

Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

---

Механіко-математичний факультет  
Кафедра математичного аналізу та оптимізації

Ткаченко М. Є., Трактинська В. М.

**ПОСІБНИК З ДИСЦИПЛІНИ  
«МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В  
МІКРО- ТА МАКРОЕКОНОМІЦІ»**

Дніпро  
2024

УДК 519.86(075.8)

Т 48

*Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (протокол № 10 від 25 червня 2024 р.).*

**Рецензенти:**

**С. В. Дзюба** – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, т.в.о. директора Придніпровського наукового центру НАН України і МОН України;

**О. О. Пипка** – доктор фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри геометрії та алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара

В авторській редакції

**Ткаченко М. Є., Трактинська В. М.**

**Посібник з дисципліни  
«Математичні методи в  
мікро- та макроекономіці»**

Подано теоретичний та практичний матеріал з дисципліни «Математичні методи в мікро- та макроекономіці», наведені приклади розв'язування задач та запропоновано задачі для самостійного розв'язування.

Для здобувачів вищої освіти спеціальності 111 Математика механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

© Ткаченко М. Є., Трактинська В. М., 2024

## ЗМІСТ

Вступ . . . . .	4
1. Попит та пропозиція . . . . .	5
Приклади розв'язування задач. . . . .	6
Задачі для самостійного розв'язування. . . . .	8
2. Еластичність. . . . .	9
Приклади розв'язування задач. . . . .	11
Задачі для самостійного розв'язування. . . . .	12
3. Функція корисності. Задача споживчого вибору. . . . .	14
Приклади розв'язування задач. . . . .	16
Задачі для самостійного розв'язування. . . . .	17
4. Виробничі функції та їх характеристики. . . . .	19
Приклади розв'язування задач. . . . .	21
Задачі для самостійного розв'язування. . . . .	23
5. Модель фірми. . . . .	24
Приклади розв'язування задач. . . . .	25
Задачі для самостійного розв'язування. . . . .	27
6. Макроекономіка. . . . .	28
Приклади розв'язування задач. . . . .	35
Задачі для самостійного розв'язування. . . . .	38
Бібліографічний опис . . . . .	48

## ВСТУП

Навчальна дисципліна «Математичні методи в мікро- та макроекономіці» входить до освітньо-професійної програми «Математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 111 Математика як обов'язкова компонента циклу професійної підготовки. Однією із орієнтацій освітньої програми є розробка та вивчення математичних методів розв'язування прикладних задач, якими, зокрема, є мікро- та макроекономічні задачі.

Метою навчальної дисципліни «Математичні методи в мікро- та макроекономіці» є вироблення навичок математичного дослідження мікро та макроекономічних проблем, побудови математичних моделей економічних задач та їх розв'язування. Для вивчення дисципліни необхідні знання, вміння та навички отримані під час попереднього вивчення дисциплін «Математичний аналіз: функції однієї змінної», «Математичний аналіз: функції багатьох змінних», «Алгебра і основи теорії чисел».

Здобувачі вищої освіти мають знати методи побудови математичних моделей мікро- та макроекономічних процесів, вміти застосовувати основні методи розв'язування мікро- та макроекономічних задач, будувати математичну модель задачі, розв'язувати відповідні економічні задачі.

Даний посібник містить теоретичний матеріал із основних тем вказаної дисципліни, приклади розв'язування задач та набір задач для самостійного розв'язування з кожної наведеної теми.

## 1. Попит та пропозиція

**Попит** – об’єм продукції, який споживач бажає і має змогу придбати за певною ціною в деякий момент часу за інших рівних умов.

Крива попиту показує взаємозв’язок між ціною і величиною попиту. Залежність попиту від ціни продукції  $p$  будемо позначати  $D(p)$ . Крива попиту є спадною, оскільки чим вища ціна продукції за інших рівних умов, тим меншу її кількість бажає і має змогу придбати споживач. Отже, крива попиту має вигляд:

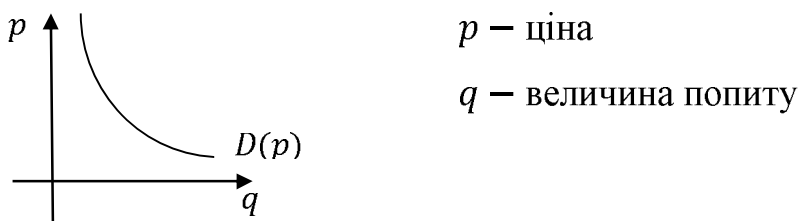


Рис.1

**Пропозиція** – об’єм продукції, яку виробник бажає і може виробляти за певною ціною в деякий момент часу за інших рівних умов.

**Крива пропозиції** вказує на зв'язок між ціною і величиною пропозиції.

Залежність пропозиції від ціни продукції  $p$  будемо позначати  $S(p)$ . Крива пропозиції зростає, оскільки чим вище ціна продукції, тим більше виробники бажають та можуть її виробляти.

Отже, крива пропозиції має вигляд:

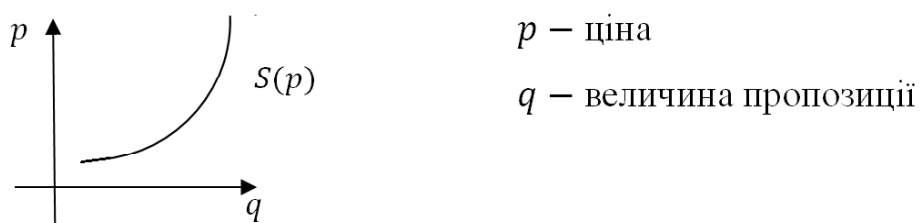


Рис. 2

**Ринкова рівновага** – ситуація, коли наміри споживачів та виробників співпадають, тобто  $S(p_0) = D(p_0)$ .

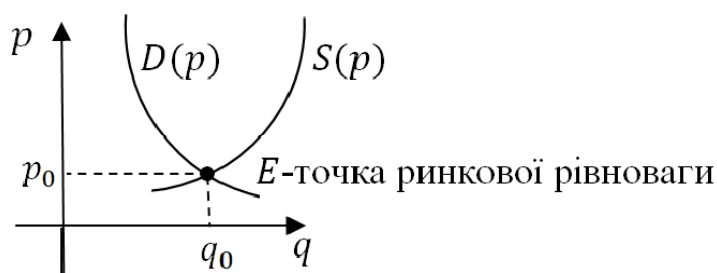


Рис. 3

## Приклади розв'язання задач

### Приклад 1.

У ринковій моделі функції попиту та пропозиції на певний товар визначаються як:

функція попиту:  $p = 300 \cdot 3^{-0,5q}$ ;

функція пропозиції:  $p = 90 + 5q$ .

- 1) Довести, що точка ринкової рівноваги виникає, коли ціна  $p = 100$ .
- 2) Оцінити, як зміниться попит, якщо ціна впаде від  $p = 100$  грош. од. до 98 грош. од. (на 2 грош. од.).
- 3) Знайти надлишок споживачів.
- 4) Знайти надлишок виробників.

### Розв'язання.

- 1) Якщо  $p = 100$ , то підставляючи це значення в обидва рівняння функції попиту та функції пропозиції та розв'язуючи відносно  $q$ , в обох випадках отримуємо  $q = 2$ .
- 2) Знайдемо  $\frac{dp}{dq} = 300 \cdot (-0,5) \cdot 3^{-0,5q} \cdot \ln 3 = -150 \cdot \ln 3 \cdot 3^{-0,5q}$ , звідки

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{1}{150 \cdot \ln 3 \cdot 3^{-0,5q}} = -\frac{3^{0,5q}}{150 \cdot \ln 3}.$$

Коли  $p = 100$  грош. од.,  $q = 2$  ум. од. продукції. Тому

$$\left. \frac{dq}{dp} \right|_{p=100} = -\frac{3^{0,5 \cdot 2}}{150 \cdot \ln 3} = -\frac{3}{150 \cdot \ln 3} = -\frac{1}{50 \cdot \ln 3}.$$

Звідки

$$\Delta q \approx -\frac{1}{50 \cdot \ln 3} \cdot \Delta p = -\frac{1}{50 \cdot \ln 3} \cdot (-2) = \frac{1}{25 \cdot \ln 3} \approx 0,0364.$$

Отже, попит зросте на 0,0364 ум. од.

3) Зобразимо функції попиту та пропозиції:

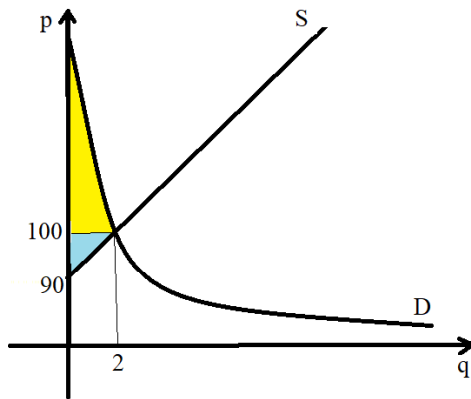


Рис. 4

Надлишок споживачів дорівнює площі фігури, зафарбованої жовтим кольором. Отже,

$$\begin{aligned} \text{Н. с.} &= \int_0^2 (300 \cdot 3^{-0,5q} - 100) dq = \left( 300 \cdot \frac{3^{-0,5q}}{-0,5 \cdot \ln 3} - 100q \right) \Big|_0^2 = \\ &= \frac{400}{\ln 3} - 200 \approx 164 \text{ грош. од.} \end{aligned}$$

4) Надлишок виробників дорівнює площі фігури, зображеної на Рис. 4 та зафарбованої блакитним кольором. Її площу можна також знайти методами інтегрального числення, проте простіше обчислити її, як площу прямокутного трикутника з катетами 2 та 10:

$$\text{Н. в.} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 = 10 \text{ грош. од.}$$

### Задачі для самостійного розв'язування.

1. У таблиці задані об'єми попиту та пропозиції соняшникової олії в залежності від ціни:

Ціна	Об'єм попиту (млн. літрів на рік)	Об'єм пропозиції (млн. літрів на рік)
50	86	50
55	78	60
60	70	70
65	62	80
70	54	90

- 1) За даними таблиці накреслити криву попиту та криву пропозиції.
  - 2) Вказати рівноважну ціну та рівноважний об'єм продукції.
  - 3) Через підвищення загального рівня доходів споживача попит на соняшкову олію зріс на 10 млн. літрів за рік, зважаючи, що пропозиція не змінилася, визначити нові рівноважні ціну та об'єм продукції.
2. Крива попиту задана рівнянням:  $q = 250 - 3p$ , а крива пропозиції  $q = 120 + 2p$ . Держава ввела податок на споживачів величиною 5 доларів за одиницю продукції. Визначити:
- 1) як зміниться рівноважна ціна та об'єм виробництва;
  - 2) який дохід держави від уведення податку;
  - 3) який податковий тягар ляже на плечі виробників та споживачів.
- Порівняти.
3. Крива попиту задана рівнянням:  $q = \frac{3750}{p} + 10$ , а крива пропозиції  $q = 10p - 90$ . Держава ввела податок на виробників величиною 7,5 доларів за одиницю продукції. Визначити:
- 1) як зміниться рівноважна ціна та об'єм виробництва;
  - 2) який дохід держави від уведення податку;



3) який податковий тягар ляже на плечі виробників та споживачів.

Порівняти.

4. У ринковій моделі функції попиту та пропозиції на певний товар визначаються як:

функція попиту:  $p = 5^{-\frac{q}{20}+3}$

функція пропозиції:  $p = \frac{q}{10} + 23$ .

1) Довести, що точка ринкової рівноваги виникає, коли ціна  $p = 25$ .

2) Знайти надлишок споживачів.

3) Знайти надлишок виробників.

5. У ринковій моделі функція пропозиції виробника:  $p = q\sqrt{q+3} + 12$

1) Знайти граничну пропозицію  $\frac{dq}{dp}$  в точці  $(q, p) = (13, 64)$ .

2) Оцінити, як зміниться пропозиція, якщо ціна зросте від  $p = 64$  грн на 0,45 (на 45 копійок).

3) Знайти надлишок виробника при ринковій рівновазі, якщо точка ринкової рівноваги:  $(q, p) = (22, 122)$ .

## 2. Еластичність

Нехай задана залежність одного показника  $y$  від іншого показника  $x$ , як функціональна залежність  $y = f(x)$ , яка визначена на множині  $X$ .

**Еластичність функції**  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ :

$$\varepsilon_x(y) = \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}. \quad (1)$$

Якщо функція  $y = f(x)$  є диференційовною в точках множини  $X$ , то **еластичність функції**  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ :

$$\varepsilon_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = f'(x) \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}. \quad (2)$$

Оскільки  $d \ln x = \frac{dx}{x}$ , то

$$\varepsilon_x(y) = \frac{d \ln y}{d \ln x}.$$

### Властивості еластичності:

1. Еластичність немає вимірності, тобто не залежить від одиниці виміру  $x$  і  $y$ :  $\varepsilon_{ax}(by) = \varepsilon_x(y)$ .

2. Еластичність взаємно обернених функцій – взаємно обернені величини:

$$\varepsilon_x(y) = \frac{1}{\varepsilon_y(x)}.$$

3. Еластичність добутку двох функцій, які залежать від одного і того ж аргументу  $x$  дорівнює сумі еластичностей:  $\varepsilon_x(u \cdot v) = \varepsilon_x(u) + \varepsilon_x(v)$ .

4. Еластичність частки двох функцій дорівнює різниці еластичностей:

$$\varepsilon_x\left(\frac{u}{v}\right) = \varepsilon_x(u) - \varepsilon_x(v).$$

5. Для еластичності суми двох функцій має місце формула:

$$\varepsilon_x(u + v) = \frac{\varepsilon_x(u) \cdot u + \varepsilon_x(v) \cdot v}{u + v}.$$

### Типи еластичностей:

#### 1. Еластичність попиту за ціною.

В (1, 2) приймемо  $x = p$  – ціна продукції,  $y = q$  – об'єм попиту на продукцію. Еластичність попиту за ціною будемо позначати  $\varepsilon_p^D(q)$ .

Якщо  $|\varepsilon_p^D(q)| > 1$ , то попит називається **еластичним**.

Якщо  $|\varepsilon_p^D(q)| < 1$ , то попит називається **нееластичним**.

Якщо  $|\varepsilon_p^D(q)| = 1$ , то говорять, що попит з **одиничною еластичністю**.

#### 2. Еластичність попиту за доходом.

В (1, 2) приймемо  $x = M$  – доход споживача,  $y = q$  – об'єм попиту на продукцію. Еластичність попиту за доходом будемо позначати  $\varepsilon_M^D(q)$ .

Якщо  $\varepsilon_M^D(q) > 0$ , то товар називається **якісним**, **цінним** або **нормальним**.

Якщо  $\varepsilon_M^D(q) < 0$ , то товар називається **неякісним**, **нецінним**, **ненормальним**.

### 3. Перехресна еластичність попиту за ціною.

В (1, 2) приймемо  $y = q_1$  – об’єм попиту одного товару,  $x = p_2$  – ціна іншого товару. Перехресну еластичність попиту за ціною будемо позначати  $\varepsilon_{p_2}^D(q_1)$ .

Якщо функція  $y = q_1(p_1, p_2)$  має частинну похідну за змінною  $p_2$ , то

$$\varepsilon_{p_2}^D(q_1) = (q_1)'_{p_2} \cdot \frac{p_2}{q_1}.$$

Якщо  $\varepsilon_{p_2}^D(q_1) > 0$ , то такі товари називаються **субститутами**.

Якщо  $\varepsilon_{p_2}^D(q_1) < 0$ , то такі товари називаються **комплементарними**.

Якщо  $\varepsilon_{p_2}^D(q_1) = 0$ , то такі товари є **незалежними**.

### 4. Цінова еластичність ресурсів.

В (1, 2) приймемо  $y = R_i$  – об’єм попиту на  $i$ -ий ресурс,  $x = p_i$  – його ціна. Цінову еластичність  $i$ -го ресурсу будемо позначати  $\varepsilon_{p_i}(R_i)$ .

#### Приклади розв’язання задач

#### Приклад 2.

Функція попиту в деякій ринковій моделі задана рівнянням  $q = \frac{2p+15}{p+1}$ .

- 1) За якої ціни попит буде становити більше, ніж 6 одиниць?
- 2) Знайти граничний попит  $\frac{dq}{dp}$ , коли ціна дорівнює 3 гр. од.
- 3) Знайти цінову еластичність попиту за ціни 3 гр. од.
- 4) Визначити, як зміниться попит (у відсотках), якщо ціна знизиться з рівня  $p = 3$  гр. од. на 1,4%.

#### Розв’язання.

- 1) Виходячи з умови, маємо нерівність:

$$\frac{2p + 15}{p + 1} > 6,$$

розв’язуючи яку та зважаючи, що ціна  $p$  невід’ємна, отримуємо, що  $p < 2,25$ .

$$2) \frac{dq}{dp} = -\frac{13}{(p+1)^2}. \text{ Якщо } p = 3, \text{ то } \left. \frac{dq}{dp} \right|_{p=3} = -\frac{13}{16}.$$

$$3) \text{ Знайдемо об'єм попиту, коли ціна } p = 3: q(3) = \frac{2 \cdot 3 + 15}{3 + 1} = \frac{21}{4}.$$

Цінова еластичність попиту:

$$\varepsilon_p^D(q) \big|_{p=3} = \left. \frac{dq}{dp} \right|_{p=3} \cdot \left. \frac{p}{q} \right|_{p=3} = -\frac{13}{16} \cdot \frac{3}{\frac{21}{4}} = -\frac{13}{28}.$$

$$4) \varepsilon_p^D(q) \big|_{p=3} = \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p}, \text{ де } \Delta p/p - \text{відсоткова зміна ціни, } \Delta q/q - \text{відсоткова зміна попиту. Тому } \frac{\Delta q}{q} = \varepsilon_p^D(q) \big|_{p=3} \cdot \frac{\Delta p}{p} = -\frac{13}{28} \cdot (-1,4\%) = 0,65\%,$$

тобто попит збільшиться на 0,65%.

### Задачі для самостійного розв'язування.

1. Попит заданий рівнянням  $q_D = 348 - 3p$ . Визначити, при яких  $p$  попит на товар еластичний, а при яких – ні.
2. Еластичність попиту за ціною товару X дорівнює  $-5$ , ціна збільшилася на 4%. Визначити, як змінилася виручка від продажу.
3. Попит населення на капусту характеризується еластичністю за ціною рівною  $-2$  та еластичністю за доходом рівною  $1,2$ . У наступному році очікується, що при незмінному загальному рівні цін доход населення збільшиться на 4%, а ціна капусти зросте на 2%. Визначити, на скільки зміниться величина попиту на капусту.
4. Попит і пропозиція на ринку соняшникової олії задаються лінійними рівняннями. В 2024 році рівноважна ціна склала 60 грн за літр, а рівноважна кількість 10000 літрів на день. У точці рівноваги коефіцієнт цінової еластичності попиту був рівний  $-1,5$ , а пропозиції  $1,2$ . Крім того, відомо, що у зв'язку із здешевленням оливкової олії попит на соняшкову олію впав на 18%. Враховуючи, що пропозиція соняшникової олії залишилася на попередньому рівні, визначити рівноважні об'єм та ціну в нових умовах.
5. Функція попиту на товар X має вигляд:

$$q_X = 120 - 5p_1 - 2p_2,$$

де  $p_1, p_2$  – ринкові ціни товарів X та Y. Визначити коефіцієнти прямої та перехресної еластичності попиту на товар X, коли  $p_1 = 2$  гр. од.,  $p_2 = 8$  гр. од. Зробіть висновок про тип зв'язку між товарами X та Y.

6. Функція попиту на пшеничне борошно задана рівнянням  $p = \frac{30}{\lg(2q+100)}$ .
  - 1) Визначити, при яких значеннях ціни  $p$  попит на пшеничне борошно буде додатним.
  - 2) Знайти граничний попит  $\frac{dq}{dp}$ , коли ціна дорівнює 10 гр. од.
  - 3) Знайти цінову еластичність попиту за ціни 10 гр. од.
  - 4) Визначити, як зміниться попит (у відсотках), якщо ціна зросте з рівня  $p = 10$  гр. од. на 1,2%.
7. Функція попиту на паперові серветки задана рівністю  $q = \frac{5p}{p-2}$ .
  - 1) Визначити, за якої ціни серветок попит буде додатним та знайти об'єм попиту, якщо ціна серветок  $p = 6$  грош. од.
  - 2) Знайти цінову еластичність попиту, коли  $p = 6$  грош. од.
  - 3) Обчислити відсоткову зміну величини попиту на серветки, якщо ціна впаде на 2%.
  - 4) Знайти цінову еластичність попиту, як функцію ціни.
  - 5) Визначити, за якої ціни на серветки цінова еластичність попиту на них буде становити: а)  $-0,5$ ; б)  $-1$ ; в)  $-4/3$ .
8. Функція попиту на продукт монополіста  $p = 150 \cdot 5^{-0,2q}$ .
  - 1) Знайти граничний попит  $\frac{dq}{dp}$ , коли  $q = 10$  ум. од.
  - 2) Знайдіть цінову еластичність попиту, коли  $q = 10$  ум. од. Чи є попит еластичним / нееластичним?
  - 3) Знайти, як зміниться попит (у відсотках), якщо ціна зросте на 5%.
  - 4) Визначити надлишок споживача, якщо рівноважна ціна складає  $p = 30$  гр. од.

### 3. Функція корисності. Задача споживчого вибору

Нехай споживач має дохід  $M$ , який він повністю витрачає на придбання благ або товарів,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  – вектор-стовпчик об'ємів товарів, які придбає споживач за визначений термін з доходом  $M$  та заданими цінами. Простір усіх товарів позначимо через  $X$ :  $X = \{x: x \geq 0\}$ .

Враховуючи структуру цін, дохід та власні смаки споживач придбає певну кількість благ. Математичну модель його поведінки називають моделлю споживчого вибору.

В теорії споживчого вибору вважається, що кожний споживач має на просторі  $X$  свої смаки і переваги, тобто  $\forall x, y \in X$  має місце одне із співвідношень:

- 1)  $x \succ y$  ( $x$  переважніший ніж  $y$ )
- 2)  $y \succ x$  ( $y$  переважніший ніж  $x$ )
- 3)  $x \sim y$  (мають однакову степінь переваг)

Співвідношення переваг мають такі властивості:

- 1) транзитивності:  $x \succ y, y \succ z \Rightarrow x \succ z$
- 2) ненасичуваності:  $x \succ y \Rightarrow x \succ y$ .

Функція  $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ , визначена на множині споживчих наборів  $x$ , значення якої дорівнює оцінці споживача певного набору продуктів, називається **функцією корисності споживача**.

**Множина бюджетної обмеженості:**  $B = \{x \in X: px \leq M\}$ ,

де  $px$  – скалярний добуток векторів  $p$  та  $x$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  – вектор-рядок

цін товарів  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

**Задача споживчого вибору:**

Знайти такий споживчий набір, при якому функція корисності споживача досягає максимуму на заданій множині бюджетної обмеженості:

$$u(x) \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} px \leq M \\ x \geq 0 \end{cases}$$

У теорії споживчого вибору вважають, що споживач завжди намагається максимізувати свою корисність і витрачає на це весь свій бюджет, тобто нерівність  $px \leq M$  обертається на рівність.

Розглянемо функцію Лагранжа  $L = u(x) - \lambda(px - M)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) - \lambda^0 p_i = 0, i = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n p_j x_j^0 = M \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j^0 = M \quad (4)$$

Розв'язок системи (3-4) є **функцією попиту споживача**:

$$x^0 = x^0(p, M).$$

**Правило часток:**

Якщо функція корисності є функцією виду

$$u(x) = A \cdot x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n},$$

$M$  – доход споживача,  $p_i$  – ціни відповідних товарів, тобто має місце обмеження виду  $p_1x_1 + \dots + p_nx_n = M$ , то функції попиту споживача або оптимальний набір споживача можна знайти за формулами:

$$x_i = \frac{k_i}{k_1 + \dots + k_n} \cdot \frac{M}{p_i}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

**Модель Стоуна:**

$$u(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i} \rightarrow \max$$

$$px = M$$

де  $a_i$  – мінімальна кількість матеріального блага, яка придбається у будь-якому випадку і не є предметом вибору, показники степенів  $\alpha_i > 0$  характеризують цінність благ для споживача.

Функція попиту споживача у моделі Стоуна:

$$x_i = \frac{\alpha_i (M - \sum_{i=1}^n a_i p_i)}{p_i \sum_{i=1}^n \alpha_i} + a_i, \quad i = \overline{1, n}$$

### **Приклади розв'язання задач**

#### **Приклад 3.**

Переваги споживача задані такою функцією корисності:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{1/7} x_2^{2/7}.$$

- 1) Знайти функції попиту споживача.
- 2) Визначити максимальну корисність, якщо споживач має доход в 1920 грош. од., а ціни товарів відповідно складають 5 і 10 грош. од./од. тов.



- 3) Ціна товару  $x_1$  зросла на 2 грош. од.. На скільки потрібно збільшити дохід споживача, щоб він залишився на тій же кривій байдужості за умови, що ціна іншого товару не змінилася?

**Розв'язання.**

- 1) За правилом часток функції попиту споживача мають вигляд:

$$x_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{M}{p_1}; \quad x_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{M}{p_2}.$$

- 2) Враховуючи функції, отримані у попередньому пункті, визначаємо оптимальний набір споживача:

$$x_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1920}{5} = 128; \quad x_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1920}{10} = 128.$$

Максимальна корисність споживача буде досягатися в отриманій точці:

$$u_{max} = u(128; 128) = 128^{1/7} 128^{2/7} = 128^{3/7} = 8$$

- 3) Нова ціна товару  $x_1$ :  $p'_1 = 7$  грош. од. Позначимо новий дохід споживача через  $M'$ . Тоді оптимальний набір споживача стане:

$$x'_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{M'}{7}; \quad x'_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{M'}{10}.$$

Враховуючи, що споживач має залишитися на тій же кривій байдужості маємо рівняння:

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{M'}{7}\right)^{1/7} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{M'}{10}\right)^{2/7} = 8,$$

розв'язуючи яке, отримуємо  $M' = 192 \cdot \sqrt[3]{1400} = 2147,88$  грош. од.

**Задачі для самостійного розв'язування.**

1. Визначити функції попиту споживача, якщо його функція корисності задана рівнянням:
- 1)  $u = 2x_1^{1/2} x_2^{1/2}$
  - 2)  $u = 12x_1^{1/4} x_2^{3/5}$ ;

$$3) u = 5x_1^{1/3} x_2^{2/5} x_3^{3/4}.$$

2. Пан П.П.Петренко 9600 грн витрачає на придбання картоплі та інших продуктів харчування. Визначити максимальну корисність та оптимальний набір споживача пана Петренка, якщо його функція корисності задається рівнянням  $u = 4x_k^{1/4} x_{ін.п.}^{5/8}$ , вартість картоплі складає 12 грн за кілограм, а вартість умовної одиниці іншого продукту харчування 25 грн за одиницю.
3. Функція корисності споживача має вид  $u(x_1, x_2) = 6x_1^{3/7} x_2^{4/7}$ . Визначити максимальну корисність, якщо споживач має доход 5600 грош. од., а ціни товарів відповідно складають 10 та 25 грош. од./ од. тов.
4. Визначити, який набір товарів вибере споживач, який має доход 2000 грош. од., якщо його функція корисності  $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[7]{x_1^2 x_2 x_3^5}$ , а ціни товарів  $p_1 = 2$  грош. од./ од. тов.,  $p_2 = 5$  грош. од./ од. тов.,  $p_3 = 3$  грош. од./ од. тов.
5. Пан С.М. Семенюк витрачає щомісячно на придбання молока та хліба 3000 грн. Літр молока коштує 20 грн, а кілограм хліба 15 грн. Функція корисності пана Семенюка  $u = x_m^{1/4} x_x^{3/4}$ . Відомо, що ціна молока зросла втричі.
  - 1) Визначити, на скільки потрібно знизити ціну хліба, щоб споживач залишився на попередній кривій байдужості. Як зміниться оптимальний набір споживача?
  - 2) Визначити, на скільки потрібно збільшити щомісячні витрати пана Семенюка, щоб споживач залишився на попередній кривій байдужості за умови, що ціна хліба не зміниться.
6. Степан Степанович Степаненко збирається витратити 840 грн на придбання кави, яка коштує 80 грн за 100 г, та чаю вартістю 60 грн за 100 г. Переваги споживача описуються функцією корисності  $u = \ln \sqrt[6]{x_k^5} + \ln \sqrt[3]{x_q}$ . Визначити оптимальний набір С.С.Степаненка.

7. Знайти функції попиту споживача з доходом 20000 грн, якщо його функція корисності задана рівнянням:

$$u = \sqrt[6]{(x_1 - 3) \cdot (x_2 - 7)^5} \cdot \sqrt[4]{(x_3 - 5)^3}.$$

#### 4. Виробничі функції та їх характеристики

**Виробнича функція** – функція, незалежні змінні якої визначають об'єми використовуваних ресурсів (праця, засоби праці, предмети праці та інші), а залежна змінна – об'єми продукції, що випускаються.

$$y = f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n),$$

де  $y$  – об'єм продукції,  $x_1, \dots, x_n$  – використовувані ресурси.

**Виробнича функція Кобба-Дугласа:**

$$y = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2},$$

де  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $K$  – об'єм використаного протягом певного періоду часу капіталу підприємства.  $L$  – кількість одиниць витраченої протягом цього часу праці.

Відношення:

- $k = \frac{K}{L}$  називається **капіталоозброєністю (або фондоозброєністю) праці**,
- $\frac{y}{L}$  називається **продуктивністю праці**,
- $\frac{y}{K}$  називається **продуктивністю капіталу**,
- $\frac{K}{y}$  та  $\frac{L}{y}$  називаються **капіталоємністю та працеемністю випуску** відповідно.

Виробнича функція виду

$$y = A \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad i = \overline{1, n}$$

називається **мультиплікативною**.

Виробнича функція виду:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

називається лінійною.

**Характеристики виробничої функції:**

- Середня продуктивність  $i$ -го ресурсу:

$$A_i = \frac{f(x)}{x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Гранична продуктивність (ефективність)  $i$ -го ресурсу (або маржинальна продуктивність  $i$ -го ресурсу, або граничний випуск за  $i$ -тим ресурсом):

$$M_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Еластичність випуску за  $i$ -тим ресурсом:

$$\varepsilon_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(x)}.$$

- Еластичність виробництва:

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

- Гранична норма заміщення  $i$ -го ресурсу  $j$ -тим:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i}.$$

Гранична норма заміщення  $i$ -го ресурсу  $j$ -тим показує, на скільки одиниць збільшаться або зменшаться витрати  $j$ -го ресурсу при зменшенні або збільшенні відповідно витрат  $i$ -го ресурсу, незмінному об'ємі випуску та незмінних витратах інших ресурсів.

Для розрахунків граничної норми заміщення  $i$ -го ресурсу  $j$ -тим можна використовувати рівності:

$$R_{ij} = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}} = \frac{\varepsilon_i x_j}{\varepsilon_j x_i}.$$

Для виробничої функції  $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  гіперповерхня виду  $f(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$  називається **множиною байдужості виробника** або **ізоквантою**.

**Ізоклинами** називаються лінії найбільшого зросту виробничої функції.

Рівняння ізоклиналі двофакторної виробничої функції  $y = f(x_1, x_2)$ :

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}.$$

**Еластичністю заміщення факторів** називають величину

$$\sigma_{ij} = \frac{d(\ln \frac{x_j}{x_i})}{d(\ln R_{ij})}, \quad i \neq j \in \{1, \dots, n\}.$$

Для двофакторної виробничої функції виду  $y = f(K, L)$ :

$$\sigma_{LK} = \frac{d(\ln k)}{d(\ln R_{LK})} = \frac{dk}{dR_{LK}} \cdot \frac{R_{LK}}{k}.$$

Двофакторна однорідна виробнича функція зі сталою еластичністю заміщення факторів називається **CES-функцією**. Тобто  $\sigma_{LK} = \text{const}$ .

### Приклади розв'язання задач

#### Приклад 4.

Виробнича функція фірми має вид:  $q = 5K^{3/4}L^{1/3}$ . Визначити:

- 1) середню продуктивність фондів, якщо  $K = 16, L = 27$ ;
- 2) граничні продуктивності за ресурсами у тій же точці;

- 3) граничну норму заміщення праці фондами у тій же точці;
- 4) написати рівняння ізокванти за умови  $q = 5$  та ізоклинали, яка проходить через точку  $K = 2,5, L = 1$ .

### Розв'язання:

1) Середня продуктивність фондів  $A_K = \frac{f(K,L)}{K} = \frac{5K^{3/4}L^{1/3}}{K} = 5 \cdot \frac{L^{1/3}}{K^{1/4}},$

підставимо значення  $K = 16, L = 27$ , отримуємо:  $A_K = 5 \cdot \frac{27^{1/3}}{16^{1/4}} = 5 \cdot \frac{3}{2} = 7,5.$

2) Гранична продуктивність фондів:  $M_K = \frac{\partial f(K,L)}{\partial K}$

$$M_K = \frac{15K^{-1/4}L^{1/3}}{4} = \frac{15}{4} \cdot \frac{L^{1/3}}{K^{1/4}}, \text{ значення у точці: } M_K = \frac{15}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{45}{8}.$$

Гранична продуктивність праці:  $M_L = \frac{\partial f(K,L)}{\partial L}$

$$M_L = \frac{5K^{3/4}L^{-2/3}}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{K^{3/4}}{L^{2/3}}, \text{ значення у точці: } M_L = \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{10}{9}.$$

3) Гранична норма заміщення праці фондами:  $R_{LK} = \frac{M_L}{M_K}.$

Скористаємося вже знайденими значеннями.

Гранична норма заміщення праці фондами у точці  $K = 16, L = 27$ :

$$R_{LK} = \frac{10}{9} : \frac{45}{8} = \frac{16}{81}.$$

4) Рівняння ізокванти:  $5K^{3/4}L^{1/3} = 5, K^{3/4}L^{1/3} = 1$ , або  $K = L^{-4/9}.$

Рівняння ізоклинали:  $\frac{dK}{\partial f} = \frac{dL}{\partial f}.$

Тоді  $\frac{dK}{\frac{15}{4}K^{-1/4}L^{1/3}} = \frac{dL}{\frac{5}{3}K^{3/4}L^{-2/3}},$  далі  $4KdK = 9LdL,$

Інтегруючи одержане диференціальне рівняння, отримуємо  $2K^2 = 9L^2/2 + C/2$ , звідки  $4K^2 = 9L^2 + C$ .

Враховуючи, що ізоклиналь проходить через точку  $K = 2,5$ ,  $L = 1$ , отримуємо, що  $C = 16$ , а рівняння ізоклинали  $4K^2 = 9L^2 + 16$ .

### **Задачі для самостійного розв'язування.**

1. Технологія виробництва фірми задана виробничою функцією  $q = 2K^{1.5}L^2$ . Визначити граничну продуктивність праці, граничну продуктивність капіталу та граничну норму заміщення капіталу працею, якщо  $K = 25$ ,  $L = 16$ .
2. Виробнича функція виробництва з виготовлення кондиціонерів має вид  $q = 7K^{3/5}L^{2/5}$ , де  $q$  – кількість кондиціонерів, які виготовлені протягом дня,  $K$  – кількість годин роботи машин протягом дня,  $L$  – кількість робітників. Знайти середню та граничну продуктивності фондів, якщо  $K = 16$ ,  $L = 8$ .
3. Виробнича функція фірми задана рівнянням  $q = 12K^3L^{0.5}$ . Знайти граничну норму заміщення капіталу працею, якщо капіталоозброєність праці складає 4.
4. Виробництво металопластикових вікон характеризується функцією  $q = 2K^{4/3}L^{2/3}$ . Протягом тижня витрачається 54 год. праці та 54 год. роботи машин.
  - 1) Визначити скільки металопластикових вікон випускається за тиждень.
  - 2) Знайти середню та граничну продуктивності фондів, якщо  $K=8$ ,  $L=27$ .
  - 3) Знайти граничну норму заміщення капіталу працею. На скільки годин потрібно збільшити витрати праці, якщо з метою економії електроенергії було вирішено зменшити роботу верстатів на 6 годин?
  - 4) Знайти еластичності випуску за капіталом та працею.

- 5) Визначити, в скільки разів зросте випуск, якщо буде вирішено збільшити використання ресурсів у 2 рази.
5. Виробнича функція фірми має вид  $q = x_1^2 + 4x_2^2$ . Визначити граничні продуктивності за ресурсами та побудувати ізокванту  $q = 16$ .
6. Написати рівняння ізоклинали, яка проходить через точку  $K = 3, L = 4$ , та побудувати її для виробничої функції  $q = 4K^{3/4}L^2$ .
7. Виробнича функція фірми має вид  $q = x_1^2 + 3x_2^2$ . Написати рівняння ізокванти за умови  $q = 27$  та ізоклинали, яка проходить через точку  $x_1 = 1, x_2 = 1$ , побудувати обидві криві.
8. Чи буде виробнича функція виду  $q = 5K^2L^3$  CES-функцією?

## 5. Модель фірми

Нехай  $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  – виробнича функція фірми,  
 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  – вектор-рядок цін ресурсів,  $p$  – вартість одиниці продукції,  
 $c(x) = \omega \cdot x$  – витрати виробництва.

Будемо вважати, що функція  $f(x)$  є двічі неперервно-диференційовною та її матриця Гессе від'ємно визначена.

Прибуток фірми:

$$\pi(x) = p \cdot f(x) - \omega \cdot x \quad (4)$$

Доданки в (4) це:

$p \cdot f(x) = r(x)$  – вартість річного випуску фірми (річний дохід),

$\omega \cdot x = c(x)$  – витрати виробництва (вартість витрат ресурсів за рік).

**Основна мета фірми** – максимізація прибутку  $\pi(x)$  шляхом раціонального розподілу використовуваних ресурсів.

У теорії фірми ставлять й інші задачі:



- Задача максимізації випуску при заданому об'ємі витрат ресурсів  $c$ :

$$f(x) \rightarrow \max$$

$$\omega \cdot x \leq c,$$

$$x \geq 0.$$

- Задача мінімізації загальних витрат фірми  $c$ .
- Задача мінімізації середніх витрат фірми  $\bar{c} = \frac{c}{f(x)}$ , та ін.

### Правило часток:

Якщо виробнича функція є мультиплікативною, тобто  $f(x_1, \dots, x_n) = A \cdot x_1^{\bar{k}_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\bar{k}_n}$ ,  $c$  – витрати виробництва,  $\omega_i$  – ціни відповідних ресурсів  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), тобто має місце обмеження виду  $\omega_1 \cdot x_1 + \dots + \omega_n \cdot x_n = c$ , то оптимальний розподіл ресурсів можна знайти за формулами:

$$x_i = \frac{k_i}{k_1 + \dots + k_n} \cdot \frac{c}{\omega_i}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

### Приклади розв'язання задач

#### Приклад 5.

Виробнича функція фірми має вид:  $q = 5K^{3/4}L^{1/3}$ . Визначити розподіл фондів і витрат праці, при яких випуск буде максимальним, якщо на усі витрати виділено 500 грошових одиниць, вартість оренди фондів складає 20 грош. од. на одиницю фондів, ставка заробітної плати 15 грош. од. на працівника.

#### Розв'язання:

Побудуємо математичну модель задачі:

$$q = 5K^{3/4}L^{1/3} \rightarrow \max$$

$$20K + 15L = 500$$

За правилом часток оптимальний розподіл ресурсів:

$$K = \frac{3/4}{3/4 + 1/3} \cdot \frac{500}{20} = \frac{225}{13}$$

$$L = \frac{1/4}{3/4 + 1/3} \cdot \frac{500}{15} = \frac{100}{13}$$

### **Приклад 6.**

Рівняння попиту на продукт монополіста має вигляд  $p = 680 - 3q$ , а функція середніх витрат  $\bar{c} = \frac{q}{2} + 50 + \frac{10000}{q}$ . Визначити:

- 1) рівень випуску, за якого прибуток є максимальним.
- 2) максимальний прибуток.
- 3) ціну продукту, яка встановиться на ринку, за умови випуску продукції в об'ємі, який максимізує прибуток монополіста.

### **Розв'язання:**

- 1) Складемо функцію прибутку фірми залежну від випуску  $q$ :

$$\begin{aligned}\pi(q) &= r(q) - c(q) = p \cdot q - \bar{c} \cdot q = (680 - 3q) \cdot q - \left(\frac{q}{2} + 50 + \frac{10000}{q}\right) \cdot q = \\ &= 680q - 3q^2 - \frac{q^2}{2} - 50q - 10000 = -\frac{7}{2}q^2 + 630q - 10000.\end{aligned}$$

$$\pi'(q) = -7q + 630 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{630}{7} = 90$$

$\pi''(q) = -7 < 0$ , отже знайдена точка є точкою максимуму функції  $\pi(q)$ .

Тому, коли  $q = 90$  умовних одиниць виробів, прибуток монополіста є максимальним.

$$2) \pi_{\max}(q) = \pi(90) = -\frac{7}{2}90^2 + 630 \cdot 90 - 10000 = 18350 \text{ грош. од.}$$

$$3) p = 680 - 3 \cdot 90 = 410 \text{ грош. од.}$$

### Задачі для самостійного розв'язування.

1. Технологія фірми характеризується виробничою функцією  $q(x, y) = 5\sqrt[3]{x^2y}$ . Вартість одиниці ресурсу X складає 20 грн, ресурсу Y – 30 грн. Фірма має грошові кошти у розмірі 120 тис. грн.. Визначити максимально можливий об'єм виробництва.
2. Випуск фірми з виробництва принтерів визначається виробничою функцією  $q = 10K^{3/8}L^{5/8}$ . Знайти розподіл фондів і витрат праці, при якому випуск буде максимальний, якщо фірма має в своєму розпорядженні 8 млн грош. од., вартість оренди фондів складає 8000 грош. од. на одиницю фондів, ставка заробітної плати – 20000 грош. од. на працівника.
3. Виробнича функція фірми задана рівнянням  $q = 5x_1^{3/2} x_2^{4/3} x_3^{1/2}$ . Визначити максимальний випуск, якщо  $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ .
4. Фірма піклується про підвищення кваліфікації своїх співробітників. Витрати на проведення семінарів всередині компанії складають 500 грн за семінар, вартість зовнішнього тренінгу складає 1500 грн. Бюджет фірми, виділений на підвищення кваліфікації працівників на місяць, становить 15000 грн. Нехай  $x_1, x_2$  – відповідно кількість внутрішніх семінарів та кількість зовнішніх тренінгів. Прибуток фірми залежить від отриманих знань та вмінь її співробітників та задається функцією:

$$\Pi(x_1, x_2) = 4x_1x_2 - 5x_1^2 - x_2^2 + 20x_1 + 100000 .$$

Як потрібно використати бюджет фірми на підвищення кваліфікації, щоб прибуток був максимальний?

5. Вугледобувна шахта реалізує свою продукцію через внутрішній ринок і закордонних партнерів. У процесі продажу  $x_1$  т вугілля через внутрішній ринок країни витрати на реалізацію складають  $2x_1^2$  грн, а у ході продажу  $x_2$  т вугілля закордонним партнерам  $5x_2 + 2x_2^2$  грн. Визначити кількість

тон вугілля, яку необхідно продавати кожним способом для мінімізації витрат на реалізацію, якщо кожну добу шахта видобуває 18000 т вугілля.

6. Функція загальних витрат виробника визначається як

$$c = 0,2q^3 - 3q + 10,$$

де  $c$  – загальна вартість виробництва  $q$  одиниць продукції.

- 1) Знайдіть граничні витрати при виробництві 10 одиниць продукції.
- 2) Виробник може продавати товар за 12 доларів за одиницю продукції. Знайдіть рівень виробництва, за якого досягається максимальний прибуток. Знайти максимальний прибуток і показати, що це дійсно максимум

7. Рівняння попиту на продукт монополіста має вигляд  $p = 1200 - \sqrt{q}$ , а функція середніх витрат  $\bar{c} = 0,4q + 1850 + \frac{15000}{q}$

- 1) Визначити рівень випуску, за якого прибуток є максимальним.
  - 2) Визначити максимальний прибуток.
  - 3) Визначити ціну, яка встановиться на ринку, за умови випуску продукції в об'ємі, який максимізує прибуток монополіста.
8. При виробництві роботів-пилососів щоденні середні витрати розраховуються в залежності від величини випуску за формулою:

$$\bar{c} = \frac{q}{250} + 10 + \frac{1000}{q}$$

- 1) Визначити граничні загальні витрати, якщо за день виробляється 250 одиниць техніки.
- 2) Знайти рівень виробництва  $q$ , за якого середні витрати будуть мінімальними.

## **6. Макроекономіка**

Макроекономічна теорія вивчає закономірності функціонування та розвитку економіки в цілому. Вона оперує такими поняттями, як національний дохід, інфляція, зайнятість, економічний ріст, грошова політика, фіскальна політика, зовнішньоекономічна діяльність тощо.

Основні положення макроекономічної теорії включають:

### **1. Кругообіг національного доходу.**

Це вивчення процесу формування та розподілу національного доходу між домогосподарствами, підприємствами, державою та зовнішнім сектором.

### **2. ВВП і його складові.**

ВВП (валовий внутрішній продукт) є основним показником макроекономічної діяльності. Він вимірює вартість всіх остаточних товарів та послуг, вироблених в країні протягом певного періоду. ВВП складається з споживання, інвестицій, урядових витрат і чистого експорту.

### **3. Економічні цикли.**

Це періодичні коливання економічної активності, які включають фази розширення (економічного зростання) та скорочення (рецесії або депресії).

### **4. Рівень цін та інфляція.**

Рівень цін визначає, скільки товарів та послуг можна купити за одиницю грошей. Рівень цін може змінюватися внаслідок інфляції або дефляції.

### **5. Рівень зайнятості та безробіття.**

Макроекономічна теорія також вивчає взаємозв'язок між рівнем зайнятості, безробіттям та виробництвом.

### **6. Грошова політика.**

Це використання центральним банком інструментів, таких як відсоткова ставка, для впливу на кількість грошей в обігу та кредитування в економіці.

Грошова політика може бути використана для стимулювання економічного зростання або зменшення інфляції.

## **7. Фіскальна політика.**

Фіскальна політика – це використання урядом податків, витрат та боргових зобов'язань для впливу на економічну активність. Фіскальна політика може бути використана для стимулювання економічного зростання або зменшення інфляції.

Двома основними школами макроекономічної думки є кейнсіанська та класична теорії, які мають різні погляди на функціонування економіки та роль держави в ній.

Класична теорія заснована на роботах економістів 18-19 століть, таких як Адам Сміт, Девід Рікардо та Жан-Батист Сей. Вона стверджує, що ринкова економіка є саморегульованою, і що державне втручання в економіку є непотрібним і навіть шкідливим.

Основні положення класичної теорії:

1. Саморегулювання ринку. Класична теорія стверджує, що ринок сам по собі здатний досягти рівноваги між пропозицією та попитом, забезпечуючи повну зайнятість ресурсів.
2. Закон Сейя. Закон Сейя стверджує, що "попит створює пропозицію". Це означає, що всі товари, вироблені в економіці, будуть продані, якщо ціни будуть гнучкими.
3. Нейтральність грошей. Класична теорія стверджує, що зміни в грошовій масі не впливають на реальні величини, такі як ВВП, рівень зайнятості та реальні відсоткові ставки.

**Кейнсіанська теорія** заснована на роботах британського економіста Джона Мейнарда Кейнса, який жив і працював в першій половині 20-го століття. Вона стверджує, що ринкова економіка не завжди є саморегульованою

і що державне втручання в економіку може бути необхідним для досягнення макроекономічної стабільності.

Основні положення кейнсіанської теорії:

1. Нестабільність ринку. Кейнсіанська теорія стверджує, що ринок може бути нестабільним, і що пропозиція та попит не завжди збігаються. Це може призвести до неповної зайнятості ресурсів і до економічних криз.
2. Роль держави: Кейнсіанська теорія стверджує, що держава повинна втручатися в економіку, щоб забезпечити макроекономічну стабільність. Держава може використовувати фіскальну та грошову політику для стимулювання або гальмування економіки.
3. Фіскальна політика. Кейнсіанська теорія стверджує, що фіскальна політика може бути використана для стимулювання економіки в періоди спаду та для гальмування економіки в періоди зростання. Збільшення державних витрат або зниження податків може стимулювати економічне зростання, тоді як зменшення державних витрат або підвищення податків може зменшити інфляцію.
4. Грошова політика. Кейнсіанська теорія стверджує, що грошова політика може бути використана для впливу на економіку. Центральний банк може змінювати відсоткові ставки, щоб стимулювати або гальмувати кредитування та інвестиції.
5. Рівень зайнятості. Кейнсіанська теорія стверджує, що рівень зайнятості в економіці залежить від рівня сукупного попиту. **Сукупний попит** - це сума всіх витрат в економіці, включаючи споживання, інвестиції, урядові витрати та чистий експорт.

Кейнсіанська теорія для аналізу та прогнозування макроекономічних процесів, таких як ВВП, рівень зайнятості, інфляція та державні фінанси використовує декілька моделей.

Дві основні моделі кейнсіанської теорії:

### 1. Модель IS-LM.

Модель IS-LM є однією з найбільш відомих моделей кейнсіанської теорії. Вона використовується для аналізу взаємозв'язку між ринком товарів і ринком грошей. Модель IS-LM складається з двох кривих: кривої IS, яка показує рівновагу на ринку товарів і послуг, і кривої LM, яка показує рівновагу на ринку грошей. Перетин цих двох кривих визначає рівноважний рівень доходу та відсоткову ставку.

### 2. Модель AD-AS.

Модель AD-AS використовується для аналізу взаємозв'язку між **сукупним попитом (AD)** і **сукупною пропозицією (AS)**.

Перетин двох кривих AD та AS визначає рівноважний загальний рівень цін та обсяги виробництва.

Наведемо основні означення та розрахункові формули, які будуть використовуватися при розв'язанні задач.

**Номінальні величини** – це величини, які обчислюються в поточних цінах.

**Реальні величини** – це величини, які обчислюються в цінах того року, який прийнятий за базу (це постійні, базові ціни).

**Номінальний ВВП** - це ринкова вартість товарів і послуг, виражена у поточних цінах:

$$\text{ВВП} = \sum_{i=1}^n Q_i P_i,$$



де  $Q_i$  – обсяг виробництва (кількість)  $i$ -го товару в поточному році,  $P_i$  – ціна  $i$ -го товару в поточному році,  $n$  – кількість товарів, що виробляються в поточному році.

**Реальний ВВП** – це обсяг ВВП в цінах того року, який прийнятий за базу порівняння.

**Дефлятор** – це коефіцієнт переведення економічних показників, розрахованих у поточних цінах, у ціни порівнюваного (базового) періоду.

Формула для знаходження дефлятора ВВП (індекс-дефлятора):

$$\text{ВВП дефлятор} = \frac{\text{Номінальний ВВП}}{\text{Реальний ВВП}} \cdot 100\%.$$

**Темп інфляції (рівень інфляції):**

$$\begin{aligned} & \text{Темп інфляції поточного року} = \\ & = \frac{\text{ВВП дефлятор поточного року} - \text{ВВП дефлятор минулого року}}{\text{ВВП дефлятор минулого року}} \cdot 100\%. \end{aligned}$$

**Споживання** – це споживчі витрати, які виключають витрати на придбання житла.

**Інвестиції** – це витрати на будівництво, придбання обладнання, утворення матеріально-товарних запасів, амортизацію та витрати домогосподарств на придбання житла.

**Державні закупівлі** – це витрати держави на утримання збройних сил, виплату зарплати працівникам державного сектора економіки, та інші закупівельні процедури державних замовників. З державних закупівель відраховуються всі трансфертні державні платежі.

**Чистий експорт** – це різниця між експортом та імпортом товарів та послуг.

**Основна тотожність макроекономіки:**

$$Y = C + I + G + Nx,$$

де  $Y$  – дохід (ВВП);  $C$  – споживання;  $I$  – інвестиції;  $G$  – державні закупівлі;  $Nx$  – чистий експорт.

**Середня схильність до споживання (APC):**

$$APC = \frac{C}{Y_d},$$

де  $\Delta C$  – приріст споживання;  $\Delta Y_d$  – приріст доходу.

**Гранична схильність до споживання (MPC):**

$$MPC = \frac{\Delta C}{\Delta Y_d}.$$

**Номінальна відсоткова ставка** – це відсоткова ставка, оголошена банком.

**Реальна відсоткова ставка** – це відсоткова ставка, з врахуванням інфляції.

Має місце залежність:

$$r = i - \pi,$$

де  $r$  – реальна відсоткова ставка,  $i$  – номінальна відсоткова ставка,  $\pi$  – темп інфляції.

За міжнародним стандартом усе населення поділяється на категорії:

- зайняті;
- безробітні;
- люди поза робочою силою.

Зайняті й безробітні – **робоча сила** або населення, активне в даний період.

### Рівень безробіття:

$$P = \frac{K_{\text{безробітних}}}{K_{\text{роб.сили}}} \cdot 100 \%,$$

де  $K_{\text{безробітних}}$  та  $K_{\text{роб.сили}}$  відповідні кількості осіб.

### Приклади розв'язання задач

#### Приклад 7.

	2015		2016		2017	
	Ціна	Кількість	Ціна	Кількість	Ціна	Кількість
Продукт А	30\$	900	31\$	1000	36\$	1050
Продукт Б	100\$	192	102\$	200	100\$	205

а) Знайдемо номінальний ВВП у кожному році:

$$\text{ВВП} = \sum_{i=1}^n Q_i P_i,$$

де  $Q_i$  — обсяг виробництва (кількість)  $i$ -го товару в поточному році,  $P_i$  — ціна  $i$ -го товару в поточному році,  $n$  — кількість товарів, що виробляються в поточному році.

В 2015 році номінальний ВВП =  $30\$ \cdot 900 + 100\$ \cdot 192 = 46\,200\$$ .

В 2016 році номінальний ВВП =  $31\$ \cdot 1000 + 102\$ \cdot 200 = 51\,400\$$ .

В 2017 році номінальний ВВП =  $36\$ \cdot 1050 + 100\$ \cdot 205 = 58\,300\$$ .

б) Знайдемо реальний ВВП у кожному році, беручи 2015 рік в якості базового року.

В 2015 році реальний ВВП =  $30\$ \cdot 900 + 100\$ \cdot 192 = 46\,200\$$ .

В 2016 році реальний ВВП =  $30\$ \cdot 1000 + 100\$ \cdot 200 = 50\,000\$$ .

В 2017 році реальний ВВП =  $30\$ \cdot 1050 + 100\$ \cdot 205 = 52\,000\$$ .

в) Знайдемо дефлятор ВВП у кожному році.

$$\text{ВВП дефлятор} = \frac{\text{Номінальний ВВП}}{\text{Реальний ВВП}} \cdot 100\%$$

У 2015 році:

$$\text{ВВП дефлятор} = \frac{46\,200}{46\,200} \cdot 100\% = 100\%.$$

У 2016 році:

$$\text{ВВП дефлятор} = \frac{51\,400}{50\,000} \cdot 100\% = 102,8\%.$$

У 2017 році:

$$\text{ВВП дефлятор} = \frac{58\,300}{52\,000} \cdot 100\% = 112,1\%.$$

г) Знайдемо темпи інфляції у кожному році. Для цього скористаємось формулою:

$$\begin{aligned} & \text{Темп інфляції поточного року} = \\ & = \frac{\text{ВВП дефлятор поточного року} - \text{ВВП дефлятор минулого року}}{\text{ВВП дефлятор минулого року}} \cdot 100\%. \end{aligned}$$

$$\text{Темп інфляції 2016 року} = \frac{102,8 - 100}{100} \cdot 100\% = 2,8\%,$$

$$\text{Темп інфляції 2017 року} = \frac{112,1 - 102,8}{102,8} \cdot 100\% = 9,0\%.$$

### **Приклад 8.**

В економіці бажані функції споживання та інвестицій визначаються функціями:

$$C_d = 1000 + 0,80 Y - 5000r,$$

$$I_d = 1000 - 4500r,$$

де  $Y$  — випуск, а  $r$  — реальна відсоткова ставка.

Державні закупівлі становлять  $G = 2000$ .

Рівняння для бажаних національних заощаджень:

$$S_d = -3000 + 0,20Y + 5000r.$$

Ринок товарів та послуг знаходиться в рівноважному стані. Знайдемо реальні відсоткові ставки, які регулюють ринок товарів та послуг, коли  $Y = 10\,000$  та  $Y = 12\,000$ .

В стані рівноваги чистий експорт  $Nx = 0$ , тому макроекономічні показники задовольняють умову:

$$Y = C + I + G$$

За наших умов:

$$Y = 1000 + 0,80Y - 5000r + 1000 - 4500r + 2000.$$

Якщо  $Y = 10\,000$  будемо мати:

$$10000 = 1000 + 0,80Y - 5000r + 1000 - 4500r + 2000.$$

Розв'язавши це рівняння відносно  $r$ , отримаємо:  $r = 0,211 = 21,1\%$ .

Аналогічно при  $Y = 12\,000$  будемо мати:

$$12000 = 1000 + 0,80Y - 5000r + 1000 - 4500r + 2000,$$

звідки  $r = 0,168 = 16,8\%$ .

**Приклад 9.** У певній економіці функція реального попиту на гроші становить

$$\frac{M_d}{P} = 3200 + 0,20Y - 10000i.$$

Припустимо, що пропозиція грошей  $M = 6000$ , рівень цін  $P = 2$ , очікуваний рівень інфляції  $\pi^e = 0,02$ .

Знайдемо реальну відсоткову ставку  $r$ , яка регулює ринок активів, коли  $Y = 8000$  і  $Y = 9000$ .

Реальна відсоткова ставка  $r$ , номінальна відсоткова ставка  $i$  та очікуваний рівень інфляції  $\pi^e$  задовольняють рівнянню Фішера:

$$i = r + \pi^e.$$

В стані рівноваги ринку грошей попит дорівнює пропозиції.

Коли  $Y = 8000$ , будемо мати

$$\frac{6000}{2} = 3200 + 0,20 \cdot 8000 - 10000(r + 0,02).$$

Звідки  $r = 0,16\%$ .

Аналогічно, коли  $Y = 9000$ , будемо мати:

$$\frac{6000}{2} = 3200 + 0,20 \cdot 9000 - 10000(r + 0,02).$$

Звідки  $r = 0,18\%$ .

### **Задачі для самостійного розв'язування.**

1. Вам надається така інформація про економіку:

Валові приватні внутрішні інвестиції: 50

Державні закупівлі товарів і послуг: 30

Валовий національний продукт (ВНП): 420

Залишок поточного рахунку: 30

Податки: 40

Державні трансфертні платежі внутрішньому приватному сектору: 20

Відсоткові платежі від уряду внутрішньому приватному сектору: 10

(Припустимо, що всі відсоткові платежі уряду спрямовуються на користь домогосподарств.)

Факторний дохід, отриманий від решти світу: 6

Факторні платежі, здійснені решті світу: 9

Припускаючи, що державні інвестиції дорівнюють нулю, знайдіть:

- 1) факторні чисті платежі з-за кордону;
  - 2) ВВП;
  - 3) чистий експорт;
  - 4) споживання;
  - 5) приватні заощадження;
  - 6) державні заощадження;
  - 7) національні заощадження.
2. Дано:  $P_{t-1} = 120,0$  та  $P_t = 126,0$ . Розрахуйте рівень інфляції  $\pi_t$  за період  $t$ .
3. Дано:  $i = 9\%$ ,  $P = 125,0$ ,  $P_{t+1} = 127,0$  і  $P_{t+1}^e = 128,4$ . Обчисліть очікувану та реальну відсоткові ставки в період  $t$ .
4. Розглянемо економіку, яка виробляє лише три види фруктів: яблука, груші та персики. У базовому році (кілька років тому) і поточному дані про виробництво та ціни наведено в таблицях нижче.

**Базовий рік**

Фрукти	Кількість	Ціна
Яблука	6000 ящиків	3\$ за ящик
Груші	4000 ящиків	4\$ за ящик
Персики	5000 ящиків	3\$ за ящик

**Поточний рік**

Фрукти	Кількість	Ціна
Яблука	10000 ящиків	4\$ за ящик
Груші	12000 ящиків	3\$ за ящик
Персики	9000 ящиків	5\$ за ящик

Знайти:

- 1) номінальний ВВП у базовому та поточному роках;
- 2) відсоток збільшення номінального ВВП в порівнянні з базовим роком;
- 3) реальний ВВП у базовому та поточному роках;
- 4) відсоткове збільшення реального ВВП в порівнянні з базовим роком.

5. Нехай задані деякі макроекономічні показники для країни X за 2023 та 2024 роки.

	2017	2018
Випуск	10 000 тонн картоплі	11 000 тонн картоплі
Працевлаштування	1000 робітників	1070 робітників
Безробіття	60 робітників	25 робітників
Робоча сила	1050 робітників	1065 робітників
Ціни	2 шекелі/тонна	2,4 шекелі/тонна

За початковими даними країна X вирощує лише картоплю, а її грошовою одиницею є шекель. Обчисліть кожний з нижченаведених макроекономічних показників для країни X та утворіть правильні твердження. Відповіді округліть до двох знаків після коми.

- 1) У 2023 році середня продуктивність праці становила \_\_\_\_\_ тонн картоплі на одного працівника.
  - 2) У 2024 році середня продуктивність праці становила \_\_\_\_\_ тонн картоплі на одного працівника.
  - 3) Темпи зростання середньої продуктивності праці з 2023 по 2024 роки становили \_\_\_\_\_ % на рік.
  - 4) У 2024 році рівень безробіття в країні X був \_\_\_\_\_
  - 5) Рівень інфляції (між 2023 і 2024 роками) був \_\_\_\_\_ за рік.
6. Припустимо, що попит на долари (в обмін на євро) задано рівнянням:

$$D = 350 + 0,017 Y_{For} - 400 r_{For} + 800 r - 25 e_{nom}.$$



Пропозиція доларів визначається так:

$$S = 200 + 0,028 Y + 420 r_{For} - 720 r + 15 e_{nom}.$$

Нехай випуск і реальна відсоткова ставка у внутрішній країні та за кордоном дорівнюють:

$$Y = 8500, Y_{For} = 9000, r = 0,070, r_{For} = 0,090.$$

- 1) Розрахувати рівноважне значення номінального валютного курсу. (У ваших обчисленнях виконайте проміжні кроки до трьох десяткових знаків і округліть відповідь до трьох десяткових знаків).
  - 2) Припустимо, що шок продуктивності в іноземній країні змінив обсяг виробництва в іноземній економіці до 9350. Розрахувати нове рівноважне значення номінального валютного курсу.
  - 3) Повертаючись до початкової ситуації, коли обсяг зовнішнього виробництва дорівнює 9000, припустимо, що шок внутрішньої продуктивності змінить обсяг виробництва у вітчизняній економіці до 8150. Розрахувати нове рівноважне значення номінального валютного курсу.
  - 4) Узагальнюючи відповіді отримані вище, оберіть із наданих нижче відповідей (A-D) правильну стосовно пропущених слів у такому висновку: збільшення зовнішнього виробництва призводить до того, що внутрішній номінальний обмінний курс \_\_\_\_\_; збільшення внутрішнього виробництва викликає \_\_\_\_\_ внутрішнього номінального обмінного курсу.
    - A. підвищується; зниження
    - B. підвищується; підвищення
    - C. знижується; зниження
    - D. знижується; підвищення.
7. Компанія VD Systems, має виробничу функцію, як задана таблицею. Знайдіть граничний продукт праці (MPN) для кожного рівня зайнятості.

Робітники	Віджети	MPN
0	0	
1	9	
2	17	
3	23	
4	28	
5	32	
6	35	

VD Systems може отримати 3\$ за кожний випущений ним віджет. Утворіть правильні твердження.

- 1) Якщо номінальна заробітна плата становить 28\$, компанія VD Systems найме \_\_\_\_ працівників.
  - 2) Якщо номінальна заробітна плата становить 16\$, компанія VD Systems найме \_\_\_\_ працівників.
  - 3) Якщо номінальна заробітна плата становить 10\$, компанія VD Systems найме \_\_\_\_ працівників.
8. Припустимо, що в країні X випуск (Y) становить 8000 од., державні витрати (G) складають 1200 грош. од., а бажані заощадження ( $S_d$ ) – 700 грош. од. Визначити бажаний рівень споживання, якщо економіка замкнута, а ринок її товарів знаходиться в рівновазі.
  9. Припустимо, що Ваш поточний дохід дорівнює 20 000 \$, а коли Ваш дохід змінюється на 1000 \$, то Ваші витрати на споживання змінюються на 1200 \$. Знайдіть значення граничної схильності до споживання (MPC).
  10. Ціна капіталу становить 2500 \$ за одиницю. Норма амортизації становить 2% на рік, а річна очікувана реальна відсоткова ставка становить 15%. Знайдіть вартість капіталу користувача. (Округліть відповідь до найближчого цілого числа.)

11. Рівняння граничної продуктивності капіталу визначається:

$$MPK = 2000 - 10K.$$

Припустимо, що ціна одиниці капіталу складає 2000 \$, норма амортизації становить 2% на рік, а реальна відсоткова ставка дорівнює 16% на рік.

- 1) Знайдіть вартість капіталу користувача (UC) та бажаний запас капіталу ( $K^*$ ).
- 2) Враховуючи умову, що існуючий рівень капіталу  $K_t = 40$  од., знайдіть рівень валових інвестицій ( $I_t$ ).

12. Верстати для виробництва обручів коштують 150 \$ за одиницю. Компанія ANK намагається вирішити, скільки таких верстатів купити. В таблиці нижче наведено, яку кількість обручів щороку компанія ANK очікує виробляти для кожного рівня основного капіталу.

Реальна ціна обруча становить 15 \$. Компанія ANK не має інших витрат, окрім вартості верстатів.

Кількість верстатів	Кількість обручів, вироблених за рік	MPK (\$)
0	0	
1	20	
2	38	
3	54	
4	68	
5	80	
6	90	

- 1) У таблиці вище знайдіть очікуваний майбутній граничний продукт капіталу (у доларах) для кожного рівня капіталу. MPK для третього

виробника, наприклад, є реальним значенням додаткового виходу, отриманого при додаванні третього виробника.

2) Якщо реальна відсоткова ставка становить 8% на рік, а норма амортизації капіталу становить 6% на рік, знайдіть вартість капіталу користувача UC (у доларах на виробника на рік).

3) Скільки верстатів має купити компанія ANK?

13. Економіка має обсяг виробництва при повній зайнятості 12000, а державні закупівлі становлять 4000. Бажане споживання та бажані інвестиції наведені в таблиці.

Реальна відсоткова ставка (%)	Бажане споживання	Бажана інвестиція
2	7200	1800
3	7000	1700
4	6800	1600
5	6600	1500
6	6400	1400

1) Визначити значення реальної відсоткової ставки, бажаних національних заощаджень і бажаних інвестицій, якщо ринок товарів знаходиться в рівновазі.

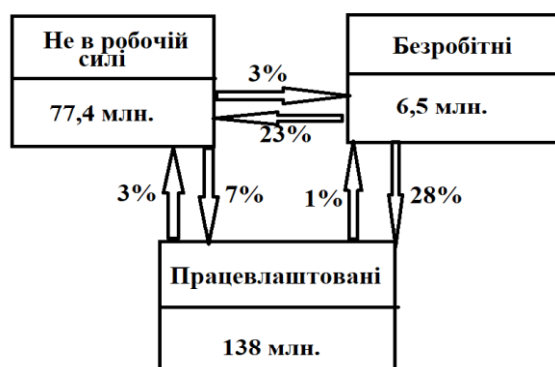
2) Знайти значення реальної відсоткової ставки, бажаних національних заощаджень і бажаних інвестицій у випадку, коли державні закупівлі падають до 3500. Вважайте, що сума, яку люди бажають спожити за кожною реальною відсотковою ставкою, не змінюється.

14. Споживач проживає три періоди, які називаються періодом навчання, періодом роботи та періодом виходу на пенсію. Його дохід становить 170 у період навчання, 2000 у період роботи та 600 у період виходу на пенсію. Початкові активи споживача дорівнюють 150. Реальна відсоткова ставка дорівнює нулю. Споживач бажає ідеально плавного споживання протягом

усього життя. Якими мають бути споживання та заощадження в кожному періоді, припускаючи, що немає обмежень щодо запозичень (заощадження можуть бути від'ємними)?

Період	Бажане споживання	Бажані заощадження
Період навчання		
Період роботи		
Період виходу на пенсію		

15.



Згідно з таблицею, знайдіть кількість людей, які стали безробітними в цьому поточному місяці; кількість людей, які отримують роботу в поточному місяці; кількість людей, які залишають робочу силу в поточному місяці.

16. У невеликій відкритій економіці:

бажані національні заощадження:  $S_d = 20 \text{ млрд. \$} + (200 \text{ млрд. \$}) \cdot r_w$ ;

бажані інвестиції:  $I_d = 50 \text{ млрд. \$} - (200 \text{ млрд. \$}) \cdot r_w$ ;

випуск:  $Y = 150 \text{ млрд. \$}$ ;

державні закупівлі:  $G = 25 \text{ млрд. \$}$ ;

світова реальна відсоткова ставка:  $r_w = 12\%$ .

1) Знайдіть значення таких змінних (округліть усі відповіді до одного знака після коми, усі значення знайдіть в мільярдах доларів):

- а) національні заощадження;
- б) інвестиції;
- в) чистий експорт;
- г) баланс поточного рахунку;
- д) споживання.

2) Завдяки технологічним інноваціям, які підвищують майбутню продуктивність, бажані інвестиції країни збільшуються на 5 мільярдів доларів на кожному рівні світової реальної відсоткової ставки. Знайдіть нові значення змінних (округліть усі відповіді до одного знака після коми, усі значення знайдіть в мільярдах доларів):

- а) національні заощадження;
- б) інвестиції;
- в) чистий експорт.

17. Розглянемо дві великі відкриті економіки, національну економіку та зовнішню економіку. В обох країнах такі відносини:

	Національна економіка	Зовнішня економіка
Бажане споживання	$C_d = 400 + 0,3(Y - T) - 150r_w$	$C_d^{FOR} = 470 + 0,3(Y^{FOR} - T^{FOR}) - 320r_w$
Бажані інвестиції	$I_d = 200 - 200r_w$	$I_d^{FOR} = 250 - 300r_w$
Випуск	$Y = 1000$	$Y^{FOR} = 1500$
Податки	$T = 180$	$T^{FOR} = 250$
Державні закупівлі	$G = 275$	$G^{FOR} = 320$

1) Знайдіть рівноважну відсоткову ставку на міжнародному ринку капіталу.

- 2) Знайдіть рівноважні значення: національних заощаджень, інвестицій та рахунку поточних операцій балансу в кожній країні.
- 3) Припустимо, що державні закупівлі в національній економіці збільшуються на 50 до 325. Податки також збільшуються на 50, щоб не допустити зростання дефіциту. Визначіть нову рівноважну відсоткову ставку на міжнародному ринку капіталу.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ ОПИС

1. Andrew B. Abel, Ben S. Bernanke and Dean Croushore. Macroeconomics, 10th Global Edition. Pearson Education Limited, 2021. 688 p.
2. Економіко-математичні методи та моделі: навч. посіб. / Н.Л. Воропай та ін. Одеса: ОНЕУ, 2018. 404 с.
3. Мікроекономіка і макроекономіка: у 2 ч. / С. Будаговська та ін. Київ: Основи, 1998. 520 с.
4. Мікроекономіка: підручник / за ред. В.Д. Базилевича. Київ: Знання, 2018. 679 с.
5. Сур'як А.В. Мікроекономіка: метод. вказівки до практичних занять. Луцьк: Волинський енергософт, 2023. 72 с.