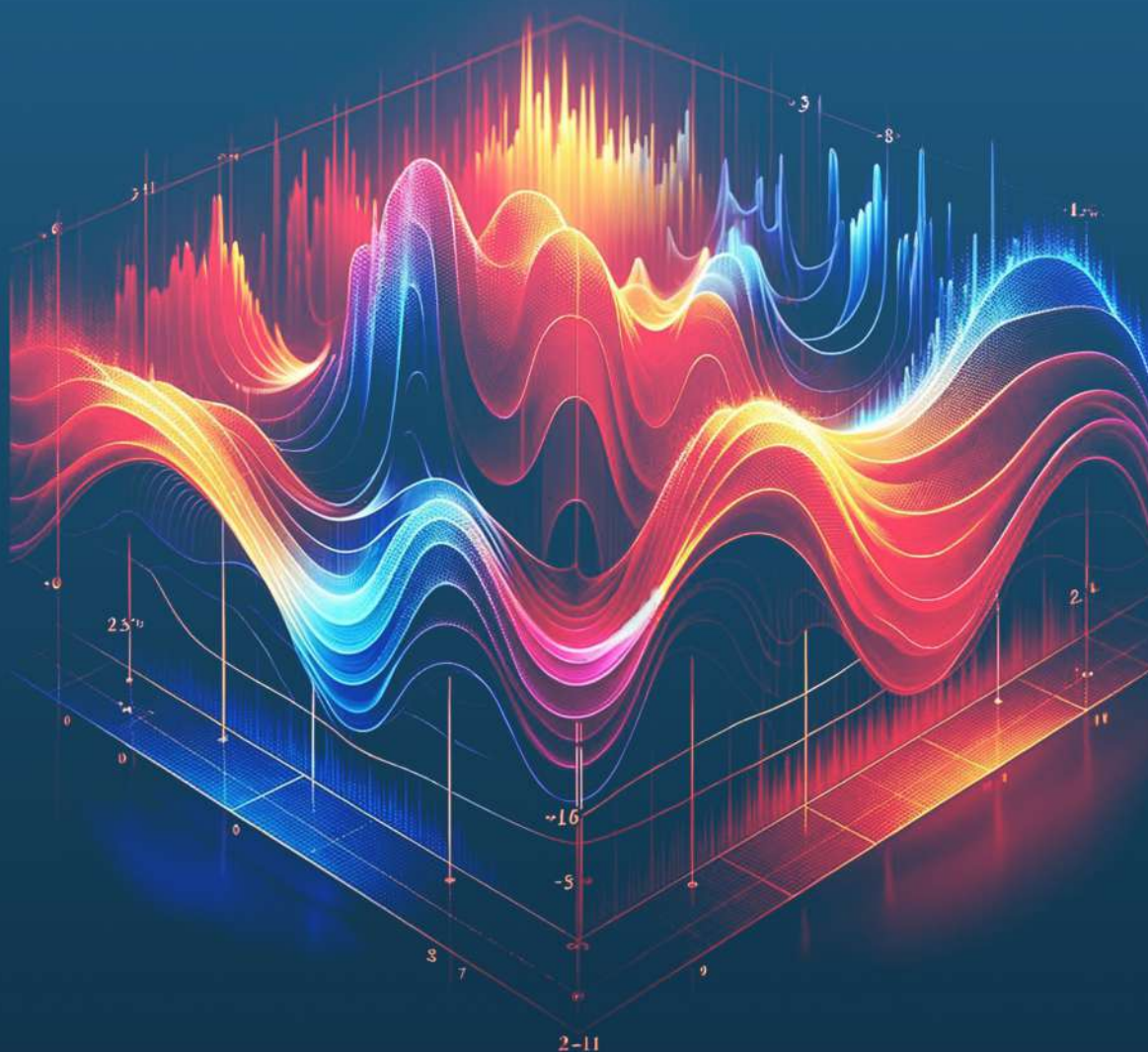


**Світлана Горбонос
Андрій Сяєв**

**ПРАКТИКУМ З ДИСЦИПЛІНИ
«РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ»**



**Дніпро
2023**

Горбонос С.О., Сясєв А.В.

Практикум з дисципліни

«Рівняння математичної фізики»

*Затверджено вченою радою механіко-математичного факультету
Дніпровського національного університету ім. О. Гончара для студентів
спеціальностей 111 Математика, 112 Статистика,
113 Прикладна математика, 144 Теплоенергетика
(протокол №8 від 28 червня 2023 р.)*

Дніпро
2023

УДК 517.2

Рецензенти: д. ф.-м. н., проф. Кагадій Т.С.
к. ф.-м. н., доц. Величко Т.В.

Горбонос С.О. Практикум з дисципліни «Рівняння математичної фізики»/С. О. Горбонос, А.В. Сяєв. – Д.: ДНУ, 2023. – 70 с.

Викладено теоретичні відомості і детальні розв'язання практичних завдань, які стосуються розв'язання методом Фур'є крайових задач для рівнянь еліптичного типу з дисципліни «Рівняння математичної фізики». Наведено варіанти завдань для самоконтролю.

Призначений для студентів спеціальностей 111 Математика, 112 Статистика, 113 Прикладна математика, 144 Теплоенергетика.

Навчальне електронне видання

С.О. Горбонос, канд. фіз.-мат. наук, доц.

А.В. Сяєв, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ДНУ ім. О. Гончара, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010.

© Сяєв А.В., Горбонос С.О., 2022,

ЗМІСТ

Крайові задачі для рівняння Лапласа	4
Крайові задачі в колі	6
Задача Діріхле.	6
Варіанти вправ для самоконтролю.	15
Задача Неймана для кола.	17
Варіанти вправ для самоконтролю.	23
Крайові задачі для кільця.	25
Варіанти вправ для самоконтролю.	33
Крайові задачі для сектора.	34
Варіанти вправ для самоконтролю.	45
Крайові задачі для рівняння Лапласа в прямокутнику.	50
Варіанти вправ для самоконтролю.	61
Метод Фур'є для рівняння Пуассона.	64
Варіанти вправ для самоконтролю.	69

Крайові задачі для рівняння Лапласа.

Рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

або

$$\Delta u = 0.$$

Рівняння Пуассона:

$$\Delta u = f(x, y).$$

I крайова задача (задача Діріхле) для рівняння Лапласа:

потрібно знайти функцію $u(x, y)$ таку, що:

1) функція u повинна бути двічі неперервно-диференційована і повинна задовольняти рівняння

$$\Delta u = 0$$

в області D ;

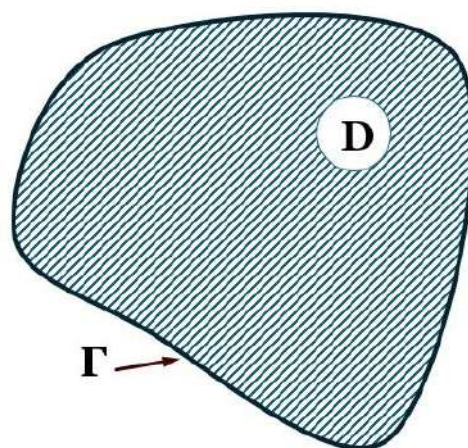
2) функція u повинна бути неперервною в замкненій області D ;

3) функція u на межі області D приймає значення:

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y)|_{\Gamma}.$$

Короткий запис задачі Діріхле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x, y)|_{\Gamma} \end{cases}$$



II крайова задача (задача Неймана):

потрібно знайти функцію таку, що:

1) функція u повинна бути двічі неперервно-диференційована і повинна задовольняти рівняння

$$\Delta u = 0$$

в області D ;

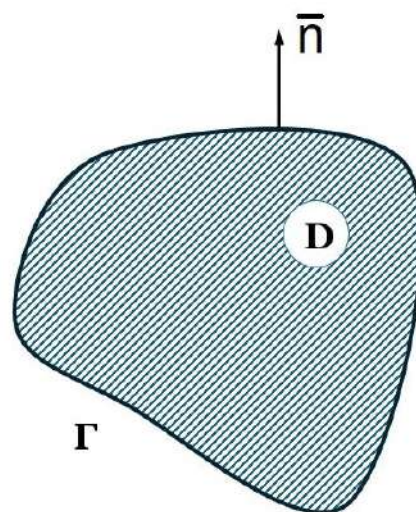
2) функція u повинна бути неперервною в замкненій області D

3) на межі області задано значення похідною функції u за напрямом зовнішньої нормальні до межі Γ

$$\left. \frac{du}{dn} \right|_{\Gamma} = \varphi(x, y)|_{\Gamma}.$$

Короткий запис задачі Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \left. \frac{du}{dn} \right|_{\Gamma} = \varphi(x, y)|_{\Gamma} \end{cases}$$



Змішана крайова задача (межа області $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$):

потрібно знайти функцію $u(x, y)$ таку, що:

1) функція u повинна бути двічі неперервно-диференційована і повинна задовольняти рівняння

$$\Delta u = 0$$

в області D ;

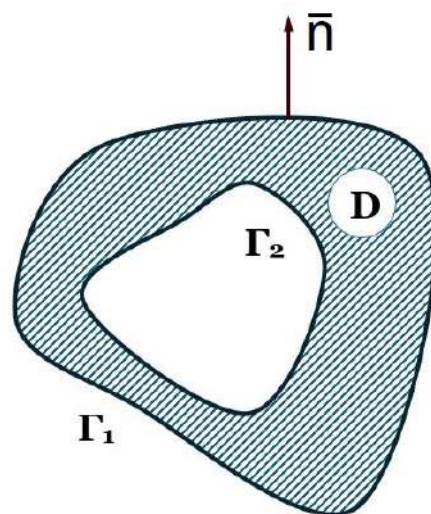
2) функція u повинна бути неперервною в замкненій області D ;

3) функція u на межі області D задовольняє умовам:

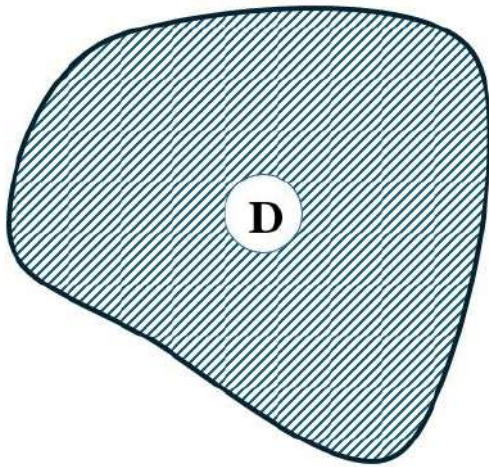
$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{dn} \right|_{\Gamma_1} &= \varphi(x, y)|_{\Gamma_1}, \\ u(x, y)|_{\Gamma_2} &= \psi(x, y)|_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

Короткий запис змішаної задачі:

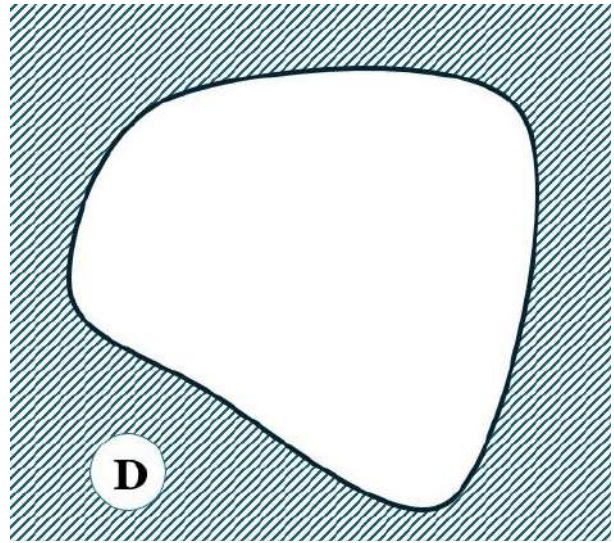
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \left. \frac{du}{dn} \right|_{\Gamma_1} = \varphi(x, y)|_{\Gamma_1} \\ u(x, y) = \psi(x, y)|_{\Gamma_2} \end{cases}$$



Внутрішні крайові задачі



Зовнішні крайові задачі



У цьому випадку до всіх задач додається ще одна умова:

4) Умова обмеженості функції на ∞ :

$$|u(x, y)| \leq k,$$

де $k = \text{const}$.

Крайові задачі в колі

Задача Діріхле.

Потрібно розв'язати задачу Діріхле для кола радіуса a з центром в початку координат.

Внутрішня задача Діріхле: потрібно знайти функцію $u(x, y)$, яка визначена і неперервна в замкнутому колі, всередині кола задовольняє рівняння:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

на межі кола Γ приймає задані значення:

$$u(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y).$$

Зовнішня задача Діріхле: потрібно знайти функцію $u(x, y)$, яка неперервна в замкненій нескінченній області поза колом K , задовольняє рівняння

$$\Delta u = 0$$

в відкритій області, приймає на межі Γ кола K задані значення $f(x, y)$ і обмежена в розглядуваній області.

Розв'язувати задачу будемо одночасно. Для цього перейдемо до полярної системи координат:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Тоді рівняння кола Γ матиме вигляд:

$$\rho = a,$$

а гранична умова

$$u(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y)$$

перепишеться так:

$$u(\rho, \varphi)|_{\rho=a} = f(\rho, \varphi)|_{\rho=a}$$

або

$$u(a, \varphi) = f(a, \varphi).$$

При зміні кута φ на величину 2π одночасно функція $u(\rho, \varphi)$ має повернутися до вихідного значення, тобто має бути періодичною по φ .

$$u(\rho, \varphi + 2n) = u(\rho, \varphi).$$

Звідси випливає що функція $f(\varphi)$, також, має бути періодичною з періодом 2π . Рівняння Лапласа в полярній системі координат має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0. \quad (1)$$

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння (1) у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить від одного аргументу, тобто:

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi). \quad (2)$$

Знайдемо необхідні похідні і підставимо в (1):

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = R'(\rho) \cdot \Phi(\varphi),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = R''(\rho) \cdot \Phi(\varphi),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = R(\rho) \cdot \Phi''(\varphi),$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + R(\rho) \cdot \Phi''(\varphi) = 0$$

або

$$\Phi(\varphi)[\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho)] + R(\rho) \cdot \Phi''(\varphi) = 0.$$

Розділимо обидві частини рівняння на $R(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$:

$$\frac{\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

Ліва частина рівня не залежить тільки від ρ , права частина тільки від φ , і так як змінні ρ і φ змінюються незалежно один від одного, то останнє співвідношення буде мати сенс лише у випадку рівності правої і лівої частини сталій:

$$\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda,$$

де $\lambda = \text{const.}$

Звідси отримаємо два рівняння:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0 \quad (3)$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho) - \lambda \cdot R(\rho) = 0 \quad (4)$$

Рівняння (3) – лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Оскільки нас цікавлять тільки 2π -періодичні розв'язки цього рівняння, то

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi + 2\pi) &\equiv u(\rho, \varphi) \Rightarrow R(\rho) \cdot \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv R(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{aligned}$$

Рівняння (3) має 2π -періодичні розв'язки тільки в тому випадку, коли $\lambda = n^2$, n – ціле число. При такому λ характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 + n^2 = 0, \quad k = \pm in,$$

а загальний розв'язок (3) матиме вигляд:

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos \varphi + B_n \sin \varphi, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Для $n = 0$, отримаємо

$$\Phi_0''(\varphi) = 0,$$

$$\Phi_0'(\varphi) = C_0,$$

$$\Phi_0(\varphi) = C_0 \cdot \varphi + A_0.$$

З умови періодичності $\Phi(\varphi)$ виходить, що

$$C_0 = 0, \quad \Phi_0(\varphi) = A_0.$$

Отже,

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos \varphi + B_n \sin \varphi, n = 0, 1, 2, \dots.$$

В рівняння (4) замість λ підставимо n^2 і надамо функції $R(\rho)$ відповідний індекс n :

$$\rho^2 R_n''(\rho) + \rho \cdot R_n'(\rho) - n^2 R_n(\rho) = 0 \quad (5)$$

Це рівняння Ейлера, частинні розв'язки якого можна шукати вигляді

$$R_n(\rho) = \rho^k,$$

де $k = \text{const}$.

Підставимо в рівняння (5):

$$\rho^2 k(k-1)\rho^{k-2} + k \cdot \rho \cdot \rho^{k-1} - n^2 \rho^k = 0,$$

або

$$\rho^k [k(k-1) + k - n^2] = 0.$$

Звідси

$$k = \pm n.$$

Тоді $R_{n_1} = \rho^n$, $R_{n_2} = \rho^{-n}$ – частинні лінійно незалежні розв'язки рівняння (5), а загальний розв'язок рівняння (5) матиме вигляд:

$$R_n(\rho) = C_n \rho^n + D_n \cdot \rho^{-n}.$$

При $n = 0$ рівняння для $R(\rho)$ має вигляд:

$$\rho^2 R_0''(\rho) + \rho R_0'(\rho) = 0.$$

Нехай

$$R_0'(\rho) = z(\rho),$$

тоді

$$R_0''(\rho) = z'$$

і отримаємо рівняння:

$$\rho z' + z = 0.$$

Розділивши змінні, отримаємо:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{d\rho}{\rho};$$

$$\ln|z| = -\ln|p| + \ln|C_1|;$$

$$z = \frac{C_1}{\rho};$$

$$\frac{dR_0}{d\rho} = \frac{C_1}{\rho};$$

$$dR_0 = \frac{C_1}{\rho} d\rho;$$

$$R_0 = C_1 \ln|\rho| + C_2.$$

В силу узагальненого принципу суперпозиції всі 2π -періодичні по змінній φ розв'язки рівняння Лапласа містяться в формулі:

$$u(\rho, \varphi) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho, \varphi),$$

або

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) = M_0 \ln \rho + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$M_0 = A_0 C; \quad N_0 = A_0 C_2;$$

$$M_n = A_n C_n; \quad N_n = B_n C_n; \quad P_n = A_n D_n; \quad Q_n = B_n D_n.$$

Згідно умови неперервності функції $u(\rho, \varphi)$ всередині області необхідно покласти в (6) $M_0 = 0, P_n = 0, Q_n = 0$. Таким чином розв'язок внутрішньої задачі Діріхле потрібно шукати у вигляді ряду:

$$u(\rho, \varphi) = N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi). \quad (7)$$

Для зовнішньої задачі слід покласти в (6) $M_0 = 0, M_n = 0, N_n = 0$, оскільки в протилежному випадку розв'язок не буде обмежений на нескінченності. Тоді:

$$u(\rho, \varphi) = N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi). \quad (8)$$

Ряди (7) і (8) – формальні розв’язки рівняння Лапласа. Підберемо коефіцієнти N_0, M_n, N_n, P_n, Q_n так, щоб у відповідних задачах Діріхле виконувались граничні умови. Покладемо в (7) $\rho = a$:

$$u(a, \varphi) = N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) \quad (9)$$

Нехай функція $f(\varphi)$ розкладається в ряд Фур’є:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (10)$$

де

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad (11)$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$. Порівнюючи ряди (9) і (10) знаходимо M_0, M_n, N_n :

$$M_0 = \frac{a_0}{2}, \quad M_n = \frac{a_n}{a^n}; \quad N_n = \frac{b_n}{a^n}.$$

Таким чином розв’язок (формальний) внутрішньої задачі Діріхле для кола має вигляд:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (12)$$

де a_n, b_n знаходимо (11).

Аналогічно (формальний) розв’язок зовнішньої задачі для кола запишеться у вигляді:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (13)$$

де a_n, b_n знаходимо за формулами (11).

Ряди (12) і (13) збігаються і допускають по-членне диференціювання, а функція $u(\rho, \varphi)$ є неперервною на межі кола. З вищесказаного слідує, що ряд (12) (або (13)) є розв’язком внутрішньої (або зовнішньої) задачі Діріхле.

Приклад. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа в колі вказаного радіуса:

$$а) \begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 4 \\ u|_{x^2+y^2=4} = x^2 \end{cases}.$$

Розв'язання:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow u(r, \varphi)|_{r=2} = r^2 \cos^2 \varphi|_{r=2} \Rightarrow u(2, \varphi) = 4 \cos^2 \varphi.$$

$$u(r, \varphi) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi);$$

$$4 \cos^2 \varphi = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi);$$

$$2 + 2 \cos 2\varphi = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi);$$

$$M_0 = 2; \quad N_n = 0, \quad \forall n;$$

$$M_n = 0, \quad \forall n \neq 2;$$

$$2 = 2^2 M_2 \Rightarrow M_2 = \frac{1}{2}.$$

Відповідь:

$$u(r, \varphi) = 2 + \frac{1}{2} r^2 \cos 2\varphi.$$

$$б) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, & r < 3 \\ u|_{r=3} = \sin 3\varphi \cdot \cos 4\varphi \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\sin^3 \varphi \cdot \cos 4\varphi = \frac{1}{2} \sin 7\varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi;$$

$$u(3, \varphi) = \frac{1}{2} \sin 7\varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi;$$

$$u(r, \varphi) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi);$$

$$\frac{1}{2} \sin 7\varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi);$$

$$M_0 = 0; \quad M_n = 0; \quad \forall n;$$

$$N_n = 0, \quad \forall n \neq 1, 7;$$

$$-\frac{1}{2} = 3N_1 \Rightarrow N_1 = -\frac{1}{6};$$

$$\frac{1}{2} = 3^7 N_7 \Rightarrow N_7 = \frac{1}{2 \cdot 3^7}.$$

Відповідь:

$$u(r, \varphi) = -\frac{1}{6} r \sin \varphi + \frac{1}{2 \cdot 3^7} r^7 \sin 7\varphi.$$

Приклад. Знайти розв'язок зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в колі вказаного радіуса:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, r > 9 \\ u(9, \varphi) = 5 \sin^2 \varphi + 6 \sin^2 \varphi \cos 3\varphi \end{cases}$$

Розв'язання:

Оскільки задача зовнішня, то:

$$u(r, \varphi) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi).$$

$$5 \sin^2 \varphi + 6 \sin^2 \varphi \cos 3\varphi = \frac{5}{2} (1 - \cos 2\varphi) + 3(1 - \cos 2\varphi) \cos 3\varphi =$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cos 2\varphi + 3 \cos 3\varphi - 3 \cos 2\varphi \cos 3\varphi =$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cos 2\varphi + 3 \cos 3\varphi - \frac{3}{2} \cos 5\varphi - \frac{3}{2} \cos \varphi.$$

$$u(9, \varphi) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos \varphi - \frac{5}{2} \cos 2\varphi + 3 \cos 3\varphi - \frac{3}{2} \cos 5\varphi;$$

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos \varphi - \frac{5}{2} \cos 2\varphi + 3 \cos 3\varphi - \frac{3}{2} \cos 5\varphi =$$

$$= M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi).$$

$$M_0 = \frac{5}{2}, \quad Q_n = 0, \quad \forall n;$$

$$P_n = 0, \quad \forall n \neq 1, 2, 3, 5.$$

$$n=1 \quad -\frac{3}{2} = 9^{-1} \cdot P_1; \quad P_1 = -\frac{27}{2};$$

$$n=2 \quad -\frac{5}{2} = 9^{-2} \cdot P_2; \quad P_2 = -\frac{81 \cdot 5}{2} = -\frac{405}{2};$$

$$n=3 \quad 3 = 9^{-3} \cdot P_3; \quad P_3 = 3 \cdot 9^3 = 2187;$$

$$n=5 \quad -\frac{3}{2} = 9^{-5} \cdot P_5; \quad P_5 = -1,5 \cdot 9^5 = 88573,5.$$

Відповідь:

$$u(r, \varphi) = \frac{5}{2} - \frac{27}{2r} \cos \varphi - \frac{405}{2r^2} \cos 2\varphi + \frac{2187}{r^3} \cos 3\varphi - \frac{88573,5}{\mu^5} \cos 5\varphi$$

$$б) \begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = xy \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow u(r, \varphi) = r^2 \cos \varphi \sin \varphi.$$

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow u(1, \varphi) = \cos \varphi \sin \varphi;$$

$$u(1, \varphi) = \frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

Оскільки задача зовнішня, то:

$$u(r, \varphi) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi);$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\varphi = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 1^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi);$$

$$M_0 = 0; \quad P_n = 0; \quad \forall n;$$

$$Q_n = 0, n \neq 2.$$

$$n=2 \quad \frac{1}{2} = 1^{-2} \cdot Q_2; \quad Q_2 = \frac{1}{2}.$$

Відповідь:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2r^2} \sin 2\varphi.$$

Варіанти вправ для самоконтролю.

1. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа в колі вказаного радіусу:

Варіант	а)	б)
1	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < a^2 \\ u _{x^2+y^2=a^2} = x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 2 \\ u _{\rho=2} = \cos^3 \varphi \cdot \cos 5\varphi \end{cases}$
2	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 9 \\ u _{x^2+y^2=9} = y \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 2 \\ u _{\rho=2} = 1 + \cos^3 \varphi \cdot \sin^4 \varphi \end{cases}$
3	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 4 \\ u _{x^2+y^2=4} = 2 + 3x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 3 \\ u _{\rho=3} = \cos^3 \varphi \cdot \sin^5 \varphi \end{cases}$
4	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 16 \\ u _{x^2+y^2=16} = 5xy \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 2 \\ u _{\rho=2} = 2 \cos \varphi - \sin^3 4\varphi \cdot \cos \varphi \end{cases}$
5	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ u _{x^2+y^2=1} = \frac{1}{2}xy - x^2 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < R \\ u _{\rho=R} = 3\sin^3 \varphi - 2 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ u _{x^2+y^2=1} = x^2 + 2y \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 2 \\ u _{\rho=2} = 2 + \frac{1}{2} \cos^2 5\varphi \cdot \sin 3\varphi \end{cases}$
7	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 4 \\ u _{x^2+y^2=4} = 4x^2 + 6x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 3 \\ u _{\rho=3} = \cos^4 \varphi \cdot \sin 2\varphi \end{cases}$

8	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 25 \\ u _{x^2+y^2=25} = 5x - 6y^3 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 1 \\ u _{\rho=1} = \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \cos 3\varphi \end{cases}$
9	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 9 \\ u _{x^2+y^2=9} = x^3 - xy^2 + 3y \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 1 \\ u _{\rho=1} = \sin 3\varphi \cdot \cos 4\varphi \end{cases}$
10	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ u _{x^2+y^2=1} = 5x^2 + 4y^2 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 1 \\ u _{\rho=1} = \cos 3\varphi + \cos^2 \varphi \cdot \sin 3\varphi \end{cases}$

2. Розв'язати зовнішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі вказаного радіусу:

Варіант	а)	б)
1	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho > 5 \\ u(5, \varphi) = \sin^3 \varphi + 5 \sin \varphi \cos 3\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > R^2 \\ u _{x^2+y^2=R^2} = A + By \end{cases}$
2	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho > 3 \\ u(3, \varphi) = \sin 5\varphi \cos \varphi + 3 \sin^2 \varphi \cos 2\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > 1 \\ u _{x^2+y^2=1} = 2x \end{cases}$
3	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho > 4 \\ u(4, \varphi) = \sin 7\varphi \cos 3\varphi - \cos^3 \varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > 1 \\ u _{x^2+y^2=1} = y - 1 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho > 5 \\ u(5, \varphi) = \cos 4\varphi \sin^2 \varphi - \sin^3 \varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > 4 \\ u _{x^2+y^2=4} = 2x - 3y \end{cases}$
5	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho > 1 \\ u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \cos 2\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > 4 \\ u _{x^2+y^2=4} = \frac{1}{2} + x \end{cases}$
6	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho > 5 \\ u(5, \varphi) = \cos^3 \varphi - 2 \sin 2\varphi \cos 3\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > 9 \\ u _{x^2+y^2=9} = y^2 \end{cases}$

7	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho > 3 \\ u(3, \varphi) = \sin 7\varphi \cos \varphi - 5 \sin 3\varphi \cos 2\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > 1 \\ u _{x^2+y^2=1} = 6 - y \end{cases}$
8	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho > 6 \\ u(6, \varphi) = \sin \varphi \cos 6\varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > 1 \\ u _{x^2+y^2=1} = 2x + y \end{cases}$
9	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho > 2 \\ u(2, \varphi) = 5 \sin 6\varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > 1 \\ u _{x^2+y^2=1} = 2x^2 \end{cases}$
10	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho > 4 \\ u(4, \varphi) = 2 \sin^2 \varphi \cos 4\varphi - \cos^2 \varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 > 1 \\ u _{x^2+y^2=1} = 1 - 2y \end{cases}$

Задача Неймана для кола.

Постановка. Потрібно знайти функцію $u(x, y)$, яка задовольняє всередині кола (або поза колом) k рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0$$

і на межі Γ умову

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f(x, y),$$

де $\frac{\partial u}{\partial n}$ – похідна за напрямом зовнішньої нормалі до Γ ; $f(x, y)$ – функція, задана на Γ (Γ – коло $x^2 + y^2 = a^2$).

Для того, щоб розв’язок задачі існував, був єдиним і неперервно залежав від початкових даних, повинні виконуватись наступні умови:

- 1) $u(x, y)$ – неперервна всередині кола і на межу (для зовнішньої задачі – поза колом);
- 2) $u(x, y)$ має неперервні другі похідні, які задовольняють рівняння Лапласа всередині (поза) кола;
- 3) на межі Γ $u(x, y)$ задовольняє граничній умові;
- 4) функція $f(x, y)$ повинна задовольняти умові

$$\int_{\Gamma} f(x, y) \partial \gamma = 0$$

(це слідує з властивостей гармонічних функцій $\iint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} \partial \sigma = 0$).

Розв'язок задачі Неймана єдиний з точністю до довільної сталої. Розв'язок

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

задачі Неймана для кола знаходимо методом розділення змінних, повторюючи всі міркування, зроблені для задачі Діріхле. В результаті отримаємо формулу:

$$u(\rho, \varphi) = M_0 \ln \rho + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi). \quad (1)$$

Гранична умова

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f(\varphi)$$

у випадку внутрішньої задачі матиме вигляд:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\Gamma} = f(\varphi), \quad (2)$$

а для зовнішньої:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = - \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\Gamma} = f(\varphi) \quad (3)$$

Із (1) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{M_0}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-n) \rho^{-n-1} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Для внутрішньої задачі з урахуванням неперервності розв'язку маємо:

$$u(\rho, \varphi) = N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi).$$

Задовільнимо умову (2), попередньо розклавши функцію $f(\varphi)$ в ряд Фур'є:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

де

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n \varphi \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n \varphi \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Звідси

$$M_n = \frac{a_n}{n a^{n-1}}, \quad N_n = \frac{b_n}{n a^{n-1}}.$$

Підставляючи отримані коефіцієнти в формулу (4), отримаємо (формальний) розв'язок внутрішньої задачі Неймана

$$u(\rho, \varphi) = N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n a^{n-1}} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (5)$$

де N_0 залишається довільним.

Ряд (5) буде рівномірно збіжним, за умови, що $f(\varphi)$ двічі неперервно диференційована. Звідси слідує, що (5) – розв'язок внутрішньої задачі Неймана в колі.

Аналогічно, використовуючи умову (3) і неперервності та обмеженості $u(\rho, \varphi)$ поза колом (в (1) покладемо $M_0 = 0, M_n = 0, N_n = 0$) отримаємо розв'язок задачі для Неймана в колі

$$u(\rho, \varphi) = N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Приклад. Розв'язати внутрішню або зовнішню задачу Неймана для круга.

Перевірити задачі на коректність постановки.

$$a) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, & r < 3 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(3, \varphi) = \cos \varphi \cdot \sin 2\varphi \end{cases}.$$

Розв'язання:

Так, як задача внутрішня, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}(3, \varphi) &= \frac{\partial u}{\partial r}(3, \varphi), \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=3} &= \cos \varphi \cdot \sin 2\varphi = \frac{1}{2} \sin 3\varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Перевіримо необхідну умову:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot \sin 2\varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 3\varphi + \sin \varphi) \, d\varphi = -\frac{1}{2 \cdot 3} \cos 3\varphi \Big|_0^{2\pi} - \\ &= -\frac{1}{2} \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{6} (1 - 1) - \frac{1}{2} (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

$$u(r, \varphi) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi);$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi);$$

$$\frac{1}{2} \sin 3\varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} n 3^{n-1} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi);$$

$$M_n = 0, \quad \forall n;$$

$$N_n = 0, \quad \forall n \neq 1, 3.$$

$$n = 1: \quad \frac{1}{2} = 1 \cdot 3^0 N_1 \Rightarrow N_1 = \frac{1}{2};$$

$$n = 3: \quad \frac{1}{2} = 3 \cdot 3^2 N_3 \Rightarrow N_3 = \frac{1}{2 \cdot 27} = \frac{1}{54};$$

Відповідь:

$$u(r, \varphi) = M_0 + \frac{1}{2} r \sin \varphi + \frac{1}{54} r^3 \sin 3\varphi.$$

$$6) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 < 1 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x^2+y^2=1} = 2y^3 \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=1} = \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = 2r^3 (\sin \varphi)^3 \Big|_{r=1} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) = 2(\sin \varphi)^3 = \frac{1}{2} (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi).$$

Перевіримо необхідну умову:

$$\int_0^{2\pi} (2(\sin \varphi)^3) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi) d\varphi = 0.$$

$$u(r, \varphi) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi);$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi);$$

$$\frac{1}{2} (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n 1^{n-1} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi).$$

$$M_n = 0, \quad \forall n;$$

$$N_n = 0, \quad \forall n \neq 1, 3$$

$$n = 1: \quad \frac{3}{2} = 1 \cdot 1^0 N_1 \Rightarrow N_1 = \frac{3}{2};$$

$$n = 3: \quad -\frac{1}{2} = 3 \cdot 1^2 N_3 \Rightarrow N_3 = -\frac{1}{6}.$$

Відповідь:

$$u(r, \varphi) = M_0 + \frac{3}{2}r \sin \varphi - \frac{1}{6}r^3 \sin 3\varphi.$$

$$\text{В)} \begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 > 4 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x^2+y^2=4} = 5y \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=2} = - \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = -5r \sin \varphi|_{r=2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(2, \varphi) = -10 \sin \varphi.$$

Перевіримо необхідну умову:

$$\int_0^{2\pi} (-10 \sin \varphi) d\varphi = -10 \cos \varphi|_0^{2\pi} = -10(1 - 1) = 0.$$

$$u(r, \varphi) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi);$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)r^{-n-1} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi);$$

$$-10 \sin \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)2^{-n-1} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi).$$

$$P_n = 0, \quad \forall n;$$

$$Q_n = 0, \quad \forall n \neq 1.$$

$$n = 1: \quad -10 = -1 \cdot 2^{-2} Q_1 \Rightarrow Q_1 = -\frac{10 \cdot 2^2}{-1} = 40.$$

Відповідь:

$$u(r, \varphi) = M_0 + 40 \frac{1}{r} \sin \varphi.$$

Варіанти вправ для самоконтролю.

1. Розв'язати внутрішню задачу Неймана для рівняння Лапласа в крузі вказаного радіусу. Відмітити некоректно поставлені задачі.

Варіант	а)	б)
1	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(1, \varphi) = \sin 5\varphi \sin 3\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 4 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=4} = -\frac{1}{2}x^2y \end{cases}$
2	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(1, \varphi) = \cos 2\varphi - 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 4 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=4} = xy^2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 3 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(3, \varphi) = \sin^2 \varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = x^2y + y^3x \end{cases}$
4	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(1, \varphi) = \sin 5\varphi \cos \varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = x^2 + y - \frac{1}{2} \end{cases}$
5	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 2 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(2, \varphi) = \cos 5\varphi \cos \varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = x^3y \end{cases}$
6	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 3 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(3, \varphi) = \sin 4\varphi \cos 2\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = x^4y^2 - \frac{1}{16} \end{cases}$
7	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(1, \varphi) = \cos 8\varphi \sin \varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 4 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=4} = y^3 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 2 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(2, \varphi) = 2 \cos \varphi \sin 3\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = x^4 - \frac{3}{8} \end{cases}$

9	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 4 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(4, \varphi) = \cos 5\varphi \sin 3\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = y^4 - \frac{3}{8} \end{cases}$
10	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \rho < 6 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(6, \varphi) = \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \sin 3\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = x^5 \end{cases}$

2. Перевіряючи на коректність, розв'яжіть зовнішню задачу Неймана для рівняння Лапласа в крузі вказаного радіусу:

Варіант		Варіант	
1	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = 2x \end{cases}$	6	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 4 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=4} = y^3 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 9 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=9} = x^2 - y^2 \end{cases}$	7	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 9 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=9} = 5 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = 2y - y^3 \end{cases}$	8	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = x - 2y \end{cases}$
4	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = 2x^2 \end{cases}$	9	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=1} = y - 1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 4 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=4} = 3 - 2x^2 \end{cases}$	10	$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > 4 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big _{x^2+y^2=4} = xy \end{cases}$

Крайові задачі для кільця.

Задача Діріхле.

Постановка. Потрібно знайти функцію $u(x, y)$, гармонічну в кільці $k: r^2 < x^2 + y^2 < R^2$, неперервну в відповідній замкненій області і яка приймає на межі $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ задані значення:

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_1} &= u(x, y)|_{x^2+y^2=r^2} = f_1(x, y), \\ u|_{\Gamma_2} &= u(x, y)|_{x^2+y^2=R^2} = f_2(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Розв'язок цієї задачі шукатимемо також за допомогою метода Фур'є (аналогічно задачі Діріхле для кола) за формулою:

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= M_0 \ln \rho + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Нехай функції f_1 і f_2 із граничних умов (1) після переходу в них до полярних координат розкладаються в рівномірно збіжні ряди Фур'є:

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \\ f_2(\varphi) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Знаходимо коефіцієнти ряду (2) так, щоб він задовольняв граничним умовам (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 \ln r + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((M_n r^n + P_n r^{-n}) \cos n \varphi + (N_n r^n + Q_n r^{-n}) \sin n \varphi) = \\ \quad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \varphi + b_n \sin n \varphi) \\ M_0 \ln R + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((M_n R^n + P_n R^{-n}) \cos n \varphi + (N_n R^n + Q_n R^{-n}) \sin n \varphi) = \\ \quad = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n \varphi + B_n \sin n \varphi) \end{array} \right.$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\cos n \varphi$ і $\sin n \varphi$ отримаємо систему рівнянь для визначення $M_0, N_0, M_n, N_n, P_n, Q_n$:

$$\begin{cases} M_0 \ln r + N_0 = \frac{a_0}{2} \\ M_0 \ln R + N_0 = \frac{A_0}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} M_n r^n + P_n r^{-n} = a_n \\ M_n R^n + P_n R^{-n} = A_n \end{cases} \quad \begin{cases} N_n r^n + Q_n r^{-n} = b_n \\ N_n R^n + Q_n R^{-n} = B_n \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи знаходимо:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{A_0 - a_0}{2(\ln R - \ln r)}, & M_n &= \frac{A_n r^{-n} - a_n R^{-n}}{R^n r^{-n} - R^{-n} r^n}, & N_n &= \frac{B_n r^{-n} - b_n R^{-n}}{R^n r^{-n} - R^{-n} r^n} \\ N_0 &= \frac{a_0 \ln R - A_0 \ln r}{2(\ln R - \ln r)}, & P_n &= \frac{a_n R^n - A_n r^n}{R^n r^{-n} - R^{-n} r^n}, & Q_n &= \frac{b_n R^n - B_n r^n}{R^n r^{-n} - R^{-n} r^n}. \end{aligned}$$

Далі підставляємо отримані коефіцієнти ($const$) в (2) і отримаємо ряд, який задовольняє граничним умовам (1):

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{A_0 - a_0}{2(\ln R - \ln r)} \ln \rho + \frac{a_0 \ln R - A_0 \ln r}{2(\ln R - \ln r)} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^n r^{-n} - R^{-n} r^n} ((\rho^n (A_n r^{-n} - a_n R^{-n}) - \rho^{-n} (A_n r^n - \\ &- a_n R^n)) \cos n \varphi + ((\rho^n (B_n r^{-n} - b_n R^{-n}) - \\ &- \rho^{-n} (B_n r^n - b_n R^n)) \sin n \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Коефіцієнти a_n, b_n, A_n, B_n обчислюються за формулами:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, n = 0, 1, \dots;$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, n = 0, 1, \dots;$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, n = 1, 2, \dots.$$

Задача Неймана

Постановка. Потрібно знайти функцію $u(x, y)$, гармонічну в кільці $k: r^2 < x^2 + y^2 < R^2$, неперервну в відповідній замкненій області і яка задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} &= u(x, y)|_{x^2+y^2=r^2} = f_1(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} &= u(x, y)|_{x^2+y^2=R^2} = f_2(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

де n – напрямок зовнішньої нормалі по відношенню до межі області.

Як і для задачі Діріхле розв'язок шукатимемо у вигляді (2). Із формули (2) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{M_0}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-n) \rho^{-n-1} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi) \end{aligned}$$

Відмітимо, що

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = - \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\Gamma_1} = f_1(\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\Gamma_2} = f_2(\varphi) \quad (5)$$

Використовуючи граничні умови (5), попередньо розклавши $f_1(\varphi)$ і $f_2(\varphi)$ у ряди Фур'є отримаємо систему для визначення коефіцієнтів:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{M_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-n) r^{-n-1} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi) &= \\ &= \frac{-a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \\ \frac{M_0}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-n) R^{-n-1} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi) &= \\ &= \frac{-a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \end{aligned} \right.$$

Необхідна умова існування розв'язку задачі Неймана:

$$r \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi = R \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi.$$

Із вищенаведеної системи знаходимо коефіцієнти (*const*) і підставляємо їх у формулу (2). Таким чином отримали розв'язок задачі Неймана для кільця.

Приклади. Розв'язати наступні крайові задачі для рівняння Лапласа в кільці:

$$\text{а) } \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} &= 0 \\ u(a, \varphi) &= 0 \\ u(b, \varphi) &= 16 \cos^2 \varphi \\ a &< b \end{aligned} \right.$$

Розв'язання: розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= M_0 \ln \rho + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi). \end{aligned}$$

$$16 \cos^2 \varphi = \frac{16}{2} (1 + \cos 2\varphi) = 8 + 8 \cos 2\varphi;$$

$$u(b, \varphi) = 8 + 8 \cos 2\varphi.$$

$$u(a, \varphi) = M_0 \ln a + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi),$$

$$u(b, \varphi) = M_0 \ln b + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi).$$

Записуємо систему для визначення коефіцієнтів:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = M_0 \ln a + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi) \\ 8 + 8 \cos 2\varphi = M_0 \ln b + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} N_0 + M_0 \ln a = 0 \\ N_0 + M_0 \ln b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_0 = -M_0 \ln a \\ M_0 (\ln b - \ln a) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_0 = -\frac{8 \ln a}{\ln b - \ln a} \\ M_0 = \frac{8}{\ln b - \ln a} \end{cases}$$

$$P_n, M_n = 0, \quad \forall n \neq 2,$$

$$N_n, Q_n = 0 \quad \forall n.$$

$\cos 2\varphi$:

$$\begin{cases} M_2 a^2 + P_2 a^{-2} = 0 \\ n_2 b^2 + P_2 b^{-2} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2 a^{-2} = -M_2 a^2 \\ P_2 = -M_2 a^4 \end{cases}$$

$$M_2 b^2 - M_2 b^{-2} a^4 = 8 \Rightarrow M_2 = \frac{8}{b^2 - b^{-2} a^4}, \quad P_2 = \frac{-8 a^4}{b^2 - b^{-2} a^4}.$$

Відповідь:

$$u(\rho, \varphi) = -\frac{8 \ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{8 \ln \rho}{\ln b - \ln a} + \frac{8\rho^2 \cos 2\varphi}{b^2 - b^{-2}a^4} - \frac{8a^2\rho^{-2} \cos 2\varphi}{a^{-2}b^2 - b^{-2}a^2}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(1, \varphi) = \cos^2 3\varphi \cdot \sin 5\varphi \\ u(2, \varphi) = \cos^3 2\varphi \end{cases}$$

Розв'язання: розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$u(\rho, \varphi) = M_0 \ln \rho + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi).$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\rho=1} = - \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \cos^2 3\varphi \cdot \sin 5\varphi ;$$

$$\cos^2 3\varphi \cdot \sin 5\varphi = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6\varphi \right) \sin 5\varphi = \frac{1}{2} \sin 5\varphi + \frac{1}{2} \cos 6\varphi \cdot \sin 5\varphi = \\ = \frac{1}{2} \sin 5\varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 11\varphi ;$$

$$\cos^3 2\varphi = \frac{1}{4} \cos 6\varphi + \frac{3}{4} \cos 2\varphi.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{M_0}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-n) \rho^{-n-1} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi) ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}(1, \varphi) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-n) (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi) ;$$

$$u(2, \varphi) = M_0 \ln 2 + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi);$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 5\varphi - \frac{1}{4} \sin 11\varphi = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-n) (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi) \\ \frac{1}{4} \cos 6\varphi + \frac{3}{4} \cos 2\varphi = M_0 \ln 2 + N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) + \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ N_0 + M_0 \ln 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_0 = 0 \\ N_0 = 0 \end{cases}.$$

$$P_n, M_n = 0 \quad \forall n \neq 2, 6$$

$$Q_n, N_n = 0 \quad \forall n \neq 1, 5, 11$$

$$\cos 2\varphi: \begin{cases} 2M_2 - 2P_2 = 0 \\ 4M_2 + \frac{1}{4}P_2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_2 = P_2 \\ P_2 = \frac{3}{17} \end{cases} \quad \begin{cases} 4P_2 + \frac{1}{4}P_2 = \frac{3}{4} \\ M_2 = \frac{3}{17} \end{cases};$$

$$\cos 6\varphi: \begin{cases} 6M_6 - 6P_6 = 0 \\ 2^6 M_6 + \frac{1}{2^6} P_6 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_6 = P_6 \\ P_6 = \frac{1}{4(2^6 + 2^{-6})} \end{cases} \quad M_6 = \frac{1}{4(2^6 + 2^{-6})};$$

$$\sin \varphi: \begin{cases} N_1 - Q_1 = \frac{1}{4} \\ 2N_1 + \frac{1}{2}Q_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = Q_1 + \frac{1}{4} \\ Q_1 = -\frac{1}{5} \end{cases} \quad N_1 = -\frac{1}{20};$$

$$\sin 5\varphi: \begin{cases} 5N_5 - 5Q_5 = -\frac{1}{2} \\ 2^5 N_5 + \frac{1}{2^5} Q_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_5 = Q_5 - \frac{1}{10} \\ N_5 = -2^{10} Q_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_5 = \frac{-2^{10}}{10(1 + 2^{-10})} \\ Q_5 = \frac{1}{10(1 + 2^{-10})} \end{cases};$$

$$\sin 11\varphi: \begin{cases} 11N_{11} - 11Q_{11} = -\frac{1}{4} \\ 2^{11}N_{11} + \frac{1}{2^{11}}Q_{11} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} N_{11} = \frac{2^{11}}{44(2^{11} + 2^{-11})} \\ Q_{11} = \frac{-2^{11}}{44(2^{11} + 2^{-11})} \end{matrix}.$$

Відповідь:

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) = & \frac{\rho}{20} \sin \varphi - \frac{1}{5\rho} \sin \varphi + \frac{3}{17} \rho^2 \cos 2\varphi + \frac{3}{17} \rho^{-2} \cos 2\varphi - \\ & - \frac{2^{-10} \rho^5 \sin 5\varphi}{10(1 + 2^{-10})} + \frac{\rho^{-5} \sin 5\varphi}{10(1 + 2^{-10})} + \frac{\rho^6 \cos 6\varphi}{4(2^6 - 2^{-6})} + \frac{\rho^{-6} \cos 6\varphi}{4(2^6 - 2^{-6})} - \\ & - \frac{2^{-11} \rho^{11} \sin 11\varphi}{44(2^{11} + 2^{-11})} + \frac{2^{11} \rho^{-11} \sin 11\varphi}{44(2^{11} + 2^{-11})}. \end{aligned}$$

Варіанти вправ для самоконтролю.

Розв'язати крайову задачу для рівняння Лапласа в кільці:

Варіант		Варіант	
1	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ u(1, \varphi) = 1 + \cos^2 \varphi, \\ u(2, \varphi) = \sin^2 \varphi. \end{cases}$	6	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(3, \varphi) = \cos 2\varphi \cdot \sin^2 3\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(4, \varphi) = 2 - \sin 5\varphi \cdot \cos 3\varphi. \end{cases}$
2	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(1, \varphi) = \cos 3\varphi \cdot \sin^2 \varphi, \\ u(2, \varphi) = 1 + \cos 5\varphi. \end{cases}$	7	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(1, \varphi) = \cos \varphi \cdot \sin^3 2\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(2, \varphi) = (\sin 2\varphi + \cos \varphi)^2 - 1. \end{cases}$
3	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(1, \varphi) = \cos 3\varphi \cdot \cos^2 4\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(2, \varphi) = \sin^3 3\varphi. \end{cases}$	8	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(a, \varphi) = 2\cos \varphi, \\ u(b, \varphi) = 1 + \sin 2\varphi. \end{cases}$
4	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ u(1, \varphi) = \sin^4 2\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(2, \varphi) = \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 3\varphi - \frac{1}{4}. \end{cases}$	9	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(a, \varphi) = \cos \varphi, \\ u(b, \varphi) = 2 + 3\sin 2\varphi. \end{cases}$
5	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(1, \varphi) = \cos 2\varphi \cdot \sin^3 \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(2, \varphi) = \sin \varphi \cdot \cos 5\varphi. \end{cases}$	10	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ u(1, \varphi) = \cos 2\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(2, \varphi) = 1 - \sin \varphi. \end{cases}$

Крайові задачі для сектора.

1. Постановка задачі: потрібно знайти розв'язок рівняння Лапласа всередині кругового сектора $0 < \rho < a$, $0 < \varphi < \alpha$, який задовольняє визначеним умовам

$$u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, \alpha) = 0, \quad u(a, \varphi) = f(\varphi).$$

Рівняння Лапласа в полярних координатах має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

або

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

Розв'язок $u(\rho, \varphi)$ шукаємо в вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної:

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi). \quad (2)$$

Отже, підставляючи (2) в (1) і враховуючи, що

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = R'(\rho)\Phi(\varphi), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = R''(\rho)\Phi(\varphi), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = R(\rho)\Phi''(\varphi).$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho^2 R''(\rho)\Phi(\varphi) + \rho R'(\rho)\Phi(\varphi) + R(\rho)\Phi''(\varphi) &= 0; \\ \Phi(\varphi)[\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)] + R(\rho)\Phi''(\varphi) &= 0; \\ \frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} &= -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}; \\ \frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} &= -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = C \quad (C = \text{const}) \end{aligned} \quad (3)$$

Із (3) отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - C R(\rho) &= 0, \\ \Phi''(\varphi) + C \Phi(\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Враховуємо граничні умови для $\varphi = 0$ і $\varphi = \alpha$. В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} u(\rho, 0) &= R(\rho)\Phi(0) = 0 \Rightarrow \Phi(0) = 0; \\ u(\rho, \alpha) &= R(\rho)\Phi(\alpha) = 0 \Rightarrow \Phi(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Підсумовуючи вище наведене отримаємо крайову задачу, а, точніше, задачу Штурма-Ліувіля:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + C\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \\ \Phi(\alpha) = 0 \end{cases}.$$

Тут рівняння – рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Отже, нехай

$$\Phi = e^{\varphi\lambda}: \lambda^2 e^{\varphi\lambda} + C e^{\varphi\lambda} = 0 \Rightarrow e^{\varphi\lambda}(\lambda^2 + C) = 0 \Rightarrow \\ \lambda^2 = -C \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{C}.$$

Таким чином

$$\Phi(\varphi) = \widetilde{C}_1 e^{i\sqrt{C}} + \widetilde{C}_2 e^{-i\sqrt{C}}$$

або

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos \sqrt{C}\varphi + C_2 \sin \sqrt{C}\varphi.$$

Знайдемо коефіцієнти C_1 і C_2 :

$$\Phi(0) = C_1 = 0;$$

$$\Phi(\alpha) = C_2 \sin \sqrt{C}\alpha = 0 \quad (C_2 \neq 0);$$

$$\sin \sqrt{C}\alpha = 0 \Rightarrow \sqrt{C}\alpha = \pi k;$$

$$C = \left(\frac{\pi k}{\alpha}\right)^2 - \text{власне значення.}$$

$$\Phi(\varphi) = C_2 \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha},$$

тоді для $C_2 = 1$ отримаємо, що

$$\Phi_k = \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha}. \quad (4)$$

Перейдемо тепер до функції R для цього розглянемо рівняння:

$$\rho^2 R_k'' + \rho R_k' - \left(\frac{\pi k}{\alpha}\right)^2 R_k = 0.$$

Нехай

$$R_k = \rho^m \Rightarrow (m-1)m\rho^{m-2}\rho^2 + m\rho\rho^{m-1} - \left(\frac{\pi k}{\alpha}\right)^2 \rho^m = 0;$$

$$m^2 = \left(\frac{\pi k}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow m = \pm \frac{\pi k}{\alpha} \Rightarrow$$

$$R_k = M_k \rho^{\frac{\pi k}{\alpha}} + N_k \rho^{-\frac{\pi k}{\alpha}}. \quad (5)$$

Враховуючи (4) і (5), отримаємо:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_k \rho^{\frac{\pi k}{\alpha}} + N_k \rho^{-\frac{\pi k}{\alpha}} \right) \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha}.$$

В силу неперервності $N_k = 0$, отримаємо

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \rho^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha}.$$

Коефіцієнт M_k знаходимо використовуючи граничну умову для $\rho = a$, тобто

$$u(a, \varphi) = f(\varphi) \Rightarrow$$

$$u(a, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k a^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha}. \quad (6)$$

Розкладемо функцію $f(\varphi)$ по \sin :

$$f(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha}; \quad b_k = \int_0^{\alpha} f(\varphi) \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi; \quad k = 1, 2, \dots$$

і прирівняємо до (6). В результаті отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k a^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha}$$

Звідси:

$$M_k a^{\frac{\pi k}{\alpha}} = b_k \Rightarrow M_k = b_k a^{-\frac{\pi k}{\alpha}}.$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k a^{-\frac{\pi k}{\alpha}} \rho^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha}.$$

2. Постановка задачі: потрібно знайти розв'язок рівняння Лапласа всередині кругового сектора $0 < \rho < a$, $0 < \varphi < \alpha$, який задовольняє граничним умовам:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{n_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r_1} = f(\varphi)$$

Необхідна умова існування розв'язку:

$$\int_0^\alpha f(\varphi) d\varphi = 0.$$

На промені $\varphi = 0$ маємо:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\varphi=0} &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\widehat{\vec{n}, Ox}) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\widehat{\vec{n}, Oy}) \right] \Big|_{\varphi=0} = \\ &= - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\varphi=0} = - \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{\varphi=0} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = \arctg \left(\frac{x}{y} \right) \end{array} \right\} = \\ &= - \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{x} \right) \Big|_{\varphi=0} = - \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \Big|_{\varphi=0}. \end{aligned}$$

Тоді перша гранична умова матиме вигляд:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0.$$

Тепер розглянемо випадок, коли $\varphi = \alpha$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\varphi=\alpha} &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\widehat{\vec{n}, Ox}) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\widehat{\vec{n}, Oy}) \right] \Big|_{\varphi=\alpha} = \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(90^\circ + \alpha) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\alpha) \right] \Big|_{\varphi=\alpha} = \\ &= \left[- \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \alpha \right] \Big|_{\varphi=\alpha} = \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial \rho} \left(- \frac{x \sin \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(- \frac{-y \sin \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right] \Big|_{\varphi=\alpha} = \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial \rho} (-\cos \varphi \sin \alpha + \cos \alpha \sin \varphi) + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(- \frac{\sin \varphi \sin \alpha}{\rho} + \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{\rho} \right) \right] \Big|_{\varphi=\alpha} = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Отже, на дузі $\varphi = \alpha$ маємо

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\alpha} = 0.$$

На дузі $\rho = a$ матимемо

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u(a, \varphi)}{\partial \rho}.$$

Таким чином граничні умови приймуть вигляд:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \frac{\partial u(\rho, 0)}{\partial \varphi} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\alpha} = \frac{\partial u(\rho, \alpha)}{\partial \varphi} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \frac{\partial u(a, \varphi)}{\partial \rho} f(\varphi).$$

Розв'язок шукаємо аналогічно, як і у першому випадку (методом розділення змінних). В результаті, загальний розв'язок матиме вигляд:

$$u(\rho, \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^{\frac{\pi k}{\alpha}} \cos \frac{\pi k \varphi}{\alpha},$$

де

$$a_k = \frac{2a^{1-\frac{\pi k}{\alpha}}}{\pi k} \int_0^{\alpha} f(\varphi) \cos \frac{\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi, \quad k = 1, 2, \dots$$

Аналогічно знаходимо загальні розв'язки змішаних задач.

Приклади. Розв'язати наступні крайові задачі для рівняння Лапласа в секторі $0 < \varphi < \alpha, 0 < \rho < a$:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ \frac{\partial u(\rho, 0)}{\partial \varphi} = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u(a, \varphi)}{\partial \varphi} = \cos \frac{\pi \varphi}{2\alpha} \end{cases}$$

Розв'язання:

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \Rightarrow$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \text{ або } \Phi(\rho^2 R'' + \rho R') = -R\Phi'' \Rightarrow$$

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = C \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' - C R = 0 \\ \Phi''(\varphi) + C \Phi(\varphi) = 0 \end{cases}.$$

1) Знаходимо функцію $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi''(\varphi) + C \Phi(\varphi) = 0.$$

Записуємо відповідні граничні умови для функції $\Phi(\varphi)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = R(\rho) \Phi'(\varphi)|_{\varphi=0} = R(\rho) \Phi'(0) = 0 \Rightarrow \Phi'(0) = 0;$$

аналогічно

$$R(\rho) \Phi(\alpha) = 0 \Rightarrow \Phi(\alpha) = 0.$$

В результаті отримаємо наступну задачу Штурма-Ліувіля:

$$\begin{cases} \Phi'' + C \Phi = 0 \\ \Phi(\alpha) = 0 \\ \Phi'(0) = 0 \end{cases}.$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{\varphi \lambda} \Rightarrow \lambda^2 + C = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \sqrt{C}; \\ \Phi(\varphi) &= C_1 \cos \sqrt{C} \varphi + C_2 \sin \sqrt{C} \varphi; \\ \Phi'(\varphi) &= -\sqrt{C} C_1 \sin \sqrt{C} \varphi + \sqrt{C} C_2 \cos \sqrt{C} \varphi. \end{aligned}$$

Знайдемо коефіцієнти C_1 і C_2 :

$$\begin{aligned} \Phi'(0) &= \sqrt{C} C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0; \\ \Phi(\alpha) &= C_1 \cos \sqrt{C} \alpha = 0 \Rightarrow C_1 \neq 0 \text{ і } \cos \sqrt{C} \alpha = 0; \\ \sqrt{C} \alpha &= \frac{\pi(2k+1)}{2} \Rightarrow \begin{cases} C_k = \left(\frac{\pi \varphi(2k+1)}{2\alpha} \right)^2 \\ \Phi_k = C_{1k} \cos \left(\frac{\pi \varphi(2k+1)}{2\alpha} \right) \end{cases} \end{aligned}$$

Нехай $C_{1k} = 1$, тоді власні функції матимуть вигляд;

$$\Phi_k = \cos \left(\frac{\pi \varphi(2k+1)}{2\alpha} \right).$$

2) Знаходимо функцію R_k :

$$\rho^2 R_k'' + \rho R_k' - \left(\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha} \right)^2 R_k = 0.$$

Нехай $R_k = \rho^m$, тоді

$$(m-1)m\rho^{m-2}\rho^2 + m\rho\rho^{m-1} - \left(\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}\right)^2\rho^m = 0,$$

$$m^2 = \left(\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}\right)^2 \Rightarrow m = \pm \frac{\pi(2k+1)}{2\alpha} \Rightarrow$$

$$R_k = M_k \rho^{\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}} + N_k \rho^{-\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}},$$

де $N_k = 0$ (в силу неперервності). Отже,

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \rho^{\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}} \cos\left(\frac{\pi(2k+1)\varphi}{2\alpha}\right);$$

$$\frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \frac{\pi(2k+1)}{2\alpha} \rho^{\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}-1} \cos\left(\frac{\pi(2k+1)\varphi}{2\alpha}\right);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k \frac{\pi(2k+1)}{2\alpha} a^{\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}-1} \cos\left(\frac{\pi(2k+1)\varphi}{2\alpha}\right) = \cos\left(\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\right);$$

$$M_k = 0 \quad \forall k \neq 0;$$

$$M_0 \frac{\pi}{2\alpha} a^{\frac{\pi}{2\alpha}-1} = 1 \Rightarrow M_0 = \frac{2\alpha}{\pi} a^{\frac{\pi-2\alpha}{2\alpha}}.$$

Відповідь:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{2\alpha}{\pi} a^{\frac{\pi-2\alpha}{2\alpha}} \rho^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos\left(\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\right).$$

$$б) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ u(a, \varphi) = \varphi \end{cases}$$

Розв'язання:

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \Rightarrow$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \text{ або } \Phi(\rho^2 R'' + \rho R') = -R\Phi'' \Rightarrow$$

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = C \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' - C R = 0 \\ \Phi''(\varphi) + C\Phi(\varphi) = 0 \end{cases}.$$

1) Знаходимо функцію $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi''(\varphi) + C\Phi(\varphi) = 0.$$

Записуємо відповідні граничні умови для функції $\Phi(\varphi)$:

$$u(\rho, 0) = R(\rho)\Phi(0) = 0 \Rightarrow \Phi(0) = 0;$$

$$u(\rho, \alpha) = R(\rho)\Phi(\alpha) = 0 \Rightarrow \Phi(\alpha) = 0.$$

В результаті отримаємо наступну задачу Штурма-Ліувіля:

$$\begin{cases} \Phi'' + C\Phi = 0 \\ \Phi(\alpha) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \end{cases}.$$

Розв'яжемо її:

$$\Phi = e^{\varphi\lambda} \Rightarrow \lambda^2 + C = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{C};$$

$$\Phi = C_1 \cos \sqrt{C}\varphi + C_2 \sin \sqrt{C}\varphi.$$

Знайдемо коефіцієнти C_1 і C_2 :

$$\Phi(\alpha) = C_1 = 0;$$

$$\Phi(\alpha) = C_2 \sin \sqrt{C}\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_2 \neq 0 \\ \sin \sqrt{C}\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{C}\alpha = \pi k \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_k = \left(\frac{\pi k}{\alpha}\right)^2 \\ \Phi_k(\varphi) = C_{2k} \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha} \end{cases}$$

Нехай $C_{2k} = 1$, тоді:

$$\Phi_k(\varphi) = \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha}.$$

2) Знаходимо функцію R_k :

$$\rho^2 R_k'' + \rho R_k' - \left(\frac{\pi k}{\alpha}\right)^2 R_k = 0.$$

Нехай $R_k = \rho^m$:

$$(m-1)m\rho^{m-2}\rho^2 + m\rho\rho^{m-1} - \left(\frac{\pi k}{\alpha}\right)^2 \rho^m = 0;$$

$$m^2 = \left(\frac{\pi k}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow m = \pm \frac{\pi k}{\alpha} \Rightarrow$$

$$R_k = M_k \rho^{\frac{\pi k}{\alpha}} + N_k \rho^{-\frac{\pi k}{\alpha}} \text{ (де } N_k = 0).$$

Тоді

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \rho^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha};$$

$$u(a, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k a^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha};$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha};$$

$$b_k = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \varphi \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi = \left\{ \begin{array}{l} u = \varphi \\ dv = \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha} \end{array} \quad \begin{array}{l} du = d\varphi \\ v = -\frac{\alpha}{\pi k} \cos \frac{\pi k \varphi}{\alpha} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\alpha} \left[\varphi \left(-\frac{\alpha}{\pi k} \cos \left(\frac{\pi k \varphi}{\alpha} \right) \right) \Big|_0^{\alpha} + \left(\frac{\alpha^2}{(\pi k)^2} \sin \left(\frac{\pi k \varphi}{\alpha} \right) \right) \Big|_0^{\alpha} \right] = \frac{2\alpha(-1)^{k+1}}{\pi k}.$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha(-1)^{k+1}}{\pi k} \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k a^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha} \Rightarrow$$

$$M_k a^{\frac{\pi k}{\alpha}} = b_k \Rightarrow M_k = b_k a^{-\frac{\pi k}{\alpha}}.$$

Відповідь:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha(-1)^{k+1}}{\pi k} a^{-\frac{\pi k}{\alpha}} \rho^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k \varphi}{\alpha}.$$

$$B) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u(\rho, \alpha)}{\partial \varphi} = 0 \\ u(1, \varphi) = \sin^2 \left(\frac{3\pi \varphi}{2\alpha} \right) \sin \left(\frac{5\pi \varphi}{2\alpha} \right) \end{array} \right.$$

Розв'язання:

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi) \Rightarrow$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \text{ або } \Phi(\rho^2 R'' + \rho R') = -R \Phi'' \Rightarrow$$

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = C \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' - C R = 0 \\ \Phi''(\varphi) + C\Phi(\varphi) = 0 \end{cases}.$$

1) Знаходимо функцію $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi''(\varphi) + C\Phi(\varphi) = 0.$$

Записуємо відповідні граничні умови для функції $\Phi(\varphi)$:

$$u(\rho, 0) = R(\rho)\Phi(0) = 0 \Rightarrow \Phi(0) = 0;$$

$$\frac{\partial u(\rho, \alpha)}{\partial \varphi} = R(\rho)\Phi'(\alpha) = 0 \Rightarrow \Phi'(\alpha) = 0.$$

В результаті отримаємо наступну задачу Штурма-Ліувіля:

$$\begin{cases} \Phi'' + C\Phi = 0 \\ \Phi(0) = 0 \\ \Phi'(\alpha) = 0 \end{cases}.$$

Розв'яжемо її:

$$\Phi = e^{\varphi\lambda} \Rightarrow \lambda^2 + C = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{C};$$

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos \sqrt{C}\varphi + C_2 \sin \sqrt{C}\varphi;$$

$$\Phi'(\varphi) = -\sqrt{C}C_1 \sin \sqrt{C}\varphi + \sqrt{C}C_2 \cos \sqrt{C}\varphi.$$

Знайдемо коефіцієнти C_1 і C_2 :

$$\Phi(0) = C_1 = 0;$$

$$\Phi'(\alpha) = \sqrt{C}C_2 \cos \sqrt{C}\alpha = 0 \Rightarrow C \neq 0 \text{ і } C_2 \neq 0,$$

а, отже,

$$\cos \sqrt{C}\alpha = 0 \Rightarrow \sqrt{C}\alpha = \frac{\pi(2k+1)}{2} \Rightarrow \begin{cases} C_k = \left(\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}\right)^2 \\ \Phi_k(\varphi) = C_{2k} \sin \frac{\pi(2k+1)\varphi}{2\alpha} \end{cases}.$$

Нехай $C_{2k} = 1$, тоді:

$$\Phi_k(\varphi) = \sin \frac{\pi(2k+1)\varphi}{2\alpha}.$$

2) Знаходимо функцію R_k :

$$\rho^2 R_k'' + \rho R_k' - \left(\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}\right)^2 R_k = 0.$$

Нехай $R_k = \rho^m$:

$$(m-1)m\rho^{m-2}\rho^2 + m\rho\rho^{m-1} - \left(\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}\right)^2 \rho^m = 0;$$

$$m^2 = \left(\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}\right)^2 \Rightarrow m = \pm \frac{\pi(2k+1)}{2\alpha} \Rightarrow$$

$$R_k = M_k \rho^{\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}} + N_k \rho^{-\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}} \quad (N_k = 0).$$

Тоді:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \rho^{\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha}} \sin\left(\frac{\pi(2k+1)\varphi}{2\alpha}\right).$$

$$\sin^2\left(\frac{3\pi\varphi}{2\alpha}\right) \sin\left(\frac{5\pi\varphi}{2\alpha}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{5\pi\varphi}{2\alpha}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{11\pi\varphi}{2\alpha}\right);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin\left(\frac{\pi(2k+1)\varphi}{2\alpha}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{5\pi\varphi}{2\alpha}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{11\pi\varphi}{2\alpha}\right);$$

$$M_k = 0 \quad \forall k \neq 0, 2, 5;$$

$$M_0 = 0,25; \quad M_{k2} = 0,5; \quad M_{k5} = -0,25.$$

Відповідь:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{4} \rho^{\frac{\pi}{2\alpha}} \sin\left(\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\right) + \frac{1}{2} \rho^{\frac{5\pi}{2\alpha}} \sin\left(\frac{5\pi\varphi}{2\alpha}\right) - \frac{1}{4} \rho^{\frac{11\pi}{2\alpha}} \sin\left(\frac{11\pi\varphi}{2\alpha}\right).$$

Варіанти вправ для самоконтролю.

Розв'язати наступні крайові задачі для рівняння Лапласа всередині сектора

$$0 < \varphi < \alpha, 0 < \rho < a.$$

Варіант 1	
$\text{a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ u(a, \varphi) = 2 \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} \end{array} \right.$	$\text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ u(a, \varphi) = \varphi^2 - 4\varphi \end{array} \right. ;$
$\text{в)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ u(1, \varphi) = 3 \left(\cos \frac{\pi \varphi}{\alpha} + \cos \frac{3\pi \varphi}{\alpha} \right)^2 \end{array} \right.$.
Варіант 2	
$\text{a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ u(a, \varphi) = 2\varphi \end{array} \right.$	$\text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \varphi) = 4 \sin \frac{3\pi \varphi}{2\alpha} + \sin \frac{7\pi \varphi}{2\alpha} \end{array} \right. ;$
$\text{в)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ u(1, \varphi) = \cos^2 \frac{\pi \varphi}{\alpha} \cos \frac{5\pi \varphi}{\alpha} ; \end{array} \right.$	

Варіант 3

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) &= 0 \\ u(\rho, \alpha) &= 0 \\ u(a, \varphi) &= 5\varphi \end{aligned} \right. ; \\
 \text{б)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) &= 0 \\ u(a, \varphi) &= 2 \cos \frac{5\pi\varphi}{\alpha} + \cos \frac{\pi\varphi}{\alpha} \end{aligned} \right. ; \text{в)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} &= 0 \\ u(\rho, 0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(1, \varphi) &= \sin^2 \frac{\pi\varphi}{2\alpha} \sin^3 \frac{3\pi\varphi}{2\alpha} \end{aligned} \right. .
 \end{aligned}$$

Варіант 4

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \varphi) &= \cos \frac{4\pi\varphi}{\alpha} \end{aligned} \right. ; \quad \text{б)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) &= 0 \\ u(\rho, \alpha) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \varphi) &= 3\varphi - \varphi^2 \end{aligned} \right. ; \\
 \text{в)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} &= 0 \\ u(\rho, 0) &= 0 \\ u(\rho, \alpha) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(1, \varphi) &= \sin^2 \frac{\pi\varphi}{\alpha} \cos^3 \frac{2\pi\varphi}{\alpha} \end{aligned} \right. .
 \end{aligned}$$

Варіант 5

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} &= 0 \\ u(\rho, 0) &= 0 \\ u(\rho, \alpha) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(1, \varphi) &= \sin^3 \frac{5\pi\varphi}{\alpha} \cos \frac{2\pi\varphi}{\alpha} \end{aligned} \right. ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ u(a, \varphi) = 3 \sin \frac{5\pi\varphi}{2\alpha} \end{array} \right. ; \text{ в)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ u(a, \varphi) = 1 + 3\varphi^2 \end{array} \right. .
\end{array}$$

Вариант 6

$$\begin{array}{l}
\text{а)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \varphi) = 2\varphi + \varphi^2 \end{array} \right. ; \text{ б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \varphi) = \cos \frac{\pi\varphi}{\alpha} + 5 \cos \frac{5\pi\varphi}{\alpha} \end{array} \right. ; \\
\text{в)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(2, \varphi) = \sin^2 \frac{3\pi\varphi}{\alpha} \sin \frac{7\pi\varphi}{\alpha} \end{array} \right. .
\end{array}$$

Вариант 7

$$\begin{array}{l}
\text{а)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ u(a, \varphi) = 1 + \cos \frac{4\pi\varphi}{\alpha} \end{array} \right. ; \text{ б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \varphi) = 5\varphi \end{array} \right. ; \\
\text{в)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(1, \varphi) = \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha} \cos^3 \frac{2\pi\varphi}{\alpha} \end{array} \right. .
\end{array}$$

Варіант 8	
$a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \varphi) = 7 \cos \frac{\pi \varphi}{2\alpha} - \cos \frac{3\pi \varphi}{2\alpha} \end{array} \right. ; \quad б) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \varphi) = 6\varphi^2 \end{array} \right. ;$	
$B) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ u(2, \varphi) = \sin \frac{2\pi \varphi}{\alpha} \cos^3 \frac{3\pi \varphi}{\alpha} \end{array} \right. .$	
Варіант 9	
$a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \varphi) = A\varphi^2, A = const \end{array} \right. ; \quad б) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ u(a, \varphi) = 1 + \cos \frac{6\pi \varphi}{\alpha} ; \end{array} \right. ;$	
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ u(2, \varphi) = \sin^2 \frac{3\pi \varphi}{\alpha} \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} \end{array} \right. .$	
Варіант 10	
$a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \alpha) = 0 \\ u(a, \varphi) = A\varphi, A = const \end{array} \right. ; \quad б) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ u(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(1, \varphi) = 2 \sin \frac{5\pi \varphi}{\alpha} \cos^2 \frac{\pi \varphi}{\alpha} \end{array} \right. ;$	

$$\text{B)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) = 0 \\ u(\rho, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \varphi) = \cos \frac{3\pi\varphi}{2\alpha} + 6 \cos \frac{7\pi\varphi}{2\alpha} \end{array} \right. .$$

Крайові задачі для рівняння Лапласа в прямокутнику.

1. Постановка (задача Діріхле): необхідно знайти функцію гармонічну в середині прямокутника $0 < x < p$, $0 < y < q$, неперервну на його межі, і яка задовольняє граничні умови

$$u(x, 0) = a(x), \quad u(x, q) = A(x), \quad (1)$$

$$u(0, y) = b(y), \quad u(p, y) = B(y), \quad (2)$$

де функція $a(x)$ і $A(x)$ задані і неперервні на відрізку $0 \leq x \leq p$, функції $b(y)$ і $B(y)$ задані і неперервні на відрізку $0 \leq y \leq q$, причому

$$a(0) = b(0) = a(p) = B(q), \quad A(p) = B(p) = A(0) = b(q). \quad (3)$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді суми двох функцій :

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$$

кожна з яких задовольняє наступні умови:

$$\text{а) } \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad 0 < x < p, 0 < y < q, \quad (4)$$

$$v(x, 0) = a(x), \quad v(x, q) = A(x), \quad (5)$$

$$v(0, y) = 0, \quad v(p, y) = 0; \quad (6)$$

$$\text{б) } \Delta w = w_{xx} + w_{yy} = 0, \quad 0 < x < p, 0 < y < q, \quad (4')$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w(x, q) = 0, \quad (5')$$

$$w(0, y) = b(y), \quad w(p, y) = B(y). \quad (6')$$

Неперервність функцій, заданих на межі, забезпечує умова (3).

Знайдемо розв'язок задачі а). Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \quad (7)$$

Підставляємо (7) в (4):

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Оскільки ліва частина останнього рівняння не залежить від x , а права – від y , то це можливо тільки у випадку

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda, \lambda = \text{const.}$$

Тоді отримаємо два рівняння

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \text{і} \quad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Запишемо задачу Штурма-Ліувіля для функції $X(x)$. Із граничних умов (6) отримаємо:

$$v(0, y) = X(0)Y(y), \quad v(p, y) = X(p)Y(y) = 0$$

через те, що $Y(y) \neq 0$, то

$$X(0) = 0, \quad X(p) = 0.$$

Отже,

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(p) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (8) \\ (9) \end{matrix}$$

Визначимо значення константи λ при яких задача (8)-(9) має нетривіальні розв'язки.

1. Нехай $\lambda < 0$. Характеристичне рівняння для рівняння (8) матиме вигляд

$$k^2 + \lambda = 0,$$

корені якого

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$$

– дійсні і різні. Тоді загальний розв'язок рівняння (8) матиме вигляд:

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

З граничних умов (9) отримаємо систему рівнянь для визначення C_1, C_2 :

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(p) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}p} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}p} = 0 \end{cases}$$

Дана система має тільки тривіальний розв'язок $C_1 = C_2 = 0$, так як її визначник $\Delta = e^{\sqrt{-\lambda}p} - e^{-\sqrt{-\lambda}p} \neq 0$, але тоді

$$X(x) = 0 \Rightarrow v(x, y) = 0.$$

2. Нехай $\lambda = 0$, тоді рівняння (8) коли має загальний розв'язок

$$X = C_1 x + C_2,$$

де $C_1, C_2 = \text{const.}$ З граничних умов (9) маємо

$$X(0) = C_2 = 0, \quad X(p) = C_1 p = 0.$$

Звідки знову ж

$$C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0.$$

3. Нехай $\lambda > 0$. Тоді для (8) характеристичне рівняння

$$k^2 + \lambda = 0$$

матиме уявні корені $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, а загальний розв'язок (8) матиме вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

З умов (9)

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X(p) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} p.$$

Якщо $C_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$. Тому $C_2 \neq 0$, значить

$$\sin \sqrt{\lambda} p = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} p = k\pi, k = 0, 1, \dots \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2.$$

Значення $\lambda_0 = 0$ ($k = 0$) не підходить, так як $X_0(x) = 0$. Власні функції:

$$X_k(x) = \sin \left(\frac{k\pi x}{p}\right), k = 1, 2, \dots$$

Знайдемо функцію $Y(y)$. Кожному номеру $k = 1, 2, \dots$ відповідатиме своя функція $Y_k(y)$, яка визначається з рівняння

$$Y''_k(y) - \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 Y_k(y) = 0.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$Y_k(y) = M_k e^{\frac{k\pi y}{p}} + N_k e^{-\frac{k\pi y}{p}}$$

де M_k, N_k – довільні константи.

Підставляючи знайдені $X_k(x)$ і $Y_k(y)$ в формулу для $v(x, y)$, отримаємо розв'язок рівняння (4) який задовольняє умовам (6).

У зв'язку з тим, що $Y_k(y)$ можна подати у вигляді

$$Y_k(y) = \alpha_k \operatorname{ch} \left(\frac{k\pi y}{p}\right) + \beta_k \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi y}{p}\right),$$

то

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \operatorname{ch} \left(\frac{k\pi y}{p} \right) + \beta_k \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi y}{p} \right) \right) \sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right). \quad (10)$$

Коефіцієнти α_k, β_k вибираємо так, щоб виконувались умови (5). Припустимо, що функції $a(x)$ і $A(x)$ розкладаються в рівномірно збіжний ряд Фур'є:

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right), \quad a_k = \frac{2}{p} \int_0^p a(x) \sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right) dx,$$

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right), \quad A_k = \frac{2}{p} \int_0^p A(x) \sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right) dx.$$

Поклавши в (10) $y = 0, y = q$, отримаємо

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right) = a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right),$$

$$u(x, q) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \operatorname{ch} \left(\frac{k\pi q}{p} \right) + \beta_k \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi q}{p} \right) \right) \sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right) = A(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right).$$

Звідси, прирівнюючи відповідні коефіцієнти отримаємо

$$\alpha_k = a_k; \quad \beta_k = \frac{A_k - a_k \operatorname{ch} \left(\frac{k\pi q}{p} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{k\pi q}{p} \right)}.$$

Підставляючи α_k, β_k в (10) отримаємо

$$v(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{ch} \left(\frac{k\pi y}{p} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\frac{k\pi q}{p} \right)} \left(A_k - a_k \operatorname{ch} \left(\frac{k\pi q}{p} \right) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi y}{p} \right) \right) \sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right)$$

або

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi(q-y)}{p} \right) + A_k \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi y}{p} \right) \right) \frac{\sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{k\pi q}{p} \right)} \quad (11)$$

Абсолютно аналогічно знаходиться розв'язок задачі б) і має вигляд :

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[b_k \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi(p-x)}{q} \right) + B_k \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi x}{q} \right) \right] \frac{\sin \left(\frac{k\pi y}{q} \right)}{\sin \left(\frac{k\pi p}{q} \right)}, \quad (12)$$

де

$$b_k = \frac{2}{q} \int_0^q b(y) \sin \left(\frac{k\pi y}{q} \right) dy, \quad B_k = \frac{2}{q} \int_0^q B(y) \sin \left(\frac{k\pi y}{q} \right) dy.$$

Додаючи (11) і (12) отримаємо розв'язок вихідної задачі:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\alpha_k \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi(q-y)}{p} \right) + A_k \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi y}{p} \right) \right] \frac{\sin \left(\frac{k\pi x}{p} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{k\pi q}{p} \right)} + \left[b_k \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi(p-x)}{q} \right) + B_k \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi x}{q} \right) \right] \frac{\sin \left(\frac{k\pi y}{q} \right)}{\sin \left(\frac{k\pi p}{q} \right)} \right\}. \quad (13)$$

Приклад. Розв'язати крайову задачу для рівняння Лапласа в прямокутнику:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0, y) = A \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\ u(a, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, b) = x^2 + 5x \end{cases},$$

де $0 < x < a$; $0 < y < b$.

Розв'язання: розв'язок шукатимемо у вигляді :

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y).$$

Таким чином

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v(0, y) = 0 \\ v(a, y) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \\ v(x, b) = x^2 + 5x \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta w = 0 \\ w(0, y) = A \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ w(a, y) = 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w(x, b) = 0 \end{cases}.$$

Знайдемо спочатку функцію $v(x, y)$:

$$v(x, y) = X(x)Y(y);$$

$$X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow \frac{-X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = C.$$

Розпочнемо з функції $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' + CX = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \\ X_k = \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \end{cases}.$$

Тепер перейдемо до функції $Y(y)$:

$$Y'' - CY = 0;$$

$$Y''_k - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{k\pi}{a};$$

$$Y_k(y) = M_k e^{\frac{k\pi}{a}y} + N_k e^{-\frac{k\pi}{a}y};$$

$$Y_k(y) = \widetilde{M}_k \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi}{a}y\right) + \widetilde{N}_k \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right).$$

Тоді

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\widetilde{M}_k \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi}{a}y\right) + \widetilde{N}_k \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \right] \sin \frac{k\pi x}{a}.$$

Знаходимо коефіцієнти $\widetilde{M}_k, \widetilde{N}_k$:

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{M}_k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) = 0 \Rightarrow \widetilde{M}_k = 0 \quad \forall k;$$

$$\begin{aligned} v(x, b) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\widetilde{M}_k \operatorname{ch}\left(\frac{k\pi b}{a}\right) + \widetilde{N}_k \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi b}{a}\right) \right] \sin \frac{k\pi x}{a} = x^2 + 5x = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{2}{a} \int_0^a (x^2 + 5x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + 5x \quad du = (2x + 5) \\ dv = \sin \frac{k\pi x}{a} dx \\ v = -\frac{a}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{a} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2}{a} \left[(x^2 + 5x) \left(-\frac{a}{k\pi} \cos \left(\frac{k\pi x}{a} \right) \right) \right]_0^a + \frac{a}{k\pi} \int_0^a (2x + 5) \cos \left(\frac{k\pi x}{a} \right) dx \\
&= \frac{2}{k\pi} (a^2 + 5a) (-1)^{k+1} + \\
&+ \frac{2}{k\pi} \left[(2x + 5) \frac{a}{k\pi} \sin \left(\frac{k\pi x}{a} \right) \right]_0^a - \frac{2a}{k\pi} \int_0^a \sin \left(\frac{k\pi x}{a} \right) dx = \\
&= \frac{2}{k\pi} (a^2 + 5a) (-1)^{k+1} + \frac{4a^2}{k^3 \pi^3} ((-1)^k - 1).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\widetilde{N}_k = \frac{\alpha_k}{sh \left(\frac{k\pi b}{a} \right)}, \forall k.$$

Знайдемо $w(x, y)$:

$$w(x, y) = X(x)Y(y);$$

$$X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = C.$$

Розпочнемо з функції $Y(x)$:

$$\begin{cases} Y'' + CY = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_k = \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \\ Y_k = \sin \left(\frac{k\pi y}{b} \right) \end{cases}.$$

Тоді

$$X_k'' - \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 X_k = 0;$$

$$\lambda = \pm \frac{k\pi}{b};$$

$$X_k(x) = M_k e^{\frac{k\pi}{b}x} + N_k e^{-\frac{k\pi}{b}x}$$

або

$$X_k(x) = \widetilde{M}_k ch\left(\frac{k\pi}{b}x\right) + \widetilde{N}_k sh\left(\frac{k\pi}{b}x\right).$$

Тоді

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\widetilde{M}_k ch\left(\frac{k\pi}{b}x\right) + \widetilde{N}_k sh\left(\frac{k\pi}{b}x\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right)$$

Знаходимо коефіцієнти $\widetilde{M}_k, \widetilde{N}_k$:

$$w(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{M}_k \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) = A \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$\widetilde{M}_1 = A,$$

$$\widetilde{M}_k = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

$$w(a, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\widetilde{M}_k ch\left(\frac{k\pi a}{b}\right) + \widetilde{N}_k sh\left(\frac{k\pi a}{b}\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) = 0,$$

$$\forall \widetilde{N}_k = 0, \forall k \neq 1.$$

Розглянемо випадок коли $k = 1$:

$$Ach\left(\frac{\pi a}{b}\right) + \widetilde{N}_k sh\left(\frac{\pi a}{b}\right) = 0 \Rightarrow \widetilde{N}_k = \frac{-Ach\left(\frac{\pi a}{b}\right)}{sh\left(\frac{\pi a}{b}\right)}.$$

Таким чином

$$w(x, y) = Ach\left(\frac{\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{Ach\left(\frac{\pi a}{b}\right)}{sh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} sh\left(\frac{\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right).$$

Підсумовуючи вищесказане запишемо розв'язок вихідної задачі.

Відповідь:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{N}_k sh\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) +$$

$$+ Ach\left(\frac{\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) - \frac{Ach\left(\frac{\pi a}{b}\right)}{sh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} sh\left(\frac{\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right).$$

2. Постановка (задача Неймана): потрібно знайти розв'язок рівняння Лапласа в прямокутнику $D: \{a < x < b; c < y < d\}$, який на межі задовольняє крайовим умовам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial w}\Big|_{y=c} &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, c) = \varphi_1(x); & \frac{\partial u}{\partial w}\Big|_{y=d} &= +\frac{\partial u}{\partial y}(x, d) = \varphi_2(x); \\ \frac{\partial u}{\partial w}\Big|_{x=a} &= -\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \varphi_1(y); & \frac{\partial u}{\partial w}\Big|_{x=b} &= +\frac{\partial u}{\partial x}(b, y) = \varphi_2(y).\end{aligned}$$

Тут $\frac{\partial u}{\partial w}$ – похідна за напрямом зовнішньої нормалі до контура прямокутника. Для існування розв'язку задачі Неймана мають виконуватись умови :

$$\int_c^d \varphi_1(y) dy - \int_c^d \varphi_2(y) dy + \int_a^b \varphi_1(x) dx - \int_a^b \varphi_2(x) dx = 0.$$

Розв'язок поставленої задачі шукатимемо у вигляді

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$$

Задача для пошуку $v(x, y)$:

$$\Delta v = 0 \quad \text{всередині прямокутника } D,$$

а на межі прямокутника виконуються умови :

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, c) = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, d) = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x}(a, y) = \varphi_1(y); \quad \frac{\partial v}{\partial x}(b, y) = \varphi_2(y).$$

Задача для $w(x, y)$:

$$\Delta w = 0 \quad \text{всередині прямокутника } D,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, c) = -\varphi_1(x); \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, d) = \varphi_2(x); \quad \frac{\partial w}{\partial x}(a, y) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}(b, y) = 0.$$

Приклад. Розв'язати крайову задачу для рівняння Лапласа в прямокутнику:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0, y) = A \\ u(a, y) = Ay \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0 \end{cases}$$

де $0 < x < a$; $0 < y < b$, $A - \text{const.}$

Розв'язання: розв'язок знаходимо у вигляді

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \Rightarrow X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow -\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = C;$$

$$1) Y'' + CY = 0 \quad 2) X'' - CX = 0$$

Запишемо задачу Штурма-Ліувіля для функції $Y(y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x; 0) = X(x)Y'(0) = 0 \Rightarrow Y'(0) = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = X(x)Y'(b) = 0 \Rightarrow Y'(b) = 0;$$

$$\begin{cases} Y'' + CY = 0 \\ Y'(0) = 0 \\ Y'(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_k = \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2 \\ Y_k(y) = \cos\left(\frac{\pi k y}{b}\right) \end{cases}.$$

Знаходимо тепер функцію $X(x)$:

$$X''_k - \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2 X_k = 0;$$

$$X_k = e^{\lambda x} \Rightarrow e^{\lambda x} \left(\lambda^2 - \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2 \right) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2; \lambda = \pm \frac{\pi k}{b};$$

$$X_k = M_k e^{\frac{\pi k x}{b}} + N_k e^{-\frac{\pi k x}{b}}$$

або

$$X_k(x) = \widetilde{M}_k \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k x}{b}\right) + \widetilde{N}_k \operatorname{sh}\left(\frac{\pi k x}{b}\right);$$

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\widetilde{M}_k \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k x}{b}\right) + \widetilde{N}_k \operatorname{sh}\left(\frac{\pi k x}{b}\right) \right) \cos\left(\frac{\pi k y}{b}\right).$$

Таким чином

$$u(0, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\widetilde{M}_k \cos\left(\frac{\pi k y}{b}\right) \right) = A.$$

Отже, для $k = 0$ $\widetilde{M}_0 = A \Rightarrow N_0 = 0$, а

$$\widetilde{M}_k = 0, \quad \forall k \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
u(a; y) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\widetilde{M}_k \operatorname{ch} \left(\frac{\pi k a}{b} \right) + \widetilde{N}_k \operatorname{sh} \left(\frac{\pi k a}{b} \right) \cos \left(\frac{\pi k y}{b} \right)) = Ay = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_k \cos \left(\frac{\pi k y}{b} \right) \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \frac{2}{b} \int_0^b Ay \cos \left(\frac{\pi k y}{b} \right) dy = \left\{ \begin{array}{l} y = u; \quad \cos \left(\frac{\pi k y}{b} \right) dy = dv \\ dy = du; \quad v = \frac{b}{\pi k} \sin \left(\frac{\pi k y}{b} \right) \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2A}{b} \left[y \left(\frac{b}{\pi k} \right) \sin \left(\frac{\pi k y}{b} \right) \Big|_0^b - \frac{b}{\pi k} \int_0^b \sin \left(\frac{\pi k y}{b} \right) dy \right] \\
&= \frac{2A}{\pi k} \frac{b}{\pi k} \cos \left(\frac{\pi k y}{b} \right) \Big|_0^b = \frac{2Ab}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{N}_k \operatorname{sh} \left(\frac{\pi k a}{b} \right) \cos \left(\frac{\pi k y}{b} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2Ab}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1) \cos \left(\frac{\pi k y}{b} \right) \Rightarrow$$

$$\widetilde{N}_k = \frac{2Ab((-1)^k - 1)}{\pi^2 k^2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi k a}{b} \right)}.$$

Відповідь:

$$u(x, y) = A + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2Ab((-1)^k - 1)}{\pi^2 k^2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi k a}{b} \right)} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi k x}{b} \right) \cos \left(\frac{\pi k y}{b} \right).$$

Варіанти вправ для самоконтролю.

Розв'язати наступні крайові задачі для рівняння Лапласа в прямокутнику:

Варіант 1	
а) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0; y) = A \sin\left(\frac{4\pi y}{b}\right) \\ u(a; y) = 3y \\ u(x; 0) = 0 \\ u(x; b) = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; 0) = x^2 + x \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; b) = -x^2 - x \end{cases}$
Варіант 2	
а) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0; y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; 0) = 3 \sin\left(\frac{5\pi x}{2a}\right) \\ u(x; b) = x \end{cases}$	б) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0; y) = Ay - y^2 \\ u(a; y) = 0 \\ u(x; 0) = 10 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ u(x; b) = 0 \end{cases}$
Варіант 3	
а) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0; y) = 6y \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = 2 \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \\ u(x; 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; b) = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; 0) = -2x - \frac{x^2}{4} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; b) = 2x + \frac{x^2}{4} \end{cases}$
Варіант 4	
а) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = y - \frac{1}{2} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; b) = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0; y) = 0 \\ u(a; y) = \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) - \sin\left(\frac{5\pi y}{2b}\right) \\ u(x; 0) = x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; b) = 0 \end{cases}$

Варіант 5	
а) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0; y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; 0) = 3x \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; b) = 2 \sin\left(\frac{5\pi x}{2a}\right) \end{cases}$	б) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0; y) = 0 \\ u(a; y) = y - 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ u(x; b) = 0 \end{cases}$
Варіант 6	
а) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ u(a; y) = by \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; b) = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0; y) = 0 \\ u(a; y) = \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; 0) = x^2 \\ u(x; b) = 0 \end{cases}$
Варіант 7	
а) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = 0 \\ u(x; 0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; b) = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0; y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \\ u(x; 0) = x^2 - x \\ u(x; b) = 0 \end{cases}$
Варіант 8	
а) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = 0 \\ u(a; y) = 0 \\ u(x; 0) = 5x \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; b) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \end{cases}$	б) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = y - 2y^2 \\ u(x; 0) = \cos\left(\frac{5\pi x}{a}\right) \\ u(x; b) = 0 \end{cases}$

Варіант 9	
а) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = 0 \\ u(x; 0) = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ u(x; b) = 5x \end{cases}$	б) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0; y) = y + 4y^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; 0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) + \sin\left(\frac{5\pi x}{2a}\right) \\ u(x; b) = 0 \end{cases}$
Варіант 10	
а) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x; 0) = 0 \\ u(x; b) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \\ u(a; y) = 11y \end{cases}$	б) $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a; y) = 0 \\ u(x; 0) = 2x(x - 1) \\ u(x; b) = 0 \end{cases}$

Метод Фур'є для рівняння Пуассона.

$$\Delta u = f(x, y, z), \quad (1)$$

$$u(x, y, z)|_{\Gamma} = \varphi_1(x, y, z), \quad (2.1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) \right|_{\Gamma} = \varphi_2(x, y, z), \quad (2.2)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) + \alpha u(x, y, z) \right]_{\Gamma} = \varphi_3(x, y, z), \quad (2.3)$$

Постановка задачі: потрібно знайти двічі неперервно диференційований в області D розв'язок рівняння (1), який на межі області D задовольняє одній з умов: (2.1), (2.2) або (2.3).

Розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$u(x, y, z) = V(x, y, z) + W(x, y, z),$$

де

- $W(x, y, z)$ задовольняє рівнянню (1);
- $V(x, y, z)$ знаходимо як розв'язок рівняння

$$\Delta V(x, y, z) = 0,$$

який задовольняє одній з умов:

$$V(x, y, z)|_{\Gamma} = \varphi_1(x, y, z) - W(x, y, z)|_{\Gamma} = \varphi_1^*(x, y, z),$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n}(x, y, z) \right|_{\Gamma} = \varphi_2(x, y, z) - \left. \frac{\partial W}{\partial n}(x, y, z) \right|_{\Gamma} = \varphi_2^*(x, y, z),$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial V}{\partial n}(x, y, z) + \alpha V(x, y, z) \right]_{\Gamma} &= \varphi_3(x, y, z) - \left[\frac{\partial W}{\partial n}(x, y, z) + \alpha W(x, y, z) \right]_{\Gamma} = \\ &= \varphi_3^*(x, y, z). \end{aligned}$$

Приклад. Розв'язати крайову задачу для рівняння Пуассона в колі вказаного радіусу:

$$\text{а) } \begin{cases} \Delta u = 2x(3y^2 + x^2), & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = 0 \end{cases}$$

Розв'язання: розв'язок знаходимо у вигляді

$$u(x, y) = V(x, y) + W(x, y).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x(3y^2 + x^2);$$

$$V_{xx} + W_{xx} + V_{yy} + W_{yy} = 2x(3y^2 + x^2);$$

$$V_{xx} + V_{yy} = 0;$$

$$W_{xx} + W_{yy} = 2x(3y^2 + x^2);$$

$$W_{xx} + W_{yy} = 6xy^2 + 2x^3;$$

$$W(x, y) = x^3 y^2.$$

$$u(x, y) = V(x, y) + x^3 y^2$$

$$u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = V(x, y)|_{x^2+y^2=1} + x^3 y^2|_{x^2+y^2=1} = 0$$

Функцію $V(x, y)$ знаходимо як розв'язок крайової задачі для рівняння Лапласа в колі:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ V(x, y)|_{x^2+y^2=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \\ V(\rho, \varphi)|_{\rho=1} = -5\rho^5 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \end{cases}.$$

$$V(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi));$$

$$V(1, \varphi) = -\cos^3 \varphi \sin^2 \varphi = -\frac{1}{8} \cos(\varphi) + \frac{1}{16} \cos(3\varphi) + \frac{1}{16} \cos(5\varphi);$$

$$B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 1^n (C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)) = -\frac{1}{8} \cos(\varphi) + \frac{1}{16} \cos(3\varphi) + \frac{1}{16} \cos(5\varphi)$$

$$B_0 = 0, D_n = 0 \quad \forall n;$$

$$C_n = 0 \quad \forall n \neq 1, 3, 5;$$

$$C_1 = -\frac{1}{8}, C_3 = \frac{1}{16}, C_5 = \frac{1}{16}.$$

Тоді

$$V(\rho, \varphi) = -\frac{1}{8} \rho \cos \varphi + \frac{1}{16} \rho^3 \cos 3\varphi + \frac{1}{16} \rho^5 \cos 5\varphi.$$

Відповідь:

$$u(\rho, \varphi) = -\frac{1}{8} \rho \cos \varphi + \frac{1}{16} \rho^3 \cos 3\varphi + \frac{1}{16} \rho^5 \cos 5\varphi + \rho^5 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi$$

$$6) \begin{cases} \Delta u = -xy, & x^2 + y^2 < R^2 \\ u(x, y)|_{x^2+y^2=R^2} = 0 \end{cases}$$

Розв'язання: розв'язок знаходимо у вигляді

$$u(x, y) = V(x, y) + W(x, y).$$

$$V_{xx} + W_{xx} + V_{yy} + W_{yy} = -xy;$$

$$W_{xx} + W_{yy} = -xy; \quad V_{xx} + V_{yy} = 0;$$

$$W(x, y) = Ax^3y + Bxy^3;$$

$$W_x = 3Ax^2y; \quad W_{xx} = 6Axy;$$

$$W_y = Ax^3 + 3Bxy^2; \quad W_{yy} = 6Bxy;$$

$$6Axy + 6Bxy = -xy \Rightarrow A + B = -\frac{1}{6};$$

$$A = B \Rightarrow A = B = -\frac{1}{12}.$$

$$W(x, y) = -\frac{1}{12}x^3y - \frac{1}{12}xy^3 = -\frac{1}{12}xy(x^2 + y^2).$$

Функцію $V(x, y)$ знаходимо як розв'язок крайової задачі для рівняння Лапласа в колі:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ V|_{x^2+y^2=R^2} = -W|_{x^2+y^2=R^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin(\varphi) \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \\ V(\rho, \varphi)|_{\rho=R^2} = \frac{1}{24}R^4 \sin(2\varphi) \end{cases}$$

$$V(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi));$$

$$B_0 = 0, C_n = 0 \quad \forall n;$$

$$D_n = 0 \quad \forall n \neq 2;$$

$$D_2 = \frac{1}{24}R^2.$$

Тоді

$$V(\rho, \varphi) = \frac{1}{24}\rho^2 R^2 \sin(2\varphi).$$

Відповідь:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{24} \rho^2 R^2 \sin(2\varphi) - \frac{1}{24} \rho^4 \sin(2\varphi) = \frac{1}{24} \rho^2 \sin(2\varphi) (R^2 - \rho^2)$$

Приклад. Розв'язати крайову задачу для рівняння Пуассона в прямокутнику:

$$\begin{cases} \Delta u = e^{xy}(x^2 + y^2), & 0 < x < a, 0 < y < b \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = ye^{ay} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = x \\ u(x, b) = e^{bx} \end{cases}$$

Розв'язання: розв'язок знаходимо у вигляді

$$u(x, y) = V(x, y) + W(x, y).$$

$$V_{xx} + W_{xx} + V_{yy} + W_{yy} = e^{xy}(x^2 + y^2);$$

$$V_{xx} + V_{yy} = 0;$$

$$W_{xx} + W_{yy} = e^{xy}(x^2 + y^2);$$

$$W(x, y) = e^{xy}.$$

Функцію $V(x, y)$ знаходимо як розв'язок крайової задачі для рівняння Лапласа в прямокутнику:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial V}{\partial x}(0, y) + y = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \frac{\partial V}{\partial x}(a, y) + ye^{ay} = ye^{ay} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial V}{\partial y}(x, 0) + x = x \\ u(x, b) = V(x, b) + e^{bx} = e^{bx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta V = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x}(0, y) = -y \\ \frac{\partial V}{\partial x}(a, y) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ V(x, b) = 0 \end{cases}.$$

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = C.$$

$Y(x)$:

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, 0) = X(x)Y'(y) = 0 \Rightarrow Y'(0) = 0$$

$$V(x, b) = X(x)Y(b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0$$

$$\begin{cases} Y''(y) + CY(y) = 0 \\ Y(b) = 0 \\ Y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} C_k &= \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} \right)^2; \\ Y_k(y) &= \cos \left(\frac{\pi(2k+1)y}{2b} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(x): \quad X''(x) - CX(x) &= 0; \\ X''(x) - \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} \right)^2 X(x) &= 0; \end{aligned}$$

$$X(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 - \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} \right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\pi(2k+1)}{2b}.$$

$$X_k(x) = M_k e^{\frac{\pi(2k+1)}{2b}x} + N_k e^{-\frac{\pi(2k+1)}{2b}x};$$

$$X_k(x) = \tilde{M}_k \operatorname{ch} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right) + \tilde{N}_k \operatorname{sh} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right).$$

Тоді

$$V(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{M}_k \operatorname{ch} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right) + \tilde{N}_k \operatorname{sh} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right) \right) \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} y \right)$$

Знаходимо коефіцієнти \tilde{M}_k, \tilde{N}_k :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(0, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{N}_k \frac{\pi(2k+1)}{2b} \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} y \right);$$

$$-y = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} y \right);$$

$$\alpha_k = -\frac{2}{b} \int_0^b y \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} y \right) dy = -\frac{2}{b} \left[\frac{2by}{\pi(2k+1)} \sin \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} y \right) \right]_0^b -$$

$$-\frac{2b}{\pi(2k+1)} \int_0^b \sin \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} y \right) dy = -\frac{4b(-1)^k}{\pi(2k+1)} + \frac{8b}{\pi^2(2k+1)^2};$$

$$\tilde{N}_k = \frac{2b\alpha_k}{\pi(2k+1)}, \forall k.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2b\alpha_k}{\pi(2k+1)} \left[\tilde{M}_k \operatorname{ch} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right) + \tilde{N}_k \operatorname{sh} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right) \right] \cdot \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} y \right) = 0.$$

$$\tilde{M}_k = \frac{-2b\alpha_k \operatorname{ch} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right)}{\pi(2k+1) \operatorname{sh} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right)}, \forall k.$$

$$V(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{M}_k \operatorname{ch} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right) + \tilde{N}_k \operatorname{sh} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right) \right) \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} y \right).$$

Відповідь:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{M}_k \operatorname{ch} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right) + \tilde{N}_k \operatorname{sh} \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} x \right) \right) \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2b} y \right) + e^{xy}$$

Варіанти вправ для самоконтролю.

Розв'язати крайову задачу для рівняння Пуассона в прямокутнику:

Варіант 1
$\begin{cases} \Delta u = 2y(y^2 + 3x^2), & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(0, y) = y, & \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = 3a^2 y^2, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial u(x, b)}{\partial y} = 3b^2 x^2. \end{cases}$
Варіант 2
$\begin{cases} \Delta u = 6xy, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0, & \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = 3a^2 y, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = x^3 + x, & \frac{\partial u(x, b)}{\partial y} = x^3 + x. \end{cases}$
Варіант 3
$\begin{cases} \Delta u = x, & 0 < x < a, -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}, \\ u(0, y) = u(a, y) = u\left(x, -\frac{b}{2}\right) = u\left(x, \frac{b}{2}\right) = 0. \end{cases}$

Варіант 4
$\begin{cases} \Delta u = 6y + 2, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(0, y) = y^3, & u(a, y) = a^2 + y^3, \\ u(x, 0) = x^2 + x, & u(x, b) = x^2 + b^3. \end{cases}$
Варіант 5
$\begin{cases} \Delta u = A, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(0, y) = \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = 0, & u(x, 0) = \frac{\partial u(x, b)}{\partial y} = 0. \end{cases}$
Варіант 6
$\begin{cases} \Delta u = x^2, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(0, y) = A, & \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = B \sin \frac{\pi x}{2a}, u(x, b) = 0 \end{cases}$
Варіант 7
$\begin{cases} \Delta u = y^2, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0, & \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = y^2, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, b) = 2 \cos \frac{\pi x}{a}, \end{cases}$
Варіант 8
$\begin{cases} \Delta u = x, & 0 < x < p, 0 < y < q, \\ u(0, y) = u(p, y) = u(x, 0) = u(x, q) = 0. \end{cases}$
Варіант 9
$\begin{cases} \Delta u = 6x, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = y, & \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = 3a^2, \\ u(x, 0) = x^3, & u(x, b) = x^3 + b. \end{cases}$
Варіант 10
$\begin{cases} \Delta u = x, & 0 < x < p, 0 < y < q, \\ u(0, y) = u(p, y) = u(x, 0) = 0 \\ u(x, q) = x^2. \end{cases}$