 0].$$

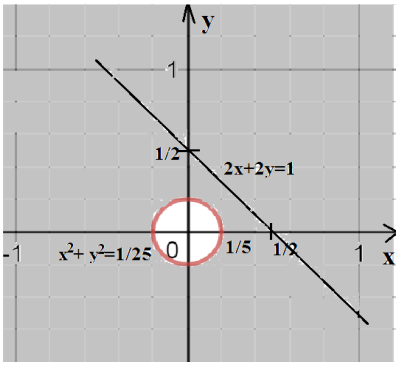
Нерівність доведено.

Інколи графічний метод використовують і при доведенні таких нерівностей, ліва і права частини яких мають вирази з двома змінними. Розглянемо, наприклад, алгоритм доведення нерівності $f(x, y) > 0$ за умови, що $g(x, y) = 0$. Спочатку побудуємо, якщо це можливо, графіки рівнянь $f(x, y) = 0$ і $g(x, y) = 0$. Потім з'ясовуємо, чи попадають всі точки графіка рівняння $g(x, y) = 0$ в область, що визначається нерівністю $f(x, y) > 0$. Якщо відповідь ствердна, то нерівність при виконанні заданих умов вважається доведеною.

Приклад 22. Довести, що для всіх дійсних x і y таких, що $2x + 2y = 1$, виконується нерівність

$$x^2 + y^2 > \frac{1}{25}.$$

Доведення. Будуємо в системі координат xOy графіки рівнянь $2x + 2y = 1$, $x^2 + y^2 = \frac{1}{25}$. Графіком першого рівняння є пряма, а графіком другого – коло з центром в початку координат і радіусом $\frac{1}{5}$. Точки, координати яких задовольняють нерівність $x^2 + y^2 > \frac{1}{25}$, містяться поза колом (заштрихована частина площини). Точки, координати яких задовольняють рівняння $2x + 2y = 1$, лежать на прямій, розміщеній у заштрихованій частині площини.



Отже, координати всіх точок, що містяться на прямій, задовольняють нерівність $x^2 + y^2 > \frac{1}{25}$, тобто за умови $2x + 2y = 1$ нерівність $x^2 + y^2 > \frac{1}{25}$ виконується.

Завдання для самостійної роботи

Варіант 1

1. Довести нерівність $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2, \quad a + b \geq 0$.
2. Довести, що для всіх x є $[-1;\ 0]$ має місце нерівність $x^2 + 1 \geq \sqrt{x+1}$.
3. Нехай точки $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ лежать на колі $x^2 + y^2 = 1$. Довести, що
$$|x_1y_2 + x_2y_1| \leq 1.$$
4. Довести, що для всіх $x > 0$ виконується нерівність $\log_3^2 x + 2\log_3 x \log_3 \frac{3}{x} \leq 1$.

Варіант 2

1. Довести нерівність $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2^n+1} < 1$.
2. Довести нерівність $\sin\left(\frac{\pi - 3cosx}{2}\right) > 0$.
3. Використовуючи критерій монотонності, довести нерівність $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$.
4. Довести нерівність $(x+y)(x+y+2\cos x) + 2 \geq 2\sin^2 x$. При яких значеннях x і y досягається рівність?

Варіант 3

1. Точка $(x; y; z)$ з додатними координатами належить площині $x + y + z = 1$. Довести, що $(1-x)(1-y)(1-z) \geq 8xyz$.
2. Довести, що для всіх $x_i\ (i = 1, 2, \dots, n)$ таких, що $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ виконується нерівність $\frac{\arcsin x_1}{\arccos x_1} < \frac{arsin\, x_1 + \arcsin x_2 + \cdots + \arcsin x_n}{\arccos x_1 + \arccos x_2 + \cdots + \arccos x_n} < \frac{\arcsin x_n}{\arccos x_n}$.
3. У трикутнику ABC точка B з'єднана з довільною точкою D основи AC. Довести нерівність $AB + BC - 2BD < AC$.
4. Довести, що для довільного натурального n $\lg(n+1) > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \cdots + \lg n}{n}$.

Варіант 4

1. Довести, що якщо точка $(x; y)$ знаходиться на прямій $x + y - 2 = 0$, то $x^4 + y^4 \geq 2$. Для якої точки цієї прямої виконується знак рівності?
2. Довести, що для довільного $n \epsilon \mathbb{N}$ виконується нерівність
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$
3. Використовуючи критерій монотонності, довести, що для довільного натурального $n \geq 2$ має місце нерівність $\ln^2 n > \ln(n-1) \cdot \ln(n+1)$.
4. Довести, що якщо $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то має місце нерівність $1 + ctg\alpha \leq ctg\frac{\alpha}{2}$.

Варіант 5

1. Довести, що якщо точка $(x; y)$ знаходиться на колі $x^2 + y^2 = a^2$,то $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{4}{a^2}$.
2. Довести, що якщо $a^2 + b^2 = 1$ і $c^2 + d^2 = 1$, то $|ac - bd| \leq 1$.
3. Використовуючи критерій монотонності, довести, що $\forall x \epsilon \mathbb{R}$ виконується нерівність $e^x \geq 1 + x$, причому знак рівності буде лише в точці $x = 0$.

4. Довести нерівність $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

Варіант 6

1. Довести нерівність $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$.
2. Довести, що $\forall x \in \mathbb{R}$ має місце нерівність $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$.
Вказівка. Ввести допоміжний кут і використовувати нерівність $|\sin x| \le 1$.
3. Довести, що для довільних натуральних чисел $n \ge 1$ і $k \ge 2$ $\frac{2}{\sqrt[k]{n+1}+\sqrt[k]{n-1}} > \frac{1}{\sqrt[k]{n}}$.
Вказівка. Дослідити на монотонність функцію $f(x) = \sqrt[k]{x-1} - \sqrt[k]{x}$.
4. Довести, що якщо $a > b > 0$, то має місце нерівність $a^a b^b > a^b b^a$.

Варіант 7

1.Якщо точка $(x; y)$ належить прямій $x + y - 1 = 0$, то $x^2 + y^2 \ge \frac{1}{2}$.
2.Довести, що якщо $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, то виконується нерівність $\frac{tg\, x_2}{tg\, x_1} > \frac{x_2}{x_1}$.
3. Довести, що якщо $a,\ b$ – катети прямокутного трикутника, то $a^4 + b^4 \ge 2$, якщо $a + b = 2$.
4.Довести,що якщо $a > b > 0$, то має місце нерівність $\log_m \frac{b}{a} < \log_m \frac{1+b}{1+a}$, де $m > 1$.

Варіант 8

1. Довести, що якщо точка $(x; y; z)$ знаходиться на площині $x + y + z = 0$, то $xy + yz + zx \le 0$.
2. Довести нерівність $\left(a + \sqrt[3]{b^2}\right)^3 - b^2 \ge a(a^2 + 3b\sqrt[3]{b})$.
3. Використовуючи критерій монотонності, довести, що для всіх $x > -1$, $x \ne 0$ виконується нерівність $\ln(x+1) < x + \frac{x^2}{2}$.
4. Довести, що якщо $x \ne k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, то $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin(2n-1)x}{\sin x} > 0$.
Вказівка. Помножити чисельник і знаменник на $\sin x$.

Варіант 9

1. Якщо точка $(x; y; z)$ належить площині $x + y + z = 3$, то $x^2 + y^2 + z^2 \ge 3$.
2.Довести нерівність $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) > 0$.
3. Якщо a, b – катети прямокутного трикутника, то довести, що має місце нерівність $2^n(a^n + b^n) > (a+b)^n$, де $n \in \mathbb{N}$.
4. Довести, що для всіх допустимих значень x вираз $\frac{\sin x + tg\, x}{\cos x + ctg\, x}$ приймає лише додатні значення.

Варіант 10

1. Довести нерівність $a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$, коли $a + b + c \ge 0$.

Вказівка. Довести допоміжну нерівність $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$.

2. Довести нерівність $xy > 1$, якщо $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2{,}25$.

3. Нехай $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. Використовуючи монотонність функцій $\sin x$ і $\cos x$ на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, довести, що $tg\ \alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n} < tg\ \alpha_n$.

4. Довести, що $x^2(4 + \log_2^2 y) + 2x\log_2 y + \log_2^2 y + 1 \geq 0$.
За яких значень x та y досягається рівність?

Варіант 11

1. Довести, що якщо точка $(x; y)$ з додатними координатами знаходиться на прямій $x + y - 1 = 0$, то $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

Вказівка. Довести допоміжну нерівність $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$.

2. Довести, що для будь-яких додатних чисел a і b має місце нерівність

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a}{b} + \frac{4}{b^2}} > \frac{ab+3}{2b}.$$

3. Якщо a, b – катети прямокутного трикутника, c – гіпотенуза, то довести, що має місце нерівність $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$, коли $a + b + c = 1$.

4. Довести нерівність $\sin^4 x + 4 \geq \sin x\,(\sin x + \sin 2x)$.

Варіант 12

1. Довести нерівність $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$.

Вказівка. Довести допоміжну нерівність $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Довести, що для $x \in [1; 10]$ має місце нерівність $\sqrt[3]{x-2} < 2\sqrt{2x} - 3$.

3. Використовуючи критерій монотонності, довести нерівність $\ln x \leq x - 1, x > 0$.

4. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежать на проміжку $[0; \pi]$. Довести, що

$$|\sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)| \leq \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n.$$

Список рекомендованої літератури

1. Блох А.Ш., Неверов Г.С. Решение неравенств. Минск, 1962. 43с.
2. Коровкин П.П. Неравенства. М.: Наука, 1966. 56с.
3. Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства. М.: Физматлит, 2002. 256с.

Зміст

Вступ 3

Методи доведення нерівностей 3

Метод використання означення нерівності між двома числами 3

Метод використання властивостей нерівностей 4

Синтетичний метод 5

Метод доведення від супротивного 6

Метод рівносильних перетворень 7

Метод посилення нерівності, або метод оцінок 7

Метод математичної індукції 9

Тригонометричний метод 10

Геометричний метод 11

Метод використання похідної 12

Графічний метод 15

Завдання для самостійної роботи 17

Список рекомендованої літератури 20