Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу і теорії функцій

А.М. Пасько

ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ «АНАЛІЗ НА БАГАТОВИДАХ»

Дніпро
2020

Посібник присвячено введенню і детальному розбору одного з центральних понять сучасної науки – поняттю гладкого багатовиду. Також уміщено поняття підбагатовиду та тісно пов'язане з ним поняття гладкого багатовиду з краєм, необхідне для багатовимірного узагальнення формули Стокса. Посібник містить значну кількість прикладів та ілюстрацій, необхідних для кращого розуміння введених у тексті понять. Призначено для студентів другого освітнього рівня (магістр) спеціальності 111 «Математика».

Рекомендовано до друку Вченою радою
механіко-математичного факультету (протокол № 7 від 28 січня 2020 р.)

Рецензенти:

С. Б. Вакарчук, д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри інформаційних технологій університету імені Альфреда Нобеля;

І. Г. Баланенко, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Посібник до вивчення курсу «Аналіз на багатовидах»

Автор: канд. фіз.-мат. наук, доц. А. М. Пасько,

Вступ

Одне з найважливіших у сучасній математиці, поняття багатовиду викристалізовувалося в роботах першорядних математиків дев'ятнадцятого століття. Перші узагальнення ідеї поверхні для вищих вимірностей з'явились у працях видатного німецького вченого Бернгардта Рімана. Йому ж належить сам термін «багатовид» (нім. – *Mannigfaltigkeit*). У топологічних дослідженнях французького математичного генія Жуля Анрі Пуанкаре знаходимо визначення диференційовного багатовиду, близьке до сучасного. Свого остаточного, теперішнього вигляду топологічного простору, побудованого з кусків n-вимірних евклідових просторів, «зшитих» із допомогою відображень спеціального класу, означенню багатовиду надали в 1930-х роках американський математик Веблен та його учень, знаменитий геометр Вайтхед.

Поняття багатовиду виявилось надзвичайно корисним у багатьох галузях науки. Образно кажучи, диференційовні багатовиди є та арена, на якій розгортаються захопливі вистави ріманової геометрії. Диференційовні багатовиди з краєм стали природним апаратом багатовимірних узагальнень формули Остроградського – Гауса та формули Стокса. Ідеї багатовидів та пов'язаних із ними конструкцій почали проникати в такі, далекі на перший погляд від топології царини, як теоретична механіка, гідродинаміка, квантова теорія поля.

Якщо в першій половині минулого століття диференційовні багатовиди переважно були виконували роль допоміжного апарату досліджень алгебраїчної топології, геометрії, аналізу, починаючи з 1950-х років, після відкриття Дж. Мілнором різних гладких структур на семивимірній сфері, вивчення диференційовних багатовидів стало предметом нової, багатої надзвичайно цікавими результатами дисципліни – диференціальної топології.

Традиційно підручники з теорії багатовидів починають викладом необхідних відомостей із загальної топології. Ми дотримуємось згаданої традиції, присвятивши елементам загальної топології перший параграф посібника. Оскільки, як уже було сказано, гладкий багатовид можна мислити як простір, утворений кусками евклідових просторів, «зшитими» з допомогою гладких відображень, другий параграф присвячено нагадуванню необхідної інформації про гладкі відображення багатовимірних евклідових просторів. У третьому параграфі введено та ретельно розібрано центральне для запропонованого посібника поняття гладкого багатовиду. Четвертий присвячено поняттю підбагатовиду та тісно пов'язаному з ним, необхідному для багатовимірного узагальнення формули Стокса поняттю батовиду з краєм. В кінці посібника включено низку задач, які сприятимуть кращому засвоєнню теоретичного матеріалу.

§1. Топологічні простори

Нехай E – непорожня множина. Множина τ підмножин множини E називається **топологією**, якщо вона задовольняє три вимоги (аксіоми топології):

1) порожня множина $\varnothing$ та вся множина E належать τ;

2) об'єднання будь-якої сукупності множин із τ також належить τ;

3) перетин будь-якої скінченної сукупності множин із τ належить τ.

Множину E при цьому називають **топологічним простором** із топологією τ, а множини, що належать τ, називають **відкритими** множинами цієї топології.

Один із найпростіших способів задати топологію – метрика. Нехай кожній парі точок $x, y \in E$ поставлено у відповідність невід'ємне дійсне число $\rho(x, y)$, так що виконуються три вимоги (аксіоми метрики):

1) $\rho(x, y) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$;

2) для будь-яких $x, y \in E$ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) для будь-яких $x, y, z \in E$ справджується нерівність трикутника

$$\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

У такому разі E називають **метричним простором** із заданою на ньому **метрикою** ρ, а число $\rho(x, y)$ – **відстанню** між точками x, y простору E.

Приклад 1. Нехай n – натуральне число. Метричний простір R^n визначають як множину всіх упорядкованих наборів n дійсних чисел, відстань між двома точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ якої задано формулою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Нехай E – метричний простір. Для будь-якої точки $x \in E$ і будь-якого числа $\varepsilon > 0$ **відкритою кулею** радіуса ε із центром у точці x називають множину

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in E : \rho(y, x) < \varepsilon\}.$$

Всі можливі об'єднання відкритих куль утворюють топологію метричного простору E.

Нехай E – топологічний простір із топологією τ, Y – непорожня підмножина E. Перетини з множиною Y відкритих множин простору E утворюють на Y топологію τ_Y, яка називається **породженою** або **індукованою** τ. Індукована топологія τ_Y перетворює Y на топологічний простір, який називають **підпростором** простору E.

Приклад 2. **Сферою** вимірності n (n – натуральне число) називають підпростір $S^n = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ топологічного простору R^{n+1}. Одновимірну сферу S^1 називають **колом**.

Нехай E – топологічний простір. **Околом** точки $x \in E$ називають будь-яку відкриту множину простору E, що містить у собі точку x. Нехай A – підмножина топологічного простору E. Точку $a \in A$ називають **внутрішньою точкою** множини A, якщо точка a має окіл, який повністю міститься в множині A, множину внутрішніх точок множини A називають її **внутрішністю** та позначають $\operatorname{Int} A$. Очевидно, що $A \subset \operatorname{Int} A$, і для відкритості множини A необхідна й достатня рівність $A = \operatorname{Int} A$.

Замкненими множинами топологічного простору E називають доповнення до E всіх відкритих множин E. Точку $x \in E$ називають **точкою дотику** множини $A \subset E$, якщо будь-який окіл точки x містить щонайменше одну точку із A. Якщо будь-який окіл точки x містить бодай одну точку множини A, відмінну від самої точки x, точку x називають **граничною точкою** множини A. Множину $\overline{A}$ всіх точок дотику множини A та множину A' усіх її граничних точок називають відповідно **замиканням** та **похідною множиною** множини A. Очевидно, що множини $\overline{A}$ та A' завжди замкнені та пов'язані з A співвідношенням $\overline{A} = A \bigcup A'$. Замкненість множини A еквівалентна рівності $\overline{A} = A$.

Множина A топологічного простору E називається **скрізь щільною**, якщо будь-яка непорожня відкрита множина простору E містить щонайменше одну точку множини E, інакше кажучи $\overline{A} = E$. Якщо будь-яка непорожня відкрита множина простору E містить у собі непорожню відкриту підмножину, неперетинну з множиною A, множина A називається **ніде не щільною**. Множина A ніде не щільна тоді й лише тоді, коли $\operatorname{Int}(E \setminus A)$ – скрізь щільна в просторі E. Простір E називають **сепарабельним**, якщо він містить у собі зліченну скрізь щільну підмножину.

Нехай E, Y – топологічні простори. Відображення $f : E \to Y$ називають **неперервним** у точці $p \in E$, якщо для будь-якого околу V точки $f(p)$ у просторі Y існує окіл U точки p у просторі E, такий що $f(U) \subset V$. Відображення $f : E \to Y$ називають **неперервним**, якщо воно неперервне у всіх точках простору E. З курсу топології відома така теорема.

Теорема 1. Нехай E, Y – топологічні простори, $f : E \to Y$ – відображення. Наступні твердження еквівалентні.

а) Відображення f – неперервне.

б) Для будь-якої відкритої множини V простору Y її прообраз $f^{-1}(V)$ – відкрита множина простору E.

в) Для будь-якої замкненої множини C простору Y її прообраз $f^{-1}(C)$ – замкнена множина простору E.

Серед усіх неперервних відображень особливе місце посідають неперервні відображення особливого типу – гомеоморфізми. Бієктивне неперервне відображення $f : E \to Y$ називають **гомеоморфізмом**, якщо обернене до нього відображення $f^{-1} : Y \to E$ – також неперервне. Якщо $f : E \to Y$ – гомеоморфізм, то топологічні простори E, Y називають **гомеоморфними**. В топології ототожнюють гомеоморфні топологічні простори, вважаючи гомеоморфний простору E топологічний простір Y іншою реалізацією простору E.

Нехай E – топологічний простір із топологією τ. Система β непорожніх відкритих множин топології τ називається **базою** топології τ, якщо будь-яку непорожню відкриту множину топології τ можна подати як об'єднання множин системи β. Якщо E – метричний простір, відкриті кулі утворюють базу топології E. У курсі загальної топології доводять теорему.

Теорема 2. Нехай E – множина, на якій задано систему її непорожніх підмножин β. Для того, щоб система β була базою деякої топології τ, необхідне й достатнє одночасне виконання умов:

а) для будь-якої точки $x \in E$ існує множина $U \in \beta$, така що $x \in U$;

б) для будь-яких множин $U,V \in \beta$ з непорожнім перетином $U \bigcap V \neq \varnothing$ та будь-якої точки $x \in U \bigcap V$ існує множина $W \in \beta$, така що $x \in W \subset U \bigcap V$.

Розглянемо теоретико-множинний декартів добуток $X \times Y$, де X – топологічний простір із топологією τ, Y – топологічний простір із топологією υ. Декартові добутки $U \times V$, де U – непорожня відкрита множина топології τ, V – непорожня відкрита множина топології υ, задовольняють обидві умови теореми 2, отже утворюють базу деякої топології ω. Наділена топологією ω, множина $X \times Y$ перетворюється на топологічний простір, який називають **декартовим добутком топологічних просторів** X та Y.

Приклад 3. **Тором** називають декартів добуток двох кіл $T = S^1 \times S^1$.

Тор – ідеалізований математичний образ таких реальних об'єктів, як поверхня рятівного круга, поверхня бублика (рис. 1).

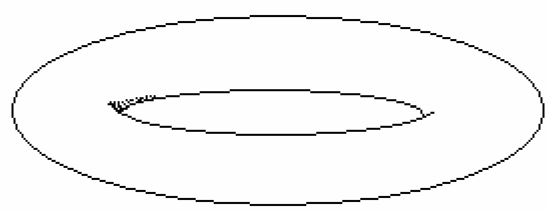

Рис. 1. Тор.

Топологічний простір E називають **гаусдорфовим**, якщо будь-які дві різні точки $x,y \in E$ мають неперетинні околи, тобто відкриті множини U,V, такі що $x \in U,\ y \in V,\ U \bigcap V = \varnothing$. Будь-який метричний простір є гаусдорфів. Прикладом не гаусдорфового простору може слугувати простір із тривіальною топологією – непорожня множина E, наділена топологією, що складається з двох відкритих множин $\tau = \{E, \varnothing\}$. Менш тривіальний не гаусдорфів простір одержимо, розглянувши такий приклад.

Приклад 4. Розглянемо двоелементну множину $E=\{a,b\}$, на якій уведено топологію $\tau=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$. Очевидно, цей простір задовольняє всі аксіоми топології, але єдиний окіл $\{a,b\}$ точки b містить у собі точку a.

Нехай E – топологічний простір, сукупність підмножин $\{U_\alpha\}$ (α пробігає деяку множину індексів) простору E називають **покриттям** простору E, якщо об'єднання $\bigcup_\alpha U_\alpha=E$, при цьому кажуть, що множини U_α **покривають** простір E. Якщо при цьому всі множини U_α – відкриті, покриття $\{U_\alpha\}$ називають **відкритим покриттям**. Топологічний простір E називають **компактним** або **компактом**, якщо у будь-якому його відкритому покритті $\{U_\alpha\}$ можна виділити скінчене підпокриття, тобто скінчену сукупність множин $\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},...,U_{\alpha_m}\}$, які теж покривають простір E. Підмножину $A\subset E$ називають **компактною**, якщо вона компактна як підпростір E. Відомо, що в просторі R^n компактність множини еквівалентна її обмеженості та замкненості, зокрема компактні всі сфери S^n. Декартів добуток двох компактних просторів – компактний простір, з чого випливає компактність тора.

Нехай a,b – точки топологічного простору E. **Шляхом** у просторі E з **початком** у точці a та **кінцем** у точці b називають неперервне відображення $f:[0,1]\to E$, таке що $f(0)=a, f(1)=b$. Простір E називають **лінійно зв'язним**, якщо для будь-яких його точок a,b в просторі E існує шлях, для якого точка a – початок, точка b – кінець.

Приклад 5. Смуга $E=\{(x,y)\in R^2:|x|\le 1\}$ – лінійно зв'язний підпростір площини R^2, бо будь-які дві точки смуги E можна поєднати шляхом, що повністю лежить у цій смузі. В той же час підпростір $Y=\{(x,y)\in R^2:|x|>1\}$ площини не є лінійно зв'язний, бо для того щоб з'єднати точки $(2,0),(-2,0)$, будь-який шлях мусить перетнути смугу E.

§2. Гладкі відображення

Нехай на відкритій множині U простору R^n задано відображення $f:U\to R^m$. Кожну точку $x\in U$ відображення переводить у вектор m-вимірного простору R^m

$$f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),...,f_m(x)\right),$$

відображення $f_i(x)$ – визначені на U функції, що набувають дійсних значень. Відображення f називають **гладким**, якщо всі функції $f_i(x)$ мають на U неперервні частинні похідні всіх порядків.

Приклад 1. Розглянемо визначене формулами $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ відображення в R^2 відкритої підмножини U з R^2, заданої нерівностями $\rho > 0, -\pi < \varphi < \pi$. Це відображення – гладке.

Зауваження 1. Часто використовують термін гладкості класу C^k (k – натуральне). Відображення f називають гладким класу C^k, якщо всі функції $f_i(x)$ мають на U неперервні частинні похідні всіх порядків до k-го включно. Якщо всі функції $f_i(x)$ мають неперервні частинні похідні всіх порядків, відображення називають гладким класу C^∞. Для простоти ми обмежуємось гладкими функціями класу C^∞, назвавши їх просто гладкими.

Часто виникає потреба розглядати гладкі відображення не обов'язково відкритих множин. Нехай задано відображення $f : A \to R^m$ довільної множини $A \subset R^n$. Відображення f називають **гладким**, якщо його можна продовжити до гладкого відображення деякої відкритої множини U, такої що $A \subset U$.

Зокрема, відображення з прикладу 1 буде гладким, якщо його розглядати як відображення замкненої множини $\rho \ge 0, -\pi \le \varphi \le \pi$.

Розглянемо гладке відображення $f : U \to R^m$ відкритої множини $U \subset R^n$. В кожній точці $x \in U$ можна побудувати матрицю частинних похідних

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

(всі частинні похідні обчислено в точці x). Матрицю $J_f(x)$ називають **матрицею Якобі** функції f у точці x, визначник матриці Якобі $\det(J_f(x))$ – **якобіаном** функції f у цій точці.

Для дійснозначної функції $f(x)$ однієї дійсної змінної матриця Якобі складається з одного елемента – похідної $J_f(x) = (f'(x))$, а якобіан – дорівнює цій похідній $\det(J_f(x)) = f'(x)$.

Приклад 2. Матриця Якобі відображення з прикладу 1 дорівнює

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix},$$

його якобіан дорівнює ρ.

Нехай $U,V \subset R^n$ – відкриті множини. Бієктивне відображення $f: U \to V$ називають **дифеоморфізмом**, якщо воно гладке й обернене відображення $f^{-1}: V \to U$ – теж гладке. З теореми про обернену функцію виплаває така теорема.

Теорема 1. Розглянемо гладке відображення $f: U \to V$ двох відкритих множин $U,V \subset R^n$. Відображення f є дифеоморфізм тоді й тільки тоді, коли виконано дві умови:

1) відображення f – бієкція;

2) у всіх точках $x \in U$ якобіан $\det\left(J_f(x)\right) \neq 0$.

Приклад 3. Гладка функція з прикладу 1 бієктивно відображує відкриту множину U площини, задану нерівностями $\rho > 0, -\pi < \varphi < \pi$ на $V = R^2 \setminus \left((-\infty;0] \times \{0\}\right)$ (тобто на площину з вирізаним початком координат та від'ємною частиною дійсної вісі). З прикладу 2 випливає, що якобіан ρ цього відображення відмінний від нуля у всіх точках U. Отже, розглядуване відображення (функція переходу від полярних до прямокутних координат) – дифеоморфізм U на V.

Наступні два приклади показують, що жодна з двох умов теореми 1 окремо не може слугувати еквівалентом дифеоморфності відображення f.

Приклад 4. Розглянемо відкриті множини $U = \{(\rho, \varphi) : \rho > 0\}$, $V = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ на площині та відображення f, задане формулами прикладу 1. Хоча в жодній точці множини U якобіан відображення не дорівнює нулю, відображення не є бієктивним (точки множини U з полярними кутами, що відрізняються на величину кратну 2π, переходять в одну й ту саму точку множини V). Отже f – не дифеоморфізм.

Приклад 5. Розглянемо відображення $g: R \to R$, задане формулою $g(x) = x^3$. Це відображення – гладке й бієктивне, але воно не є дифеоморфізм, бо його якобіан $g'(x) = 3x^2$ обертається на нуль при $x = 0$. В тому, що відображення g – не дифеоморфізм, можна переконатися й безпосередньо, зауваживши, що обернена до нього функція $g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ не диференційовна в точці $y = 0$.

Зауваження 2. Нехай $U,V \subset R^n$ – відкриті множини, $f: U \to V$ – гладке, не бієктивне відображення, таке що в кожній точці $x \in U$ якобіан $\det\left(J_f(x)\right) \neq 0$. З теореми про обернену функцію випливає, що f – локальний дифеоморфізм, тобто кожна точка $x \in U$ має окіл U_x, такий що звуження f на U_x – дифеоморфізм U_x на деяку відкриту підмножину множини V. Зокрема у множині U прикладу 4 кожну точку можна помістити у відкриту смугу ширини 2π, яка дифеоморфно відображується функцією f на свій образ.

§3. Гладкі багатовиди

Нехай n – натуральне число. **Гладким багатовидом** називають гаусдорфів топологічний простір E, такий що:

1) простір E подано як об’єднання $E = \bigcup_i U_i$ скінченого або зліченого набору відкритих множин $U_1, U_2, U_3, \ldots$;

2) для кожної відкритої множини U_i задано гомеоморфізм $\varphi_i : U_i \to V_i$, де V_i – відкрита, лінійно зв’язна множина простору R^n;

3) для будь-яких двох множин U_i, U_j із непорожнім перетином $U_i \bigcap U_j \neq \varnothing$, гомеоморфізм $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \bigcap U_j) \to \varphi_j(U_i \bigcap U_j)$ – гладке відображення (оскільки множини U_i, U_j можна поміняти місцями, це означає, що φ_{ji} – дифеоморфізм).

Число n називають **вимірністю** багатовиду E, позначають $n = \dim E$. Кожну множину U_i разом із гомеоморфізмом φ_i називають **картою**, сукупність усіх карт $\{(U_i, \varphi_i)\}$ називають **атласом** багатовиду E.

Оскільки кожну множину U_i з допомогою гомеоморфізму φ_i ототожнено з відкритою множиною простору R^n, гладкий багатовид E можна мислити як простір, «зшитий» із кусків евклідового простору R^n. Дифеоморфізми $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ при цьому грають роль відображень, що «зшивають» в одне ціле два сусідні «клапті» – U_i, U_j.

З другого боку R^n – координатні простори, отже координати $(x_1, \ldots, x_n)$ у R^n образа $\varphi_i(u)$ точки $u \in U_i$ можна тлумачити як «локальні» координати самої точки u. Відображення φ_{ji} (рис. 1) при цьому є функції переходу від одних «локальних» координат до других, а третя вимога означення багатовиду означає, що функції переходу – дифеоморфізми.

Два атласи $\{(U_i, \varphi_i)\}, \{(U'_k, \varphi'_k)\}$ на одному й тому самому топологічному просторі E називають **сумісними**, якщо їх об’єднання $\{(U_i, \varphi_i)\} \cup \{(U'_k, \varphi'_k)\}$ – теж атлас. Сукупність атласів, сумісних із атласом $\{(U_i, \varphi_i)\}$ багатовиду E, називають **гладкою структурою** цього багатовиду.

Приклад 1. Введемо на n-вимірній сфері

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in R^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\},$$

структуру гладкого n-вимірного багатовиду, ввівши для кожного $k = 1, 2, \ldots, n+1$ множини

$$U_{k,+} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : x_k > 0\},$$
$$U_{k,-} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : x_k < 0\},$$

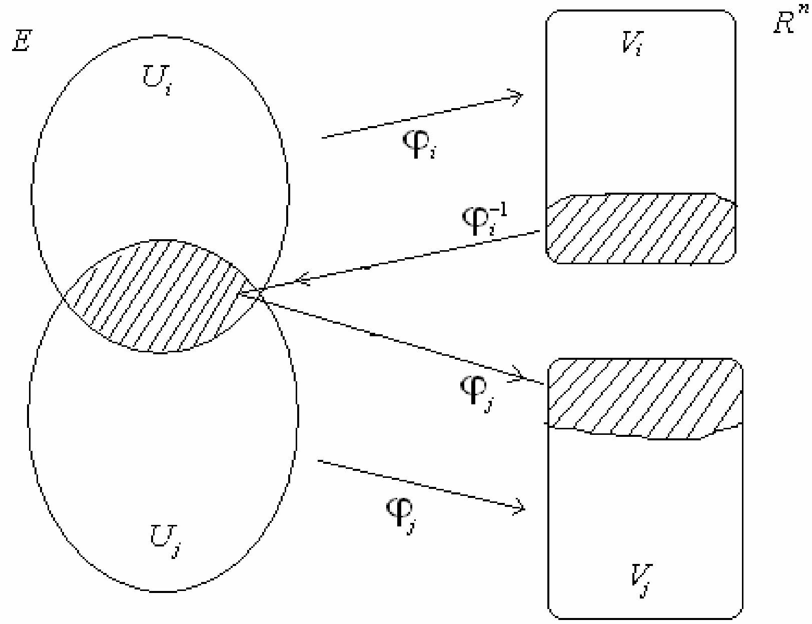

Рис. 1. Відображення переходу $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ між локальними координатами.

та побудувавши гомеоморфізми $\varphi_{k,+} : U_{k,+} \to D$, $\varphi_{k,-} : U_{k,-} \to D$ цих множин на відкриту одиничну кулю $D = \{(x_1,...,x_n) \in R^n : x_1^2 + ... + x_n^2 < 1\}$ простору R^n, задані формулами

$$\varphi_{k,\pm}(x_1,...,x_{n+1}) = (x_1,...,x_{k-1}, x_{k+1},...,x_{n+1}), (x_1,...,x_{n+1}) \in U_{k,\pm}.$$

Якщо $U_{k,+}$, $U_{k,-}$ мислити як відповідно верхню та нижню півсферу, то $\varphi_{k,\pm}$ – її проекція на площину екватора (рис. 2).

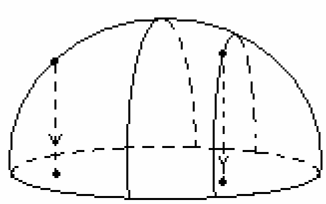

Рис. 2. Проекція верхньої півсфери на площину екватора.

Покажемо, що побудована нами система $\{(U_{k,\pm}, \varphi_{k,\pm})\}$ відкритих множин та дифеоморфізмів справді є атлас, тобто задовольняє умову 3 означення багатовиду. Для простоти, перевіримо умову 3 для відображень $\varphi_{1,+}$, $\varphi_{2,-}$. Відображення $\varphi_{1,+}$ визначене на множині $U_{1,+} = \{(x_1, x_2,...,x_{n+1}) \in S^n : x_1 > 0\}$ та має вигляд

$$\varphi_{1,+}(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = (x_2, x_3 ..., x_{n+1}) \in D,$$

визначене на множині $U_{2,-} = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_2 < 0\}$ відображення $\varphi_{2,-}$ має вигляд

$$\varphi_{2,+}(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = (x_1, x_3 ..., x_{n+1}) \in D.$$

Перетин $U_{1,+} \cap U_{2,-} = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_1 > 0, x_2 < 0\} \neq \varnothing$ відображується на півкулю вимірності *n*

$$\varphi_{1,+}(U_{1,+} \cap U_{2,-}) = \{(x_2, ..., x_{n+1}) \in R^n : x_2 < 0, x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 < 1\},$$

на якій визначене обернене відображення

$$\varphi_{1,+}^{-1}(x_2, ..., x_{n+1}) = \left(\sqrt{1 - x_2^2 - ... - x_{n+1}^2}, x_2, ..., x_{n+1}\right), x_2 < 0, x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 < 1.$$

Тоді функція переходу від одних «локальних» координат до других має вигляд

$$\varphi_{2,-} \circ \varphi_{1,+}^{-1}(x_2, ..., x_{n+1}) = \left(\sqrt{1 - x_2^2 - ... - x_{n+1}^2}, x_3, ..., x_{n+1}\right), x_2 < 0, x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 < 1.$$

На області визначення це відображення має неперервні частинні похідні всіх порядків, отже сукупність карт $\{(U_{k,\pm}, \varphi_{k,\pm})\}$ дійсно утворює атлас.

Нехай M, M' – гладкі багатовиди з атласами відповідно $\{(U_i, \varphi_i)\}, \{(U'_j, \varphi'_j)\}$. На декартових добутках $U_i \times U'_j$ можна визначити відображення, задані правилом

$$(\varphi_i \times \varphi'_j)(x, x') = (\varphi_i(x), \varphi'_j(x')), x \in U_i, x' \in U'_j.$$

Пари відкритих множин та відображень $(U_i \times U'_j, \varphi_i \times \varphi'_j)$ утворюють атлас на декартовім добутку $M \times M'$, гладкий багатовид $M \times M'$, наділений цим атласом, називають **декартовим добутком** багатовидів M, M'.

Приклад 2. Увівши на торі $T = S^1 \times S^1$ гладку структуру декартового добутку двох кіл S^1, перетворюємо тор на гладкий двовимірний багатовид.

Нехай M, N – гладкі багатовиди (взагалі кажучи різної вимірності). Неперервне відображення $f : M \to N$ називають **гладким**, якщо для будь-якої карти (U, φ) багатовиду M і будь-якої карти (W, ψ) багатовиду N із непорожнім перетином $f(U) \cap W \neq \varnothing$ відображення відкритих множин евклідових просторів

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(W)) \to \psi(W) \tag{1}$$

– гладке. Інакше кажучи, функція *f* – гладка, якщо, записавши її аргумент у локальних координатах багатовиду M, а значення – в локальних координатах багатовиду N, одержимо гладке відображення множин евклідових просторів. Якщо при цьому *f* – бієкція, і обернене відображення f^{-1} – теж гладке, то відображення *f* називають **дифеоморфізмом**, а гладкі багатовиди M, N – **дифеоморфними**.

Зауваження 1. Можна довести, що дифеоморфні гладкі багатовиди M, N мають однакові вимірності $\dim M = \dim N$. Взагалі, в теорії гладких багатовидів дифеоморфні багатовиди ототожнюють, вважаючи їх різними екземплярами одного й того самого багатовиду.

Часто корисно розглядати відображення, задані не на всьому багатовиді M, а на якійсь його підмножині. **Гладке** відображення $f : G \to N$ відкритої підмножини $G \subset M$ визначають як відображення із гладкими функціями вигляду (1), при цьому беруть карти (U, φ) багатовиду M з перетином $U \cap G \neq \varnothing$, а карти (W, ψ) багатовиду N із $f(U \cap G) \cap W \neq \varnothing$. Якщо $A \subset M$ – не відкрита підмножина, то неперервне відображення $f : A \to N$ називають **гладким**, якщо його продовжити до гладкого відображення відкритої множини G, $A \subset G \subset M$.

Нехай M – гладкий багатовид вимірності *n*, точка $u \in M$. **Шляхом із початком** у точці u називають гладке відображення $p : [0, \delta) \to M, \delta > 0$, таке що $p(0) = u$. Нехай $p : [0, \delta_p) \to M, q : [0, \delta_q) \to M$ шляхи з початком у точці *u*, карта (U, φ), така що $u \in U$. Візьмемо $\delta, 0 < \delta < \min\{\delta_p, \delta_q\}$, таке що

$$p([0, \delta)) \subset U, q([0, \delta)) \subset U.$$

У такому разі визначено гладкі *n*-вимірні вектор-функції

$$(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \varphi(p(t)), (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) = \varphi(q(t)), 0 \le t < \delta.$$

Шляхи p, q називають **еквівалентними**, якщо рівні вектори

$$(\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \ldots, \dot{x}_n(0)) = (\dot{y}_1(0), \dot{y}_2(0), \ldots, \dot{y}_n(0)), \tag{2}$$

де точками позначено похідні $\dot{x}_k(t) = \dfrac{d}{dt} x_k(t), \dot{y}_k(t) = \dfrac{d}{dt} y_k(t)$ за параметром *t*.

Покажемо, що еквівалентність шляхів із початком у точці *u* не залежить від вибору карти (U, φ), такої що $u \in U$. Припустимо, що (U', φ') – інша карта, для якої $u \in U'$. Нехай для будь-якого $x \in U \cap U'$

$$\varphi(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi'(x) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n).$$

Тоді вимога 3 означення багатовиду гарантує, що для кожної точки $x \in U \cap U'$ координати точки $\varphi'(x)$ виражаються через координати $\varphi(x)$ співвідношеннями

$$\begin{aligned} x'_1 &= x'_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x'_2 &= x'_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots \\ x'_n &= x'_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

які задають дифеоморфізм $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$. Нехай

$$(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \varphi(p(t)), (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) = \varphi(q(t)),$$
$$(x'_1(t), x'_2(t), \ldots, x'_n(t)) = \varphi'(p(t)), (y'_1(t), y'_2(t), \ldots, y'_n(t)) = \varphi'(q(t)).$$

Тоді за правилом диференціювання складеної функції

$$\dot{x}'_k(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \dot{x}_i(0), \dot{y}'_k(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \dot{y}_i(0), k = 1, \ldots, n,$$

(частинні похідні взято в точці $\varphi(u)$). Звідси та з рівностей (2) випливає еквівалентність шляхів p, q в термінах карти (U', φ').

Множину класів еквівалентності шляхів із початком у точці u позначимо через T_uM. Побудуємо ін’єктивне відображення $L: T_uM \to R^n$, визначивши для кожного класу еквівалентності $[p] \in T_uM$ шляху $p(t)$ з початком у точці u

$$L([p]) = (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \ldots, \dot{x}_n(0)), \text{ де } (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \varphi(p(t)),$$

(U, φ) – карта, така що $u \in U$. Покажемо, що відображення L – бієктивне. Нехай

$$\varphi(u) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in V = \varphi(U) \subset R^n.$$

Оскільки множина V – відкрита, існує число $\delta > 0$, таке що відкрита евклідова куля $B(\varphi(u), \delta) \subset V$. Розглянемо довільний вектор $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in R^n$. Прообразом нульового вектора простору R^n буде сталий шлях $p(t) = u, t \in [0, \delta)$, тому можна вважати, що $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2} > 0$. Визначимо шлях $p_h(t)$ рівністю

$$p_h(t) = \varphi^{-1}(u_1 + th_1, u_2 + th_2, \ldots, u_n + th_n), 0 \le t < \frac{\delta}{\|h\|}.$$

Його образ $L([p_h]) = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, тож L – справді бієкція. Взаємно-однозначна відповідність L дозволяє перенести на T_uM структуру лінійного простору R^n. Простір T_uM, наділений цією лінійною структурою, називають **дотичним простором** багатовиду M у точці u. Традиційно, елемент n-вимірного лінійного простору T_uM позначають $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, при цьому координати $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ вектора $[p] \in T_uM$ ототожнюють із координатами його образа $L([p]) \in R^n$ (інакше кажучи, рівність $[p] = (dx_1, \ldots, dx_n)$ означає $(dx_1, \ldots, dx_n) = L([p])$).

Очевидно, інша карта (U', φ'), $u \in U'$, породжує іншу бієкцію $L': T_uM \to R^n$, зв'язок між координатами $(dx'_1, dx'_2, \ldots, dx'_n)$ вектора $[p] \in T_uM$, заданими «штрихованою» картою (U', φ'), та координатами $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, заданими картою (U, φ) випливає з правила диференціювання складеної функції

$$dx'_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} dx_i, \; k = 1, \ldots, n,$$

(частинні похідні взято в точці $\varphi(u)$).

Нехай M, N – гладкі багатовиди, $\dim M = m, \dim N = n$, $f: M \to N$ – гладке відображення, $u \in M$, $w = f(u)$. Тоді для кожного шляху $p(t)$ в багатовиді M із початком у точці u в багатовиді N визначено шлях $q(t) = f(p(t))$ із початком w. Якщо $p_1(t)$, $p_2(t)$ – еквівалентні шляхи із початком у точці u в багатовиді M, то шляхи $q_1(t) = f(p_1(t))$, $q_2(t) = f(p_2(t))$ – теж еквівалентні. Це спостереження дозволяє визначити відображення $df_u: T_uM \to T_wN$, задане правилом

$$df_u([p(t)]) = [f(p(t))].$$

Відображення df_u називають **диференціалом** або **похідною** гладкої функції f у точці u.

Розглянемо карти (U,φ), (W,ψ) гладких багатовидів M,N відповідно, такі що точка $u\in U$, $w\in W$. Користуючись локальними координатами точок $x\in U$, $y\in W$, заданими відповідними картами, запишемо відображення *f*, точніше, відображення (1), побудоване з допомогою відображення f і карт (U,φ), (W,ψ), у вигляді

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1,x_2,\ldots,x_m),\\ y_2 &= y_2(x_1,x_2,\ldots,x_m),\\ &\ldots\\ y_n &= y_n(x_1,x_2,\ldots,x_m). \end{aligned} \tag{3}$$

Тоді, для шляху $p(t)$ з початком у точці *u*, записаного в локальних координатах карти (U,φ) у вигляді $(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))=\varphi(p(t))$, шлях $q(t)=f(p(t))$, записаний у локальних координатах карти (W,ψ), матиме вигляд

$$y_k(t)=y_k(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_m(t)), k=1,\ldots n.$$

Диференціюючи цю рівність за t при $t=0$, одержуємо

$$\dot{y}_k(0)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\dot{x}_i(0), k=1,\ldots,n, \tag{4}$$

де частинні похідні відображення (3) взято в точці $\varphi(u)$. Використаємо позначення $dx=(dx_1,dx_2,\ldots,dx_m)$ для вектора дотичного простору T_uM, вектор дотичного простору T_wN позначимо $dy=(dy_1,dy_2,\ldots,dy_n)$. У такому разі з рівності (4) випливає, що диференціал df_u можна одержати множачи зліва матрицю Якобі відображення (3), взяту в точці $\varphi(u)$, на записаний у вигляді стовпця вектор *dx*

$$dy=(df_u)dx=\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m}\\ . & . & . & .\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1\\ dx_2\\ \vdots\\ dx_m \end{pmatrix}. \tag{5}$$

З цієї формули випливає, зокрема, лінійність оператора $df_u : T_uM \to T_wN$. Ранг лінійного оператора (5), тобто ранг матриці Якобі відображення (3) називають **рангом** гладкого відображення *f* у точці *u*.

Ранг квадратної матриці розміру $n\times n$ дорівнює *n* тоді й тільки тоді, коли вона не вироджена. Тому з теореми 1 попереднього параграфа випливає теорема.

Теорема 1. Нехай M,N – гладкі багатовиди, $\dim M=\dim N=n$. Гладке бієктивне відображення $f:M\to N$ є дифеоморфізм тоді й тільки тоді, коли його ранг дорівнює *n* у всіх точках багатовиду *M*.

Зауваження 2. Диференціал відображення df_u і поняття рангу в точці *u* можна визначити для відображення $f:B\to N$, заданого не на всьому багатовиді M, а на деякій відкритій підмножині $B\subset M$. При цьому кажуть, що гладке відображення $f: B \to N$ має **ранг** q, якщо його ранг дорівнює q в кожній точці області визначення.

§4. Підбагатовиди. Багатовиди з краєм.

Перейдемо, тепер, до визначення поняття підбагатовиду, яке узагальнює такі прості, інтуїтивно зрозумілі поняття як крива на поверхні, поверхня у просторі. Нехай M – гладкий m-вимірний багатовид. **Підбагатовидом** багатовиду M називають його підмножину $N \subset M$ яка задовольняє такі умови.

1) N – гладкий багатовид вимірності $n < m$.

2) Для будь-якої точки $u \in N$ існує карта (U, φ) багатовиду M (одного з атласів гладкої структури цього багатовиду), така що $u \in U$, перетин $U \cap N$ дорівнює

$$U \cap N = \{x \in U : x_{n+1} = x_{n+2} = ... = x_m = 0\},$$

де $x_1, x_2, ..., x_m$ – координати точки $\varphi(x) \in R^m$, а обмеження $\varphi|_{U \cap N}$ на цей перетин утворює разом із ним карту $\left(U \cap N, \varphi|_{U \cap N}\right)$ багатовиду N.

Число $m - n = \operatorname{codim} N$ називають **ковимірністю** підбагатовиду N.

Приклад 1. Розглянемо R^m як багатовид із атласом, що складається з однієї-єдиної карти $U = R^m$, роль координатного відображення грає тотожне відображення $\varphi(x) = x, x \in R^m$. Підпростір R^n, $n < m$, вкладений у R^m як

$$R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m : x_{n+1} = x_{n+2} = ... = x_m = 0\}$$

є n-вимірний підбагатовид багатовиду R^m.

Для досліджень багатовидів буває корисною така теорема.

Теорема 1. Нехай M – гладкий m-вимірний багатовид, N – його підбагатовид ковимірності $q, q = 1,2,...,m-1$. Тоді для будь-якої точки $u \in N$ існують відкрита множина $U \subset M$ і гладка функція $g: U \to R^q$ рангу q, такі що $u \in U$, та перетин

$$N \cap U = g^{-1}(0).$$

Доведення. Позначимо $n = m - q$, і нехай (U, φ) – карта багатовиду M, існування якої забезпечено умовою 2 визначення підбагатовиду. Кожна точка $x \in U$ має локальні координати $\varphi(x) = (x_1, x_2, ..., x_m)$. Визначимо функцію $g: U \to R^q$ рівністю $g(x) = (x_{n+1}, ..., x_m)$, $x \in U$. Побудована функція задовольняє всі умови теореми. Теорему доведено.

Якщо N – компактне, існує теорема, в певному сенсі обернену до теореми 1.

Теорема 2. Нехай M – гладкий m-вимірний багатовид, $N \subset M$ – компактна підмножина. Припустимо, що для будь-якого $u \in N$ існують відкрита множина $U \subset M$, $u \in U$, та гладка функція $g: U \to R^q$, такі що $N \cap U = g^{-1}(0)$ і ранг відображення g в точці u дорівнює q. Тоді N – підбагатовид M ковимірності q.

Доведення. Зазначимо, що умова рівності q рангу відображення $g:U\to R^q$ означає відмінність від нуля деякого функціонального визначника. Отже ранг g дорівнює q в деякому околі точки u. Звузивши, в разі необхідності, множину U, можна вважати, що ранг g дорівнює q на всій множині U. Також без втрати загальності можна вважати, що $U\subset W$, де (W,φ) – карта багатовиду M, така що $u\in W$ (інакше ми просто замість U можемо взяти перетин $U\bigcap W$). Отже, крім функції g, на U задане координатне відображення φ. Оскільки g має ранг q, такий самий ранг має матриця Якобі відображення $g\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to R^q$. Запишемо це відображення у вигляді

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1,x_2,\dots,x_m),\\ y_2 &= y_2(x_1,x_2,\dots,x_m),\\ &\dots\\ y_q &= y_q(x_1,x_2,\dots,x_m). \end{aligned}$$

За означенням рангу його матриця Якобі

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m}\\ . & . & . & .\\ \frac{\partial y_q}{\partial x_1} & \frac{\partial y_q}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_q}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

має q лінійно незалежних стовпців. Перенумеровуючи, в разі необхідності, координати $x_1,x_2,\ldots,x_m$, можемо вважати, що перші q стовпців лінійно незалежні. Тоді визначник

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_q}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_q}\\ . & . & . & .\\ \frac{\partial y_q}{\partial x_1} & \frac{\partial y_q}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_q}{\partial x_q} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

Введемо на U нові координати $\varphi' = (x'_1,x'_2,\dots,x'_m)$

$$x'_1 = y_1, x'_2 = y_2,\dots,x'_q = y_q, x'_{q+1} = x_{q+1},\dots,x'_m = x_m.$$

З рівності (1) випливає, що якобіан переходу від нештрихованих до штрихованих координат

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_q} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{q+1}} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m}\\ . & . & . & . & . & .\\ \frac{\partial y_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_q}{\partial x_q} & \frac{\partial y_q}{\partial x_{q+1}} & \dots & \frac{\partial y_q}{\partial x_m}\\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0\\ . & . & . & . & . & .\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_q}\\ . & . & .\\ \frac{\partial y_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_q}{\partial x_q} \end{vmatrix} \neq 0,$$

отже ми можемо включити (U,φ') до атласу багатовиду *M*. Перетин $U \bigcap N$ у цій карті задається рівняннями $x'_1 = x'_2 = ... = x'_q = 0$. Оскільки *N* – компакт, ми можемо покрити його скінченим числом таких карт (U,φ'), які ми включаємо до атласу багатовиду *M*. Щоби переконатися, що *N* – багатовид, зазначимо, що скінченна сукупність $\left(U\bigcap N, \varphi'|_{U\cap N}\right)$ утворює атлас на *N*. Теорему доведено.

Умову компактності множини *N* можна дещо послабити, взявши замість *M* евклідовий простір R^m.

Теорема 3. Нехай $N \subset R^m$ – замкнена підмножина. Припустимо, що для будь-якого $u \in N$ існують відкрита множина $U \subset R^m$, $u \in U$, та гладка функція $g: U \to R^q$, такі що $N \bigcap U = g^{-1}(0)$ і ранг відображення g в точці u дорівнює q. Тоді *N* – підбагатовид R^m ковимірності q.

Теорему 3 можна довести аналогічно доведенню теореми 2, користуючись замість компактності тим фактом, що в будь-якому відкритому покритті замкненої підмножини R^m можна знайти скінченне або зліченне підпокриття. Кількість нових карт, які ми при цьому додаємо до атласу може бути зліченною.

Зауваження 1. В теоремах 1 − 3 передбачається, що $1 \le q < m$. Утім, ці теореми можна поширити й на випадок $q = m$, якщо підбагатовид ковимірності m розуміти як скінчену або зліченну систему ізольованих точок.

Розглянемо систему рівнянь на R^m

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_m) = 0,\ k = 1,...,q\,, \tag{2}$$

з непорожньою множиною розв'язків, таку що функції f_k – гладкі, та в будь-якій точці, котра задовольняє систему (2), матриця Якобі $\left(\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}\right)_{\substack{k=1,...,q\\ j=1,...,m}}$ має ранг q. Множина *N* розв'язків системи (2) – замкнена. Відображення

$$(x_1,...,x_m) \mapsto \left(f_1(x_1,...,x_m),...,f_q(x_1,...,x_m)\right)$$

має ранг q у всіх точках множини *N*. Отже, за теоремою 3, множина *N* розв'язків системи (2) (в геометрії такі множини називають **поверхнями**) – підбагатовид R^m вимірності $m - q$.

З цього спостереження, випливає, зокрема, що S^n як поверхня простору R^{n+1}, задана рівнянням

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1,$$

є *n*-вимірний підбагатовид простору R^{n+1}.

Поверхні, задані системами вигляду (2), становлять широкий клас підбагатовидів простору R^m. Можна довести, що будь-який гладкий багатовид можна реалізувати як підбагатовид евклідового простору. А саме, виконується така теорема.

Теорема 4. (Г. Вітні) Для будь-якого гладкого *n*-вимірного багатовиду *M* існує дифеоморфізм $f: M \to N$, де *N* – підбагатовид простору R^m, при деякому $m > n$.

Доведення теореми 4 виходить за межі цього посібника.

Перейдемо до визначення ще одного важливо для аналізу поняття. Нехай *E* − гаусдорфів топологічний простір із підпростором *N*. Простір *E* називають **гладким багатовидом із краєм**, а сам підпростір ***N*** – **краєм** багатовиду *E*, якщо виконані такі три аксіоми.

1) Простір E подано як об'єднання $E = \bigcup_i U_i$ скінченого або зліченого набору відкритих множин $U_1, U_2, U_3, \ldots$.

2) Для кожної відкритої множини U_i задано гомеоморфізм $\varphi_i : \mathrm{U}_i \to V_i$, де V_i – відкрита, лінійно зв'язна множина простору $R^n_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_n \geq 0\}$.

3) Для кожної множини U_i гомеоморфізм φ_i відображує перетин $U_i \cap N$ у множину точок V_i з нульовою останньою координатою

$$\varphi_i(U_i \cap N) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in V_i : x_n = 0\},$$

зокрема, якщо $U_i \cap N = \varnothing$, V_i повністю міститься у множині точок простору R^n з додатною останньою координатою $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_n > 0\}$.

4) для будь-яких двох множин U_i, U_j із непорожнім перетином $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, гомеоморфізм $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ – гладке відображення.

Натуральне число *n* називають **вимірністю** багатовиду з краєм *E*. З означення випливає, що край ***N*** – гладкий багатовид вимірності $n-1$. Атлас багатовиду ***N*** утворюють непорожні перетини $U_i \cap N$ на яких задані звуження $\varphi_i|_{U_i \cap N}$.

Приклад 2. Верхня півсфера

$$S^n_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in R^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} \geq 0\}$$

є *n*-вимірний багатовид із дифеоморфним сфері вимірності $n-1$ краєм

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in R^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1, x_{n+1} = 0\}$$

(виділено жирним на рис. 1).

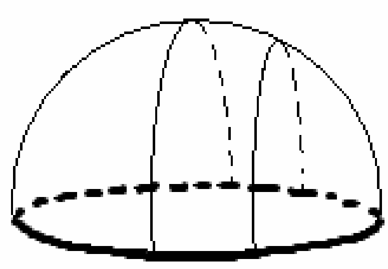

Рис. 1. Верхня півсфера як багатовид із краєм.

Приклад 3. Замкнена куля вимірності *n*

$$D^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \le 1\}$$

є багатовид із краєм

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1\}.$$

Поняття гладкого відображення та дифеоморфізму багатовидів з краєм визначаються аналогічно тому, як це було зроблено для звичайних гладких багатовидів (без краю). Неважко побачити, зокрема, що багатовиди з краєм із прикладів 2 та 3 – дифеоморфні.

Теорема 5. Нехай *M* – компактний гладкий *n*-вимірний багатовид, на якому задано гладку функцію $f : M \to R$, таку що множина точок, у яких $f(x) = 0$, непорожня, і в кожній такій точці ранг функції *f* дорівнює одиниці. Тоді простір

$$M_+ = \{x \in M : f(x) \ge 0\}$$

є гладкий багатовид із краєм $M_0 = \{x \in M : f(x) = 0\}$.

Доведення. З огляду на компактність множини M_0, її можна покрити скінченим числом околів *W*, таких що $W \subset U$ для деякої карти (U, φ), і принаймні одна з частинних похідних функції *f* скрізь у цьому околі відмінна від нуля. Розглянемо один такий окіл, для визначеності будемо вважати, що $\frac{\partial f}{\partial x_n} \ne 0$ скрізь на *W*. Разом із координатами $(x_1, ..., x_n)$ карти (U, φ) розглянемо на *W* нові координати $\psi = (y_1, ..., y_{n-1}, y_n)$, задані формулами $y_1 = x_1, ..., y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = f(x_1, ..., x_n)$. Визначник переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{vmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_n} \ne 0,$$

тож (W, ψ) утворює на *M* нову карту, у якій $W \cap M_0$ задається рівнянням $y_n = 0$. Нехай $(W_1, \psi_1), ..., (W_m, \psi_m)$ – нові, побудовані нами карти, які покривають множину M_0, в яких M_0 задається рівнянням $y_n = 0$, $(U_1, \varphi_1), ..., (U_k, \varphi_k)$ – карти атласу багатовиду *M*, з непорожніми перетинами $U_i \cap M_+ \ne \varnothing$, які покривають компактну множину M_+. Позначимо $L = \{x \in M : f(x) > 0\}$. Тоді пари

$$\left(W_j \cap M_+, \psi_j\big|_{W_j \cap M_+}\right), j = 1, ..., m; \left(U_i \cap L, \varphi_i\big|_{U_i \cap L}\right), i = 1, ..., k$$

утворюють на M_+ структуру гладкого багатовиду з краєм M_0. Доведення теореми завершено.

Застосувавши теорему 5 до різниці $f(x) - a$, де $a \in R$, неважко одержати такий наслідок.

Наслідок. Нехай M – компактний гладкий n-вимірний багатовид, $f : M \to R$ – гладка функція, і число $a \in R$, такі що множина точок, у яких $f(x) = a$, непорожня, і в кожній такій точці ранг функції f дорівнює одиниці. Тоді простір
$$M_+ = \{x \in M : f(x) \geq a\}$$
є гладкий багатовид із краєм $M_0 = \{x \in M : f(x) = a\}$.

Задачі

1. Нехай E, Y – топологічні простори. Відображення $f : E \to Y$ називається відкритим, якщо для будь-якої відкритої множини $U \subset E$ її образ $f(U)$ – відкрита множина топологічного простору Y. Нехай $f : E \to Y$ – неперервна бієкція. Довести, що f – гомеоморфізм тоді й тільки тоді, коли f – відкрите відображення.
2. Нехай E, Y – топологічні простори. Відображення називається $f : E \to Y$ називається замкненим, якщо для будь-якої замкненої множини $U \subset E$ її образ $f(U)$ – замкнена множина топологічного простору Y. Нехай $f : E \to Y$ – неперервна бієкція. Довести, що f – гомеоморфізм тоді й тільки тоді, коли f – замкнене відображення.
3. Розглянемо теоретико-множинний декартів добуток $X \times Y$, де X – топологічний простір із топологією τ, Y – топологічний простір із топологією υ. Довести, що декартові добутки $U \times V$, де U – непорожня відкрита множина топології τ, V – непорожня відкрита множина топології υ, утворюють базу деякої топології на $X \times Y$.
4. На множині R дійсних чисел уведемо топологію $\tau = \{\varnothing\} \cup \{R\} \cup \{(-\infty, a) : a \in R\}$. Перевірити аксіоми топологічного простору. Чи є утворений простір гаусдорфовим?
5. Нехай X, Y – лінійно зв'язні топологічні простори. Довести, що їх декартів добуток $X \times Y$ – лінійно зв'язний топологічний простір.
6. Нехай Y – простір, наділений фактор-топологією при відображенні $f : E \to Y$, де E – компактний простір. Доведіть, що простір Y – компактний.
7. Нехай Y – простір, наділений фактор-топологією при відображенні $f : E \to Y$, де E – лінійно зв'язний простір. Доведіть, що Y – лінійно зв'язний простір.
8. Переконатися, що пари відкритих множин та відображень $\left(U_i \times U'_j, \varphi_i \times \varphi'_j\right)$ утворюють атлас на декартовім добутку багатовидів $M \times M'$.

9. Нехай M – багатовид вимірності n, $p(t)$ – шлях із початком $u \in M$. Довести, що для будь-якої карти (U, φ), такої що $u \in U$ існує $\delta_1 > 0$, таке що $p([0, \delta_1)) \subset U$.
10. Нехай M, N – гладкі багатовиди, $\dim M = m, \dim N = n$, $f : M \to N$ – гладке відображення, $u \in M$, $w = f(u)$. Довести, що якщо $p_1(t)$, $p_2(t)$ – еквівалентні шляхи із початком у точці u в багатовиді M, то шляхи $q_1(t) = f(p_1(t))$, $q_2(t) = f(p_2(t))$ – теж еквівалентні.
11. Нехай *N* – підбагатовид багатовиду *M*. Довести, що *N* – замкнена підмножина *M*. (Указівка: довести, що *N* має відкрите доповнення, для цього розглянути його окремо в кожній карті.)
12. Довести, що в будь-якому відкритому покритті замкненої підмножини R^m можна знайти скінчене або злічене підпокриття.

Список використаної літератури

1. *J J O'Connor* and *E F Robertson* A history of topology / Інтернет
2. *Scholz E.* The Concept of Manifold, 1850 – 1950 / History of Topology. Amsterdam: Elsevier Science, 1999. pp. 25-64.
3. Арнольд В.И. О преподавании математики / Успехи матемтических наук: 1998. т. 53 №1 с. 229 – 234
4. Милнор Дж., Уолесс А. Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир, 1972. – 279 с.
5. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. – М.: МЦНМО, 2004. – 352 с.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 760 с.
7. Пришляк О.О. Топологія многовидів. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2013. – 83 с.

Зміст

Посібник до вивчення курсу
«Аналіз на багатовидах»

Автор:

Пасько Анатолій Миколайович

Підписано до друку 2020 р. Формат 60×84/24. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. Тираж 20 пр. Зам. №

Видавництво і друкарня ПП «Ліра ЛТД»
49107, м. Дніпро, вул. Наукова, 5
Свідоцтво про внесення до Держреєстру
ДК №6042 від 26.02.2018.