Вступ

В шкільному курсі математики основний акцент робиться на вивченні стандартних методів розв’язання рівнянь і нерівностей: графічного метода, метода заміни змінних та метода інтервалів. Але існує досить великий клас задач, які неможливо розв’язати вказаними методами. У цьому випадку потрібно використовувати ті чи інші властивості функцій. Зазвичай вивчення самої теми «Властивості функцій» викликає певні труднощі. Тим паче, традиційно важким є розв’язання рівнянь і нерівностей за допомогою цих властивостей.

Перш за все, це пов’язано с досить великою різноманітністю властивостей різних функцій (обмеженість, монотонність, парність, періодичність, опуклість і т. п.), а також з тим, що важко з першого погляду вгадати ті властивості, які є суттєвими при розв’язуванні заданого рівняння або нерівності. Саме тому методи з використанням властивостей функцій (які називають нестандартними) і викликають найбільші труднощі у школярів.

Розглянемо ці методи детальніше.

Використання області допустимих значень

Інколи знаходження області допустимих значень дозволяє довести, що рівняння (або нерівність) не має розв’язків, а інколи дозволяє знайти розв’язки рівняння (або нерівності) за допомогою безпосередньої підстановки чисел в ОДЗ.

Приклад 1. Розв’язати рівняння:

$$\sqrt[4]{2-x} = \log_6(x-2).$$

Розв’язання.

Знайдемо ОДЗ цього рівняння:

$$\begin{cases} 2-x \geq 0, \\ x-2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \emptyset.$$

Тобто це рівняння не має розв’язків.

Відповідь: розв’язків немає.

Приклад 2. Розв’язати рівняння:

$$\sqrt{|\cos x|} = \sqrt[6]{-|\cos x|} + \mathrm{ctg}x.$$

Розв’язання.

Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} |\cos x| \geq 0, \\ -|\cos x| \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Підставимо отримані значення в задане рівняння. Отримає, що його права і ліва частини дорівнюють нулю. Це і означає, що всі $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є розв'язками.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt[4]{9 - x^2} + \sqrt[6]{x^2 - 9} < 5^x - \log_7(40 + x^2).$$

Розв'язання.

Знайдемо ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0, \\ x^2 - 9 \geq 0, \\ 40 + x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in \{-3, 3\}.$$

Підставимо спочатку $x_1 = 3$ в задану нерівність. Отримаємо:

$$0 = \sqrt[4]{9 - x^2} + \sqrt[6]{x^2 - 9} < 5^x - \log_7(40 + x^2) = 123.$$

Тобто $x_1 = 3$ є розв'язком нерівності.

Тепер підставимо $x_2 = -3$. Будемо мати:

$$0 = \sqrt[4]{9 - x^2} + \sqrt[6]{x^2 - 9} > 5^x - \log_7(40 + x^2) = -1\frac{124}{125}.$$

Задана нерівність в цьому випадку не виконується.

Відповідь: $x = 3$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність:

$$\log_2 x < \sqrt{1 - x^2}.$$

Розв'язання.

Знайдемо ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} x > 0. \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

Вочевидь, $x = 1$ не є розв'язком даної нерівності.

Для $0 < x < 1$ будемо мати:

$$\log_2 x < 0, \quad \sqrt{1 - x^2} > 0 \quad \Rightarrow \log_2 x < \sqrt{1 - x^2}.$$

Відповідь: $x \in (0; 1)$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt{x+4}+\sqrt[4]{16-x}\ <2.$$

Розв'язання.

ОДЗ заданої нерівності: $x\in[-4,16]$. Розіб'ємо цю множину на 2 проміжки: $x\in[-4,0]$ і $x\in(0;16]$.

Для $x\in[-1,0]$ будемо мати: $\sqrt{x+4}\geq 0,\ \sqrt[4]{16-x}\geq\sqrt[4]{16}=2.$ Тому, $\sqrt{x+4}+\sqrt[4]{16-x}\ \geq 2$ на цьому проміжку, задана нерівність не має на ньому розв'язків.

Нехай тепер $x\in(0;16]$. Тоді $\sqrt{x+4}>2,\ \sqrt[4]{16-x}\geq 0.$

Тому, $\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{16-x}\ >2$. Тобто на проміжку $(0;16]$ задана нерівність також не має розв'язків.

Відповідь: розв'язків немає.

Завдання для самостійного розв'язування

Розв'язати рівняння:

1. $\sqrt{3-x}=\log_7(x-3)$.
2. $\sqrt{|\sin x|}=\sqrt[4]{-|\sin x|}+\mathrm{tg}x$.

Розв'язати нерівності:

3. $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{x^4-1}<2^x-\log_2(1+x^4)$.
4. $\log_9 x<\sqrt{1-x^2}$.
5. $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}\ <\sqrt{3}$.

Використання обмеженості функцій

При розв'язуванні рівнянь і нерівностей властивість обмеженості функції знизу або зверху на деякій множині досить часто має основне значення.

Наприклад, якщо для всіх x на деякій множині M виконуються нерівності $f(x)>K,\ \ g(x)<K$, де K – деяке число, то на множині M рівняння $f(x)=g(x)$ і нерівність $f(x)<g(x)$ не мають розв'язків.

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

$$\cos\left(x^{10}+4x+5\right)=x^2+4x+7.$$

Розв'язання.

На всій множині дійсних чисел будемо мати:

$$\cos\,(x^{10}+4x+5) \le 1, \qquad x^2+4x+7=(x+2)^2+3 \ge 3.$$

Тобто завжди $\cos\,(x^{10}+4x+5) < x^2+4x+7$.

Відповідь: розв'язків немає.

Досить часто при розв'язуванні рівнянь і нерівностей разом із властивістю обмеженості функцій використовується ідея одночасного екстремума функцій. У загальному випадку мають місце наступні теореми про необхідність одночасних екстремумів у функцій, які містяться в рівняннях (або нерівностях), для існування розв'язків цих рівнянь (або нерівностей).

Теорема 1 *(одночасний максимум).* Якщо функції *f(x)* і *g(x)* задовольняють нерівностям $f(x) \le A,\;\; g(x) \le B$, то

$$f(x)+g(x) \le A+B \;\Leftrightarrow\; f(x)+g(x)=A+B \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=B. \end{cases}$$

Теорема 2 *(одночасний мінімум).* Якщо функції *f(x)* і *g(x)* задовольняють нерівностям $f(x) \ge A,\;\; g(x) \ge B$, то

$$f(x)+g(x) \ge A+B \;\Leftrightarrow\; f(x)+g(x)=A+B \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=B. \end{cases}$$

Теорема 3 *(одночасні екстремуми різних типів).* Якщо функції *f(x)* і *g(x)* задовольняють нерівностям $f(x) \le C,\;\; g(x) \ge C$, то

$$f(x)=g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x)=C, \\ g(x)=C. \end{cases}$$

Незважаючи на очевидність наведених теорем 1-3, успіх при їх використанні визначається, перш за все, вмінням виділяти сталі *A*. *B* і *C* (які містяться в формулюваннях цих теорем) в конкретних рівняннях та нерівностях.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

$$4^{\cos x} = x^{10}+4.$$

Розв'язання.

Оскільки $\cos x \le 1$, то $4^{\cos x} \le 4$. З іншого боку, $x^{10}+4 \ge 4$. За теоремою 3, маємо:

$$4^{\cos x} = x^{10}+4 \;\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{\cos x}=4, \\ x^{10}+4=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ x=0, \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Відповідь: $x=0$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

$$x + \frac{1}{x} = 2\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Розв'язання.

ОДЗ цього рівняння: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Враховуючи непарність функцій $f(x) = x + \frac{1}{x}$ і $g(x) = 2\sin\frac{\pi x}{2}$ можна зробити висновок, що якщо $x_0 > 0$ є розв'язком цього рівняння, то і $(-x_0)$ також є його розв'язком.

Тому розглянемо лише множину $(0; +\infty)$. За нерівністю Коші будемо мати: $x + \frac{1}{x} \geq 2$, причому рівність тут має місце лише при $x = 1$. З іншого боку, $\left|2\sin\frac{\pi x}{2}\right| \leq 2$. Знову скористаємось теоремою 3:

$$x + \frac{1}{x} = 2\sin\frac{\pi x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2, \\ 2\sin\frac{\pi x}{2} = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon\mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Враховуючи непарність функцій $f(x)$ і $g(x)$, отримуємо, що $x = -2$ також є розв'язком нашої нерівності.

Відповідь: $x_1 = 2,\ x_2 = -2.$

Приклад 4. Розв'язати рівняння:

$$-3x^2 + 6x - 2 = \log_2(x^2 + 1) - \log_2 x.$$

Розв'язання.

Знайдемо спочатку ОДЗ: $x \in (0;\ +\infty)$.

Перетворимо функцію: $f(x) = -3x^2 + 6x - 2 = 1 - 3(x-1)^2$. Очевидно, що $f(x) \leq 1$, причому рівність має місце лише при $x = 1$.

З іншого боку, $g(x) = \log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = \log_2\left(\frac{x^2+1}{x}\right) =$
$= \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq \log_2 2 = 1$, оскільки $x + \frac{1}{x} \geq 2, x > 0$, за нерівністю Коші.

Враховуючи умову рівності в нерівності Коші, отримуємо, що $g(x) = 1$ лише при $x = 1$.

Оскільки $1 \leq g(x) = f(x) \leq 1$, то, за теоремою 3, $g(x) = f(x) = 1$. З останньої рівності отримуємо, що $x = 1$.

Відповідь: $x = 1.$

Приклад 5. Розв'язати рівняння:

$$x^3 - x - \sin\pi x = 0.$$

Розв'язання.

Очевидно, що $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ є розв'язками даного рівняння. Для знаходження інших його розв'язків, враховуючи непарність функції $f(x) = x^3 - x - \sin \pi x$, достатньо знайти його розв'язки в області $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Дійсно, якщо $x_0 > 0$ є розв'язком цього рівняння, то і $(-x_0)$ також є його розв'язком.

Розіб'ємо множину $(0; 1) \cup (1; +\infty)$ на два проміжка: $(0; 1)$ і $(1; +\infty)$.

Перепишемо задане рівняння у вигляді:

$$x^3 - x = \sin \pi x.$$

На проміжку $(0; 1)$ функція $g(x) = x^3 - x$ приймає тільки від'ємні значення, оскільки $x^3 < x$. В той же час, функція $h(x) = \sin \pi x$ приймає на цьому інтервалі лише додатні значення (перша чверть). Тому на $(0; 1)$ виконуєтьсяч нерівність $x^3 - x < \sin \pi x$. Тому рівняння не має розв'язків на $(0; 1)$.

Розглянемо тепер $x \in (1; +\infty)$. Для кожного з таких значень x функція $g(x) = x^3 - x$ додатні значення, а функція $h(x) = \sin \pi x$ приймає значення різних знаків, причому на проміжку $(1, 2]$ функція $h(x) = \sin \pi x$ недодатна. Тому, на проміжку $(1, 2]$ рівняння не має розв'язків.

Якщо ж $x > 2$, то $|\sin \pi x| \leq 1$. $x^3 - x = x(x^2 - 1) > 2 \cdot 3 = 6$, і це означає, що на проміжку $(2; +\infty)$ задане рівняння також не має розв'язків.

Таким чином, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ і лише вони є розв'язками заданого рівняння.

Відповідь: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Інколи знаходження найбільшого і найменшого значень функцій потребує використання похідної.

Приклад 6. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{20-x} \geq 7 - \frac{\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)}{\pi}.$$

Розв'язання.

ОДЗ: $\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ 20 - x \geq 0, \\ -1 \leq -\frac{x}{11} \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 20, \\ -11 \leq x \leq 11, \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 11.$

Дослідимо функції $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{20-x}$ і $g(x) = 7 - \frac{\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)}{\pi}$ на ОДЗ нерівності, тобто при $2 \le x \le 11$.

Функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[2; 11]$, тому вони приймає найбільше і найменше значення або на його кінцях, або в критичних точках всередині цього відрізка.

Знайдемо ЇЇ похідну:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{20-x}}.$$

Похідна не існує в точках $x = 2, x = 20$, які не належать інтервалу $(2; 11)$. Тому ці точки не є критичними.

Розв'яжемо тепер рівняння $f'(x) = 0$. Будемо мати:

$$\frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{20-x}} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{20-x}},$$

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{20-x},$$

$$x - 2 = 20 - x,$$

$$2x = 22,$$

$$x = 11.$$

Отримана точка також не належить інтервалу $(2; 11)$, тому не є критичною.

Таким чином, найбільше й найменше значення функція $f(x)$ приймає на кінцях відрізку $[2; 11]$. Обчислимо ці значення: $f(2) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $f(11) = 6$. Порівнюючи їх, отримуємо, що

$$\min_{[2;11]} f(x) = f(2) = 3\sqrt{2},$$

$$\max_{[2;11]} f(x) = f(11) = 6.$$

Тому, $3\sqrt{2} \le f(x) \le 6$.

Розглянемо тепер функцію $g(x)$. Для $2 \le x \le 11$ будемо мати:

$$-1 \le -\frac{x}{11} \le -\frac{2}{11},$$

$$\arccos\left(-\frac{2}{11}\right) \le \arccos\left(-\frac{x}{11}\right) \le \pi,$$

$$\frac{\arccos\left(-\frac{2}{11}\right)}{\pi} \le \frac{\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)}{\pi} \le 1,$$

$$6 \le 7 - \frac{\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)}{\pi} \le 7 - \frac{\arccos\left(-\frac{2}{11}\right)}{\pi}.$$

Тому, $g(x) \ge 6$, причому рівняння має місце при $x = 11$.

Враховуючи задану нерівність і отримані оцінки, отримаємо:

$$6 \ge f(x) \ge g(x) \ge 6, \qquad x \in [2; 11].$$

З останньої низки нерівностей випливає, що задана нерівність еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{cases} f(x) = 6, \\ g(x) = 6, \end{cases} \Leftrightarrow x = 11.$$

Відповідь: $x = 11$.

Розглянемо тепер деякі приклади рівнянь та нерівностей, розв'язування яких зводиться до розв'язування діофантових рівнянь. ***Діофантовими*** називають рівняння, в яких шукаються цілочисельні розв'язки. Такі рівняння, як правило, містять декілька невідомих, однак, вимога цілочисельності суттєво звужує множину їх розв'язків. Разом з тим, процес знаходження множини розв'язків діофантового рівняння повинен супроводжуватись доведенням того, що отримані всі розв'язки рівняння.

Приклад 7. Розв'язати нерівність:

$$\sin^2\frac{2\pi}{x} + \sqrt{\sin\frac{7x}{x-5}} \le 0.$$

Розв'язання.

Оскільки мають місце нерівності

$$\sin^2\frac{2\pi}{x} \ge 0, \qquad \sqrt{\sin\frac{7x}{x-5}} \ge 0,$$

то, за теоремою 2, отримуємо

$$\sin^2\frac{2\pi}{x}+\sqrt{\sin\frac{7x}{x-5}}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2\dfrac{2\pi}{x}=0,\\ \sin\dfrac{7x}{x-5}=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2\pi}{x}=\pi n, & n\in\mathbb{Z},\\ \dfrac{7x}{x-5}=\pi k, & k\in\mathbb{Z},\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{n}, & n\in\mathbb{Z}, n\neq 0,\\ x=5+\dfrac{7}{k}, k\in\mathbb{Z}, k\neq 0.\end{cases}$$

Отримана система має розв’язки лише за умови, що при деяких цілих n І k виконується рівняння $\frac{2}{n}=5+\frac{7}{k}$, яке є діофантовим рівнянням.

Одним із методів розв’язування діофантових рівнянь є перебір обмеженої кількості можливих наборів цілочисельних значень змінних з обов’язковим доведенням відсутності розв’язків в інщих випадках.

Перепишемо отримане діофантове рівняння у вигляді $\frac{2}{n}-\frac{7}{k}=5.$

Зазначимо тепер, що при цілих значеннях n, які не дорівнюють нулю, виконується нерівність $\left|\frac{2}{n}\right|\le 2.$

Тому, якщо ціле число k таке, що $|k|>2$, то $\left|\frac{2}{n}-\frac{7}{k}\right|<5,$

і рівняння в цьому випадку розв’язків не має.

Тому, рівняння $\frac{2}{n}-\frac{7}{k}=5$ може мати розв’язки лише при $k=\pm1,\pm2.$

Розглянувши всі ці можливі значення невідомої k, встановлюємо,що останнє рівняння має своїм розв’язком єдину пару чисел: $k=-1, n=-1.$

Тому, задана нерівність має єдиний розв’язок $x=\frac{2}{n}=\frac{2}{-1}=-2.$

Відповідь: $x=-2.$

Приклад 8. Розв’язати нерівність:

$$\cos\left(2\pi\sqrt{x}\right)+\cos\left(2\pi\sqrt{x-11}\right)\ge 2.$$

Розв’язання.

Оскільки мають місце нерівності

$$\cos\left(2\pi\sqrt{x}\right)\le 1, \qquad \cos\left(2\pi\sqrt{x-11}\right)\le 1,$$

то, за торемою 2, отримаємо:

$$\cos\left(2\pi\sqrt{x}\right)+\cos\left(2\pi\sqrt{x-11}\right)\ge 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\left(2\pi\sqrt{x}\right)=1,\\ \cos\left(2\pi\sqrt{x-11}\right)=1,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi\sqrt{x} = 2\pi n, \ \ n \in \mathbb{Z}, \qquad n \geq 0, \\ 2\pi\sqrt{x-11} = 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad x = n^2, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad n \geq 0, \\ x = 11 + k^2, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad k \geq 0. \end{cases}$$

Отримана система має розв'язки, якщо при деяких цілих невід'ємних n і k виконується рівність

$$n^2 = 11 + k^2 \ \Leftrightarrow \ n^2 - k^2 = 11 \ \Leftrightarrow \ (n-k)(n+k) = 11.$$

При розв'язуванні багатьох діофантових рівнянь використовуються властивості подільності натуральних чисел. Так, в отриманному рівнянні ми маємо розклад простого числа 11 на добуток двох натуральних множників. Враховуючи, що при невід'ємних цілих значеннях n і k має місце нерівність $n - k \leq n + k,$ отримаємо:

$$\begin{cases} n - k = 1, \\ n + k = 11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6, \\ k = 5. \end{cases}$$

Таким чином, задана нерівність має єдиний розв'язок $x = n^2 = 36.$

Відповідь: $x = 36.$

Приклад 9. Розв'язати рівняння:

$$2\cos\frac{8x}{11} + \sin^2 x = 3.$$

Розв'язання.

Оскільки мають місце нерівності

$$2\cos\frac{8x}{11} \leq 2, \qquad \sin^2 x \leq 1,$$

то, за теоремою 1, отримаємо:

$$2\cos\frac{8x}{11} + \sin^2 x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\dfrac{8x}{11} = 2, \\ \sin^2 x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8x}{11} = 2\pi n, n \epsilon \mathbb{Z}, \\ \sin x = \pm 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11\pi n}{4}, n \epsilon \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \epsilon \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отримана система має розв'язки, якщо при деяких цілих n і k виконується рівність

$$\frac{11\pi n}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \ \Leftrightarrow \frac{11n}{4} = \frac{1}{2} + k.$$

Часто при розв'язуванні діофантових рівнянь отримують представлення однієї невідомої через іншу, а потім встановлюють, при яких умовах отриманий вираз є цілим числом.

В даному прикладі маємо:

$$k = \frac{11n-2}{4} = 2n + \frac{3n-2}{4}.$$

Оскільки k і $n -$ цілі числа, то $3n-2$ повинно ділитися на 4 без остачі.

Щоб знайти всі цілі значення n, при яких $3n-2$ ділиться на 4 без остачі, розділимо множину цілих чисел на 4 класи:

1) числа виду $n = 4m$, де $m\epsilon\mathbb{Z}$, які діляться на 4 без залишку;
2) числа виду $n = 4m+1$, де $m\epsilon\mathbb{Z}$, які при діленні на 4 дають в залишку 1;
3) числа виду $n = 4m+2$, де $m\epsilon\mathbb{Z}$, які при діленні на 4 дають в залишку 2;
4) числа виду $n = 4m+3$, де $m\epsilon\mathbb{Z}$, які при діленні на 4 дають в залишку 3.

Якщо $n = 4m, m\epsilon\mathbb{Z}$, то число $\frac{3n-2}{4} = \frac{3\cdot 4m-2}{4} = 3m - \frac{1}{2}$ не є цілим. Аналогічно встановлюється, що у випадках $n = 4m+1,\ m\epsilon\mathbb{Z}$, і $n = 4m+1,\ m\epsilon\mathbb{Z}$, число $\frac{3n-2}{4}$ також не є цілим. І лише при $n = 4m+2$, $m\epsilon\mathbb{Z}$, отримуємо число $\frac{3n-2}{4} = \frac{3\cdot(4m+2)-2}{4} = 3m+1\ \epsilon\ \mathbb{Z}$.

Таким чином, діофантове рівняння

$$\frac{11n}{4} = \frac{1}{2} + k$$

має нескінченну кількість розв'язків виду $n = 4m+2,\ k = 2n + \frac{3n-2}{4} =$ $= 2(4m+2) + 3m + 1 = 11n + 5,$ де $m\epsilon\mathbb{Z}$. Тоді розв'зками заданого тригонометричного рівняння є

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2} + \pi(11m+5) = \frac{11\pi}{2} + 11\pi m, \text{ де } m\epsilon\mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x = \frac{11\pi}{2} + 11\pi m,\ m\epsilon\mathbb{Z}.$

Завдання для самостійного розв'язування

Розв'язати рівняння:

1. $\cos\left(x^3 + 2x^2 + 1\right) = x^2 + 2x + 3.$
2. $2^{x^2+1} = 1 - x^8.$
3. $\log_5(5+x) + \frac{1}{\log_5(5+x)} = 2\cos^2\frac{x^2+x}{6}.$

4. $\sqrt{\sin\dfrac{1}{x}} = e^{\log_{\pi}^{2}(x^2-2x+2)}$.

Розв'язати нерівності:

5. $x^2 + 4x + 5 \le \cos\pi x$.

6. $\cos^2\dfrac{\pi}{x} + \sqrt{\cos\dfrac{\pi}{x+2}} \le 0$.

7. $3\sin\dfrac{5x}{6} + \cos^2 x \ge 4$.

8. $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Використання монотонності

Розв'язування рівнянь і нерівностей з використанням властивості монотонності базується на наступних твердженнях.

Теорема 4. Нехай $f(x)$ − неперервна і строго монотонна функція на проміжку I, тоді рівняння $f(x) = C,$ де C – деяка константа, може мати не більше одного кореня на проміжку I.

Теорема 5. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ − неперервні на проміжку I функції, $f(x)$ строго зростає, а $g(x)$ строго спадає на цьому проміжку, тоді рівняння $f(x) = g(x)$ може мати не більше одного розв'язку на проміжку I.

Теорема 6. Якщо функція $f(x)$ строго зростає (спадає) на проміжку I, то $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ на I.

Зазначимо, що в якості проміжку I можуть бути як скінченні, так і нескінченні проміжки (замкнені чи незамкнені).

Дослідження на монотонність, а потім використання теорем 4 або 5 може допомогти, коли декілька коренів легко вгадати й треба довести, що всі корені вже знайдені.

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

$$x \cdot 10^{x^5+x+1} = 1000.$$

Розв'язання.

Очевидно, що при $x \leq 0$ рівняння не має розв'язків. Дослідимо при $x > 0$ на монотонність функцію $f(x) = x \cdot 10^{x^5+x+1}$ за допомогою похідної:

$$f'(x) = 10^{x^5+x+1} + x \cdot 10^{x^5+x+1} \cdot (5x^4 + 1) > 0, \qquad x > 0.$$

За допомогою умови монотонності робимо висновок, що функція $f(x)$ строго зростає для $x > 0$. За теоремою 4, рівняння буде мати не більше одного кореня. Підберемо єдиний корінь: $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

$$5^x + 12^x = 13^x.$$

Розв'язання.

Зазначимо, що $x = 2$ є коренем рівняння, а обидві його частини є зростаючими функціями. Однак, цей факт не дозволяє нам зробити висновок про єдиність розв'язку. Дійсно, графіки зростаючих функцій, взагалі кажучи, можуть мати будь-яку кількість спільних точок.

Для доведення єдиності розв'язку даного рівняння розділимо його спочатку на додатну функцію 13^x. Будемо мати:

$$5^x + 12^x = 13^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1.$$

Враховуючи той факт, що функції $y_1 = \left(\frac{5}{13}\right)^x, y_2 = \left(\frac{12}{13}\right)^x$ є неперервними і спадними на всій числовій прямій, то всюди на множині $\mathbb{R}$ неперервна і спадна їх сума $y = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$. Тому, за теоремою 4, отримуємо, що $x = 2$ – єдиний корінь рівняння.

Відповідь: $x = 2$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

$$\left(2+\sqrt{2}\right)^x + \left(2-\sqrt{2}\right)^x = 2^{-x}.$$

Розв'язання.

Перевіримо, що число $x = -1$ є коренем. Дійсно,

$$\left(2+\sqrt{2}\right)^{-1} + \left(2-\sqrt{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} + \frac{2+\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 2,$$

що співпадає із значенням правої частини рівняння при $x = -1$.

Доведемо, що більше коренів немає. Домножимо обидві частини рівняння на 2^x. Отримаємо рівносильне рівняння

$$\left(2(2+\sqrt{2})\right)^x + \left(2(2-\sqrt{2})\right)^x = 1.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \left(2(2+\sqrt{2})\right)^x + \left(2(2-\sqrt{2})\right)^x$.

Очевидно, що $2(2+\sqrt{2}) > 1$. Крім того, $2(2-\sqrt{2}) > 1$, оскільки остання рівність рівносильна нерівностям $4 - 2\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8$. Тому функції $y_1 = \left(2(2+\sqrt{2})\right)^x$ і $y_2 = \left(2(2-\sqrt{2})\right)^x$ зростаючі і неперервні. З цього факту випливає, що функція $f(x)$ неперервна і зростає як сума двох неперервних зростаючих функцій. Таким чином, за теоремою 4, число 1 - єдиний корінь рівняння.

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 4. Розв’язати рівняння:

$$3^x = 11 - x.$$

Розв’язання.

Очевидно, що функція $f(x) = 3^x$ зростає, а функція $g(x) = 11 - x$ спадає на всій числовій прямій. Тому, за теоремою 5, задане рівняння може мати не більше одного кореня. Підбором знаходимо цей корінь: $x = 2$.

Відповідь: $x = 2$.

Приклад 5. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x - 2\sin x = 5y - 2\sin y, \\ x^2 - y = 2. \end{cases}$$

Розв’язання. Розглянемо функцію $f(x) = 5x - 2\sin x$. Оскільки $f'(x) = 5 - 2\cos x > 0$ завжди, то на всій числовій прямій функція $f(x)$ зростає. Враховуючи теорему 6, отримуємо, що перше рівняння системи, яке має вигляд $f(x) = f(y)$, рівносильне рівнянню $x = y$. Таким чином, задана система рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - y = 2. \end{cases}$$

Підставимо $x = y$ в друге рівняння отриманої системи. Будемо мати: $x^2 - x - 2 = 0$. Розв'язуючи це квадратне рівняння, отриуємо $x_1 = 2, x_2 = -1$. Тоді відповідно $y_1 = 2, y_2 = -1$.

Відповідь: $(2; 2), (-1; -1)$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність:

$$3^x + 5^x + 7^x < 3.$$

Розв'язання. Кожна з функцій $y = 3^x, y = 5^x$, $y = 7^x$ неперервна і строго зростає на всій осі. Звідси випливають аналогічні властивості функції $y = 3^x + 5^x + 7^x$. Легко бачити, що при $x = 0$ функція $y = 3^x + 5^x + 7^x$ приймає значення 3.

Тоді при $x > 0$:$y = 3^x + 5^x + 7^x > 3$, а при $x < 0$: $y = 3^x + 5^x + 7^x < 3$. Таким чином, нерівність виконується при $x < 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, 0)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність:

$$\log_3(3 - x) > 5x + 1.$$

Розв'язання. ОДЗ: $x \in (-\infty, 3)$.

Розглянемо функції $f(x) = \log_3(3 - x)$ і $g(x) = 5x + 1$. Зазначимо, що $f(0) = g(0) = 1$.

Дослідимо функції $f(x)$ і $g(x)$ на монотонність:

$$f'(x) = -\frac{1}{3 - x}\ln 3 < 0, \quad g'(x) = 5 > 0, \qquad x < 3.$$

Тому на ОДЗ функція $f(x)$ строго спадає і $f(x) > f(0) = 1, x < 0$, а функція $g(x)$ зростає і $g(x) < g(0) = 1, x < 0$. З цього випливає, що

$$f(x) > f(0) = 1 = g(0) > g(x), \qquad x < 0.$$

Для $x > 0$ будемо мати: $f(x) < f(0) = 1 = g(0) < g(x)$.

Таким чином, нерівність виконується лише для $x < 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, 0)$.

Завдання для самостійного розв'язування

Розв'язати рівняння:

1. $3^x + 4^x = 5^x$.

2. $0{,}25^x = 2{,}5 + x$.

3. $\left(7+\sqrt{7}\right)^x + \left(7-\sqrt{7}\right)^x = 7^{-x}$.

Розв'язати нерівності:

4. $x \cdot 4^x > 4$.

5. $2^x + 5^x > 7$.

6. $\log_2 x > 3 - x$.

Розв'язати систему рівнянь:

7. $\begin{cases} 3x - 3y = \cos x - \cos y \\ \sqrt{x} = -y. \end{cases}$

Узагальнений метод інтервалів

Нехай потрібно розв'язати нерівність $f(x) > 0$ (або нерівність $f(x) < 0$). Нехай ОДЗ цієї нерівності є об'єднанням скінченної кількості проміжків $J_k, k = 1,2,\dots,n$, які пронумеровані зліва направо. При цьому, якщо $n > 1$, то J_1 і J_n можуть бути відповідно нескінченними проміжками $(-\infty, a)$ $\big((-\infty, a]\big)$ і $(b, +\infty)$ $([b, +\infty))$. Проміжки $J_2, \dots, J_{n-1}$ відповідно можуть бути відрізками $[c, d]$, інтервалами (c, d) і напівінтервалами $[c, d), (c, d]$. У випадку, коли $n = 1$, проміжок J може бути будь-яким скінченним або нескінченним проміжком. Припустимо також, що на кожному з проміжків J_k функція $f(x)$ неперервна та має скінченну кількість нулів. Відзначимо на числовій прямій нулі функції $f(x)$ і вилучимо з ОДЗ нерівності ці точки. При цьому деякі проміжки J_k можуть розбитися на декілька проміжків. На кожному з отриманих проміжків функція $f(x)$ неперервна та не перетворюється на нуль. Тому на кожному з них вона зберігає сталий знак, тобто для кожного x з цього проміжку вона приймає лише або додатні, або від'ємні значення. Оберемо в кожному з цих проміжків деяку точку x_0 і обчислимо знак $f(x_0)$, цей знак поставимо над відповідним проміжком. Тоді розв'язком нерівності $f(x) > 0$ буде об'єднання тих проміжків, над якими стоїть знак плюс, а розв'язком нерівності $f(x) < 0$ буде об'єднання тих проміжків, над якими стоїть знак мінус.

Приклад 1. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt{x^2-4}\,(3-x)\,\log_{0,2}(5+x) < 0.$$

Розв'язання. ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ 5 + x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-5, -2] \cup [2, +\infty).$$

Знайдемо нулі функції $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}\,(3 - x)\ \log_{0,2}(5 + x)$:

$$x_1 = -4, \qquad x_2 = -2, \qquad x_3 = 2, \qquad x_4 = 3.$$

Вилучивши їх із ОДЗ, отримаємо проміжки $(-5, -4)$, $(-4, -2)$, $(2, 3)$, і $(3, +\infty)$ (рис.1). Визначимо знаки функції $f(x)$ на кожному з цих проміжків.

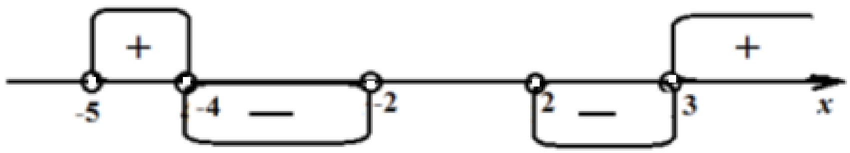

рис.1

Відповідь: $x \in (-4, -2) \cup (2, 3)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність:

$$\frac{(|x - 1| - 7)(27 - 3^{2x-5})\left(x^4 - \sqrt[5]{x}\right)}{\log_6(x^2 + x + 1)} \geq 0.$$

Розв'язання. ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0, \\ \log_6(x^2 + x + 1) \neq 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

Знайдемо нулі функції $f(x) = \frac{(|x-1|-7)(27-3^{2x-5})(x^4-\sqrt[5]{x})}{\log_6(x^2+x+1)}$:

$$x_1 = -6, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 4, \qquad x_4 = 8.$$

Оскільки задана нерівність не є строгою, то всі нулі функції є її розв'язками. Вони розбивають ОДЗ на проміжки знакосталості функції: $(-\infty, -6]$, $[-6, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1]$, $[1, 4]$, $[4, 8]$ і $[8, +\infty)$ (рис.2). Визначимо знаки функції $f(x)$ на кожному з цих проміжків.

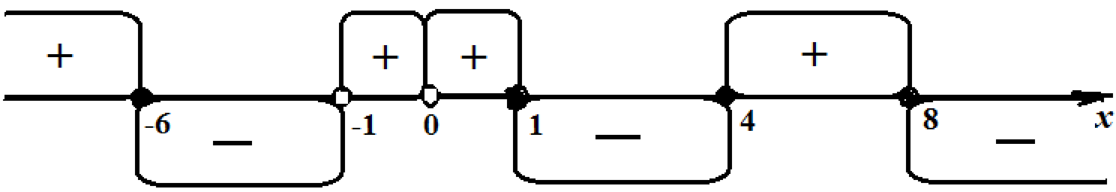

рис.2

Відповідь: $x \in (-\infty, -6] \cup (-1, 0) \cup (0, 1] \cup [4, 8]$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність:

$$(3^{x-6} - 1)\log_2(x + 5)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \geq 0.$$

Розв'язання. ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0, \\ x + 5 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-5, -2] \cup [4, +\infty).$$

Знайдемо нулі функції $f(x) = (3^{x-6} - 1)\log_2(x+5)\sqrt{x^2 - 2x - 8}$:

$$x_1 = -4, \qquad x_2 = -2, \qquad x_3 = 4, \qquad x_4 = 6.$$

Оскільки задана нерівність не є строгою, то всі нулі функції є її розв'язками. Вони розбивають ОДЗ на проміжки знакосталості функції: $(-5, -4]$, $[-4, -2]$, $[4, 6]$ і $[6, +\infty)$ (рис.3). Визначимо знаки функції $f(x)$ на кожному з цих проміжків.

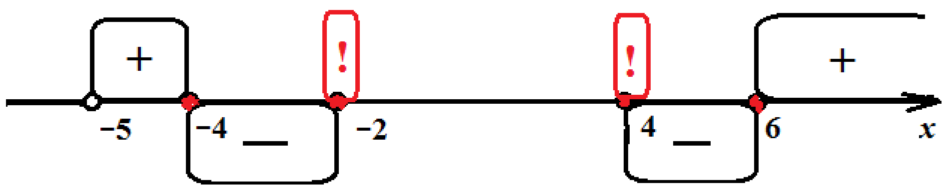

рис.3

Відповідь: $x \in (-5, -4] \cup \{-2; 4\} \cup [6, +\infty)$.

Розглянемо тепер узагальнений метод інтервалів в тригонометрії.

Одразу зазначимо, що при розв'зуванні тригонометричних нерівностей немає сенсу досліджувати знак функції $f(x)$ на всій числовій прямій. Достатньо знайти найменший додатний період функції $f(x)$ і розв'язати нерівність лише на будь-якому проміжку довжини періоду. Потім врахувати періодичність при запису відповіді.

Приклад 3. Розв'язати нерівність:

$$\cos 3x + 2\cos x > 0.$$

Розв'язання. ОДЗ нерівності – вся числова пряма. Знайдемо найменший додатний період функції $f(x) = \cos 3x + 2\cos x$. Найменший додатний період функції $\cos x$: $\mathrm{T}_1 = 2\pi$, а функції $\cos 3x -$ $\mathrm{T}_2 = \frac{2\pi}{3}$. Тому період функції $f(x)$ дорівнює $\mathrm{T} = 2\pi$.

Знайдемо нулі функції $f(x)$.

Для цього розкладемо її на множники:

$$f(x) = \cos 3x + 2\cos x = (\cos 3x + \cos x) + \cos x =$$

$$= 2\cos 2x \cos x + \cos x = \cos x\,(2\cos 2x + 1) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 2\cos 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Дослідимо знак функції $f(x)$ на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$, довжина якого дорівнює Т. Нанесемо на числову вісь нулі функції, які належать цьому інтервалу. Оскільки нерівність строга, то нулі вилучимо з ОДЗ (рис.4). Таким чином, інтервал $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ розіб'ється на інтервали знакосталості функції: $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ і $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$ (рис.4). Визначимо знаки функції $f(x)$ на кожному з цих проміжків.

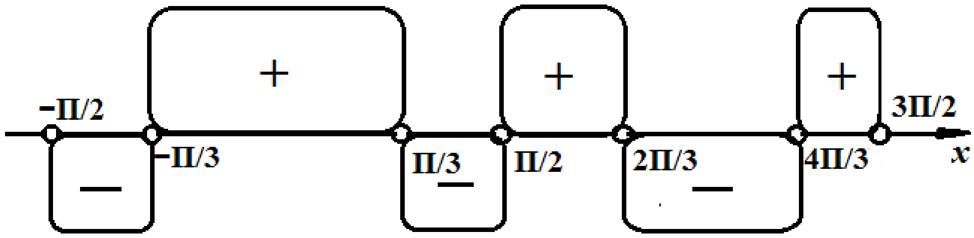

рис.4

На інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ розв'язком даної нерівності є множина $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Запишемо відповідь, враховуючи періодичність функції.

Відповідь:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right),$$

$n \in \mathbb{Z}$.

Завдання для самостійного розв'язування

Розв'язати нерівності:

1. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x > 0$.
2. $(2^{x+1} - 4)\log_{0,5}(x - 3)\sqrt{x + 9} \geq 0$.
3. $\dfrac{(4 - |3x + 1|)(0{,}25 - 4^{x+2})(\sqrt{x} - x^2)}{\log_7(x^2 + 3x + 1)} \geq 0$.

Список рекомендованої літератури

1. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. Изд-во МГУ, 1991. 144 с.
2. Задачи по математике. Уравнения и неравенства // В.В.Вавилов, И.И.Мельников, С.Н.Олехник, Пасиченко П.И. М., Наука, 1987. 240 с.

Зміст