Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу та оптимізації

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ЗА ТЕМОЮ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

Дніпро

2023

УДК 517.51(076)
П69

Наведено основні типи задач з диференціального числення функцій багатьох змінних. Для студентів університету денної та заочної форм навчання, що вивчають курси «Вища математика» і «Математичний аналіз».

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету
(протокол № 3 від 21 листопада 2023 року)

Рецензенти:

Пипка О. О., доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри геометрії та алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара;
Величко Т. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Українського державного хіміко-технологічного університету.

Практикум з вищої математики за темою
«Диференціальне числення функцій багатьох змінних»

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, Р. О. Біліченко
канд. фіз.-мат. наук, доцент М. Б. Вакарчук
канд. фіз.-мат. наук, доцент А. М. Пасько

© Біліченко Р. О., Вакарчук М. Б., Пасько А. М. 2023

Зміст

Передмова 4
1. Функції багатьох змінних 4
1.1. Функція багатьох змінних 4
1.2. Границя функції багатьох змінних 5
1.3. Неперервність функції багатьох змінних 6
1.4. Частинні похідні 8
1.5. Диференційовність функції багатьох змінних 10
1.6. Диференціал функції багатьох змінних 10
1.7. Похідні неявно заданих функцій. 11
1.8. Похідні складеної функції двох змінних 12
1.9. Екстремум функції двох змінних 13
1.10. Похідна за напрямом. Градієнт 15
2. Приклади розв’язування задач. 18
3. Практичні завдання 25
Бібліографічний опис. 38
Додаток. Основні формули та означення 39

Передмова

Вища математика є теоретичною основою більшості технічних і природознавчих наукових дисциплін. Оволодіння її методами та вміння застосовувати їх на практиці необхідно для кожного фахівця в цих галузях. Диференціальне числення функцій багатьох змінних є важливим розділом курсу вищої математики. Його методи широко використовуються у прикладних задачах природознавства і техніки.

Метою цього посібника є ознайомлення здобувачів вищої освіти з основами теорії диференціального числення функцій багатьох змінних, а також формування практичних навичок розв'язування типових задач. Для досягнення цієї мети матеріал поділено на частини. Перша частина посібника містить необхідні теоретичні відомості щодо диференціального числення функцій багатьох змінних. У другій частині наведено приклади розв'язування основних задач. Третя частина містить варіанти практичних завдань для засвоєння матеріалу. Додаток до посібника має структуру довідника. Його головна мета – допомогти здобувачам вищої освіти швидко знайти необхідне означення чи формулу. Таке подання матеріалу жодним чином не може замінити лекцій або підручника.

1. Функції багатьох змінних

1.1. Функція багатьох змінних

Означення. Нехай задано множину упорядкованих пар чисел $D \subset R^2$. Якщо кожній точці $(x, y) \in D$ за певним правилом або законом відповідає єдине число z, то кажуть, що на множині D задано функцію двох змінних x та y. Це позначають так: $z = f(x, y)$.

Приклад. Швидкість v, час t та шлях s пов'язані співвідношенням:

$$v = \frac{s}{t} .$$

Тут v є функцією від s і t: $v = f(s,t)$.

Означення. Графіком функції $z = f(x, y)$ у прямокутній декартовій системі координат *Oxyz* називається геометричне місце точок $P(x; y; f(x, y))$, проєкції яких належать множині $D \subset R^2$. Це місце точок утворює у просторі R^3 певну поверхню, проєкцією на площину *Oxy* є множина *D* (рис. 1).

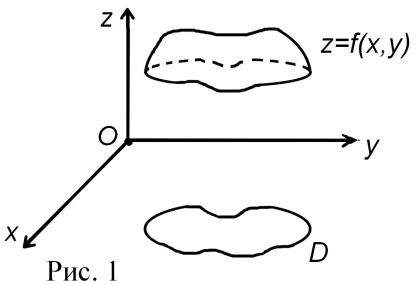


Рис. 1

Означення функції можна узагальнити на випадок *n* незалежних змінних. У випадку $n \geq 3$ графік функції намалювати не можна.

Означення. δ - околом точки $M_0(x_0, y_0)$ називають множину точок $M(x; y)$, координати яких задовольняють умову

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta .$$

Тут $\rho(M_0, M)$ – відстань між точками M_0 та M.

Інакше кажучи, δ - окіл точки – це множина всіх внутрішніх точок круга з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ радіуса δ (рис. 2).

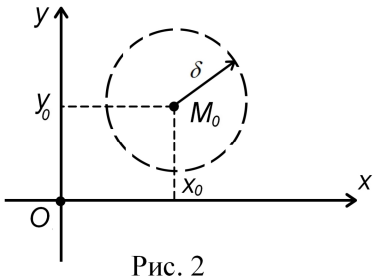


Рис. 2

Означення. Нехай $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} = \{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ є послідовністю точок на площині. Точку $M_0 = M_0(x_0, y_0)$ називають границею цієї послідовності, якщо для довільного числа $\delta > 0$ існує номер *N*, який залежить від δ, такий, що при $n > N$ виконується нерівність $\rho(M_0, M_n) < \delta$.

Границю послідовності позначають символом $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = M_0$.

1.2. Границя функції багатьох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена на деякій множині $D \subset R^2$ і точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ або $M_0(x_0, y_0) \notin D$, але в цьому випадку довільний δ - окіл цієї точки містить хоча б одну точку множини *D*, відмінну від M_0.

Означення (за Коші). Число *A* називається границею функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0 = M_0(x_0, y_0)$, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, яке

залежить від ε, таке, що для всіх точок $M(x,y)\in D$, які задовольняють умову $0<\rho(M_0,M)<\delta$, виконується нерівність $|f(M)-A|<\varepsilon$.

Існує ще одне еквівалентне означення границі функції багатьох змінних.

Означення (за Гейне). Число A називається границею функції $z=f(x,y)$ у точці $M_0=M_0(x_0,y_0)$, якщо для довільної послідовності точок $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, де $M_n\in D$, $M_n\neq M_0$, $\forall n\in N$ і $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=M_0$, послідовність відповідних значень функції $\{f(M_n)\}_{n=1}^{\infty}$ має границю A: $\lim\limits_{n\to\infty}f(M_n)=A$.

Границю функції позначають символом $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}}f(x,y)=A$ або $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=A$.

Для функції двох змінних є справедливими теореми про границі, які виконуються для функції однієї змінної, зокрема:

Теорема. Нехай функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ визначені на множині $D\subset R^2$ та мають у точці $M_0\in D$ границі відповідно A і B. Тоді функції $f(x,y)\pm g(x,y)$, $f(x,y)\cdot g(x,y)$, $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ мають у цій точці границі відповідно $A\pm B$, $A\cdot B$, $\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

Означення. Функція $z=f(x,y)=f(M)$ називається нескінченно малою в точці M_0, якщо $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=0$.

Теорема. Для того щоб функція $z=f(M)$ мала у точці M_0 границю A, необхідно і достатньо, щоб $f(M)=A+\alpha(M)$, де $\alpha(M)$ – нескінченно мала в точці M_0 функція.

1.3. Неперервність функції багатьох змінних

Означення (перше означення неперервності). Нехай функція $z=f(M)$ визначена на множині *D*. Точка $M_0\in D$, і довільний δ- окіл цієї точки містить точки множини *D*. Функція $z=f(M)$ називається неперервною у точці M_0, якщо

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0). \qquad (1)$$

Означення. Точки, у яких функція є неперервною, називають точками неперервності функції, а точки, у яких рівність (1) не виконується, – точками розриву.

Означення. Позначимо через $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Величини Δx, Δy називають приростами аргументів функції x та y у точці $M_0(x_0; y_0)$, а величину Δz – повним приростом функції в цій точці.

З рівності (1) одержимо $\lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} (f(x, y) - f(x_0, y_0)) = 0$. Або $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Означення (друге означення неперервності). Нехай функція визначена на множині *D*. Точка $M_0 \in D$, і довільний δ - окіл цієї точки містить точки множини *D*. Функція $z = f(M)$ називається неперервною в точці M_0, якщо її повний приріст в цій точці Δz прямує до нуля, коли прямують до нуля прирости аргументів Δx. та Δy.

Як для функції однієї змінної, так і в багатовимірному випадку арифметичні операції над неперервними функціями та побудова складеної функції з неперервних приводять до неперервних функцій.

Означення. Множина $D \subset R^2$ називається зв'язною, якщо будь-які її дві точки можна з'єднати неперервною кривою, яка цілком належить *D*.

Приклад. Круг, трикутник – зв'язні множини.

Означення. Точка $M_0 \in D$ називається внутрішньою точкою множини *D*, якщо існує δ - окіл цієї точки, який множина *D* цілком містить у собі.

Означення. Множину *D* називають відкритою, якщо кожна її точка є внутрішньою.

Означення. Областю називають відкриту, зв'язну множину.

Приклад. Множина точок площини $M(x, y)$, таких, що $x^2 + y^2 < 1$, є областю.

Означення. Точку M називають межовою точкою множини *D,* якщо будь-який δ - окіл цієї точки містить точки, які як належать множині *D*, так і не належать множині *D*.

Означення. Множину всіх межових точок множини *D* називають межею множини.

Означення. Область разом з її межею називають замкненою.

Означення. Множина $D \subset R^2$ називається обмеженою, якщо круг деякого скінченного радіуса цілком містить у собі множину *D*.

Замкнена обмежена область є в багатовимірному випадку аналогом відрізка для функції однієї змінної. Розглянемо деякі теореми, які узагальнюють властивості неперервних на відрізку функцій однієї змінної.

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ є неперервною в замкненій, обмеженій області $D \subset R^2$, то в цій області існують точки, у яких функція набуває свого найменшого та найбільшого значень.

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ є неперервною в замкненій, обмеженій області $D \subset R^2$ та $f(M_1) < \mu < f(M_2)$, де точки $M_1, M_2 \in D$, то існує точка, така, що $f(M_0) = \mu$.

1.4. Частинні похідні

Означення. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приріст Δx, але так, щоб точка $M_1(x + \Delta x, y)$ належала заданому околу. Величину $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називають частинним приростом функції $z = f(x, y)$ по змінній x у точці $M(x, y)$.

Аналогічно визначається частинний приріст функції по змінній y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Означення. Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x у точці $M(x, y)$ називають границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, якщо вона існує.

Цю частинну похідну позначають одним із символів $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, z'_x, f'_x. Якщо йдеться про значення частинної похідної в конкретній точці $M_0(x_0;y_0)$, це позначають, наприклад, так: $z'_x(x_0;y_0)$ або $z'_x\big|_{M_0}$.

Аналогічно визначається частинна похідна функції $z=f(x,y)$ за змінною y у точці $M(x,y)$:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y},$$ якщо ця границя існує.

Цю частинну похідну позначають одним із символів: $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, z'_y, f'_y.

Похідні z'_x та z'_y називають ще частинними похідними першого порядку. Частинні похідні другого порядку визначаються як частинні похідні від похідних першого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xx}=(z'_x)'_x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yy}=(z'_y)'_y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xy}=(z'_x)'_y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yx}=(z'_y)'_x.$$

Означення. Частинні похідні z''_{xy} та z''_{yx} називають мішаними похідними другого порядку.

Теорема Шварца про мішані похідні. Якщо функція $z=f(x,y)$ визначена разом зі своїми похідними z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx} у деякому околі точки $M_0(x_0,y_0)$, причому похідні z''_{xy} та z''_{yx} неперервні в точці M_0, то в цій точці $z''_{xy}\big|_{M_0}=z''_{yx}\big|_{M_0}$.

Аналогічна теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних похідних, які відрізняються між собою лише порядком диференціювання.

1.5. Диференційовність функції багатьох змінних

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається диференційовною в точці *M*, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y, \tag{2}$$

де A та B – дійсні числа, $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ та $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Теорема (неперервність диференційовної функції). Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці M, то вона є неперервною в цій точці.

Теорема (існування частинних похідних диференційовної функції). Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x; y)$, то в цій точці існують частинні похідні й у формулі (1) $A = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $B = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Теорема (достатні умови диференційовності функції). Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні в деякому околі точки M і ці похідні неперервні в точці M, то функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в цій точці.

1.6. Диференціал функції багатьох змінних

Означення. Нехай функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в точці *M*. Повним диференціалом dz функції $z = f(x, y)$ називається головна лінійна відносно Δx та Δy частина повного приросту (2) цієї функції в точці *M*:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \tag{3}$$

Оскільки за теоремою про існування частинних похідних диференційовної функції $A = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $B = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ та диференціали незалежних змінних x та y дорівнюють приростам цих змінних $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, то формулу (3) можна подати у вигляді:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{4}$$

Означення. Диференціал (4) називають ще диференціалом першого порядку. Диференціал другого порядку визначається як диференціал від диференціала першого порядку: $d^2z = d(dz)$.

Якщо змінні x та y є незалежними, то диференціал другого порядку можна знайти за формулою:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \ . \qquad (5)$$

Формулу (5) можна подати скорочено:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z \, . \qquad (6)$$

Диференціал n-го порядку визначається аналогічно: $d^n z = d(d^{n-1}z)$. Або скорочено

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z \, . \qquad (7)$$

Слід зазначити, що формули (5), (6), (7) справедливі лише у випадку, коли змінні x та y функції $z = f(x, y)$ є незалежними.

Приклад. Знайти частинні похідні першого і другого порядків та диференціали dz та d^2z функції $z = x^4y^2$.

$z'_x = 4x^3y^2$, $z'_y = 2x^4y$, $z''_{xx} = 12x^2y^2$, , $z''_{yy} = 2x^4$, , $z''_{xy} = 8x^3y$, , $z''_{yx} = 8x^3y$.

За формулою (4) $dz = 4x^3y^2\,dx + 2x^4y\,dy$.

За формулою (5) $d^2z = 12x^2y^2dx^2 + 16x^3ydxdy + 2x^4dy^2$.

1.7. Похідні неявно заданих функцій.

Якщо неявно задана функція $y = \varphi(x)$ визначається рівнянням $F(x, y) = 0$, її похідну можна знайти за формулою

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Якщо неявно задана функція двох змінних $z=\varphi(x,y)$ визначається рівнянням $F(x,y,z)=0$, її частинні похідні можна знайти за формулами

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

1.8. Похідні складеної функції двох змінних

Теорема. Нехай функції $x=x(t)$, $y=y(t)$ диференційовні в точці t, а функція $z=f(x,y)$ диференційовна у відповідній точці $M(x(t),y(t))$. Тоді складена функція $z=f(x(t),y(t))$ диференційовна в точці t, а її похідну в цій точці можна знайти за формулою:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{8}$$

Приклад. Знайти похідну $\frac{dz}{dt}$, якщо $z=x^3+5y^2$, де $x=e^{2t}$, $y=\sin 3t$.

Маємо $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2$, , $\frac{\partial z}{\partial y}=10y$ $\frac{dx}{dt}=2e^{2t}$, $\frac{dy}{dt}=3\cos 3t$.

За формулою (1)

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=3x^2\cdot 2e^{2t}+10y\cdot 3\cos 3t=$$

$$=3(e^{2t})^2\cdot 2e^{2t}+10\sin 3t\cdot 3\cos 3t=6e^{6t}+15\sin 6t.$$

Теорема. Нехай функції $x=x(u,v)$, $y=y(u,y)$ диференційовні в точці $M_1(u;v)$, а функція $z=f(x,y)$ диференційовна у відповідній точці $M_2(x(u,v),y(u,v))$. Тоді складена функція $z=f(x(u,v),y(u,v))$ диференційовна в точці $M_1(u;v)$, а її частинні похідні в цій точці можна знайти за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{9}$$

Приклад. Знайти похідну $\frac{\partial z}{\partial u}$, якщо $z = y^3 \ln x$, де $x = u^2 - v^2$, $y = uv$.

Маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^3}{x}$, , $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \ln x$ $\frac{\partial x}{\partial u} = 2u$, $\frac{\partial y}{\partial u} = v$.

За формулами (9)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y^3}{x} \cdot 2u + 3y^2 \ln x \cdot v =$$

$$= \frac{(uv)^3}{u^2 - v^2} \cdot 2u + 3(uv)^2 \ln(u^2 - v^2) \cdot v = \frac{2u^4 v^3}{u^2 - v^2} + 3u^2 v^3 \ln(u^2 - v^2).$$

1.9. Екстремум функції двох змінних

Означення. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області $D \subset R^2$ і точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Якщо існує δ - окіл цієї точки, який цілком належить області D, і для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$, точку M_0 називають точкою локального максимуму функції $z = f(x, y)$.

Означення. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області $D \subset R^2$ і точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Якщо існує δ - окіл цієї точки, який цілком належить області D, і для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M) > f(M_0)$, точку M_0 називають точкою локального мінімуму функції $z = f(x, y)$.

Означення. Точки локального максимуму і мінімуму називають точками локального екстремуму функції $z = f(x, y)$.

Теорема (необхідні умови екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю або не існують.

Означення. Точку $M_0(x_0, y_0)$, у якій частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю, називають стаціонарною точкою функції $z = f(x, y)$.

Означення. Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні першого порядку не існують, називають критичними точками функції $z = f(x, y)$.

Таким чином, якщо функція в деякій точці набуває екстремуму, то ця точка є критичною. Обернене твердження неправильне.

Теорема (перші достатні умови екстремуму). Нехай у стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ і деякому її околі функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Позначимо через

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}, \quad \Delta = AC - B^2.$$

Якщо $\Delta > 0$, $A > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою локального мінімуму функції $z = f(x, y)$.

Якщо $\Delta > 0$, $A < 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою локального максимуму функції $z = f(x, y)$.

Якщо $\Delta < 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ не є точкою локального екстремуму.

Приклад. Знайти екстремуми функції $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 12y + 5$.

Маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 6$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 12$.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 6 = 0, \\ x + 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

Вона має розв’язок $x_0 = 0, y_0 = 6$.

Точка $M(0, 6)$ – стаціонарна точка функції.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2, \quad , \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=1, \quad , \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2.$$

Тоді $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}=2$, $B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}=1$, $C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}=2$.

$$\Delta = AC - B^2 = 2\cdot 2 - 1^2 = 3 > 0.$$

За теоремою точка $M(0,6)$ – точка локального мінімуму функції.

Теорема (другі достатні умови екстремуму). Нехай у стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ і деякому її околі функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку.

Якщо диференціал другого порядку в цій точці $d^2 z(M_0) > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою локального мінімуму функції $z = f(x, y)$.

Якщо диференціал другого порядку в цій точці $d^2 z(M_0) < 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою локального максимуму функції $z = f(x, y)$.

1.10. Похідна за напрямом. Градієнт

Означення. Область простору, кожній точці M якого поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$, називають скалярним полем.

Нехай із точки $M(x, y, z)$ простору проведено вектор $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$. На векторі $\vec{a}$ на відстані $\Delta a = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Тоді функція $u = f(x, y, z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямку вектора $\vec{a}$ набуде приросту $\Delta_a u = f(M_1) - f(M)$.

Означення. Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_a u}{\Delta a}$ при $\Delta a \to 0$, то цю границю називають похідною функції $u = f(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{a}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta_a z}{\Delta a}$$

Похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Звідси випливає, що частинні похідні функції є окремими випадками похідної за напрямом.

Приклад. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точці $A(1,\ 2, -1)$ за напрямом від точки A до точки $B(2,\ 4, -3)$.

Знайдемо координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і його напрямні косинуси:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (2-1,\ 4-2, -3+1) = (1, 2, -2)$,

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$,

$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}$, $\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}$, $\quad$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{3}$.

Частинні похідні функції в точці A:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2z$, $\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -2x$.

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = 2\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 4$, $\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = 2\cdot 2 = 4$, $\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = -2\cdot 1 = -2$.

$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}\right|_A = 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}$.

Означення. Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, називають градієнтом функції в цій точці і позначають grad u:

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Теорема (зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом). Похідна функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{a}$ дорівнює скалярному

добутку градієнта на $\vec{a}^0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – орт вектора $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$. Іншими словами, похідна за напрямом дорівнює проєкції градієнта функції в цій точці на вектор $\vec{a}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{a}^0 = \text{пр}_{\vec{a}} \operatorname{grad} u.$$

Похідна в даній точці M_0 за напрямом вектора $\vec{a}$ має найбільше значення, якщо напрям вектора $\vec{a}$ збігається з напрямом градієнта, причому

$$\max \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}\right|_{M_0} = \left|\operatorname{grad} u(M_0)\right|.$$

Таким чином, швидкість зростання скалярного поля в точці M_0 є максимальною в напрямі градієнта.

Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю.

Приклад. Знайти значення градієнта функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точці $M_0(0,1,2)$.

Знайдемо частинні похідні функції та їх значення в точці M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2yz, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2xz, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2xy.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 2\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 2 = -4, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 2\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 2 = 2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 2\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 1 = 4.$$

Отже, $\operatorname{grad} u(M_0) = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти диференціали dz і d^2z функції $z = \ln(4 - x^2 - y^{2)})$.

Розв'язання

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4 - x^2 - y^2} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{4 - x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{4 - x^2 - y^2} \cdot (-2y) = \frac{-2y}{4 - x^2 - y^2}.$$

Диференціал dz:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{-2x}{4 - x^2 - y^2}dx + \frac{-2y}{4 - x^2 - y^2}dy = \frac{-2xdx - 2ydy}{4 - x^2 - y^2}.$$

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2 \cdot (4 - x^2 - y^2) - (-2x)(-2x)}{(4 - x^2 - y^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 - 8}{(4 - x^2 - y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{-2x}{(4 - x^2 - y^2)^2} \cdot (-2y) = -\frac{4xy}{(4 - x^2 - y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2 \cdot (4 - x^2 - y^2) - (-2y)(-2y)}{(4 - x^2 - y^2)^2} = \frac{-2y^2 + 2x^2 - 8}{(4 - x^2 - y^2)^2}.$$

Диференціал другого порядку d^2z:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{-2(x^2 - y^2 + 4)dx^2 - 8xydxdy - 2(y^2 - x^2 + 4)dy^2}{(4 - x^2 - y^2)^2}.$$

Відповідь: $dz = \dfrac{-2xdx - 2ydy}{4 - x^2 - y^2}$,

$$d^2z = \frac{-2(x^2 - y^2 + 4)dx^2 - 8xydxdy - 2(y^2 - x^2 + 4)dy^2}{(4 - x^2 - y^2)^2}.$$

Приклад 2. Обчислити похідну y'_x неявної функції $\sin(xy) - e^x y - x^3 y = 0$.

Розв'язання.

Позначимо через $F(x, y) = \sin(xy) - e^x y - x^3 y$.

Знаходимо частинні похідні функції:

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = y\cos(xy) - ye^x - 3x^2 y,$$

$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = x\cos(xy) - e^x - x^3.$$

Похідну y'_x неявної функції знаходимо за формулою:

$$y'_x = -\frac{F_x'}{F_y'} = -\frac{y\cos(xy) - ye^x - 3x^2 y}{x\cos(xy) - e^x - x^3}.$$

Відповідь: $y'_x = -\dfrac{y\cos(xy) - ye^x - 3x^2 y}{x\cos(xy) - e^x - x^3}$.

Приклад 3. Обчислити похідні z'_x та z'_y неявної функції $e^z - x^5 y^3 - x - 3y + 2z - 1 = 0$.

Розв'язання.

Позначимо через $F(x, y, z) = e^z - x^5 y^3 - x - 3y + 2z - 1$.

Знаходимо частинні похідні функції:

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = -5x^4 y^3 - 1,$$

$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = -3x^5 y^2 - 3.$$

$$F'_z = \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 2.$$

Похідні z'_x та z'_y неявної функції $z = \varphi(x, y)$ знаходимо за формулами:

$$z'_x = -\frac{F_x'}{F_z'} = \frac{5x^4 y + 1}{e^z + 2}, \qquad z'_y = -\frac{F_y'}{F_z'} = \frac{3x^5 y^3 + 3}{e^z + 2}.$$

Відповідь: $z'_x = \dfrac{5x^4 y + 1}{e^z + 2}$, $\quad z'_y = \dfrac{3x^5 y^3 + 3}{e^z + 2}$.

Приклад 4. Обчислити похідну $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z = e^{2x-3y}, x = \text{tg}\, t,\ \ y = t^2 + t$.

Розв'язання.

Похідну $\frac{dz}{dt}$ визначаємо за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2e^{2x-3y} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} - 3e^{2x-3y}(2t+1) = e^{2x-3y}\left(\frac{2}{\cos^2 t} - 6t - 3\right) =$$

$$= e^{2tgt-3t^2-3t}\left(\frac{2}{\cos^2 t} - 6t - 3\right).$$

Відповідь: $\frac{dz}{dt} = e^{2tgt-3t^2-3t}\left(\frac{2}{\cos^2 t} - 6t - 3\right)$.

Приклад 5. Обчислити похідні $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$ складеної функції $z = x^2 \ln y,\ \ x = \frac{v}{u}$, $y = u^2 + v^2$.

Розв'язання.

Похідну $\frac{\partial z}{\partial u}$ визначимо за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2x\ln y \cdot \left(-\frac{v}{u^2}\right) + \frac{x^2}{y} \cdot 2u = 2\frac{v}{u} \cdot \ln(u^2 + v^2)\left(-\frac{v}{u^2}\right) +$$

$$+ \frac{v^2}{u^2(u^2+v^2)} \cdot 2u = -\frac{2v^2}{u^3}\ln(u^2+v^2) + \frac{2v^2}{u^3 + uv^2}.$$

Похідну $\frac{\partial z}{\partial u}$ визначимо за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} == 2x\ln y \cdot \frac{1}{u} + \frac{x^2}{y} \cdot 2v = 2\frac{v}{u} \cdot \ln(u^2+v^2) \cdot \frac{1}{u} +$$

$$+ \frac{v^2}{u^2(u^2+v^2)} \cdot 2v = \frac{2v}{u^2}\ln(u^2+v^2) + \frac{2v^3}{u^4 + u^2v^2}.$$

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{2v^2}{u^3}\ln(u^2+v^2) + \frac{2v^2}{u^3 + uv^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u^2}\ln(u^2+v^2) + \frac{2v^3}{u^4 + u^2v^2}.$$

Приклад 6. Дослідити функцію $z = x^3 + y^3 + 12xy$ на локальний екстремум.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 12y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 12x.$$

Стаціонарні точки функції визначаємо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 12y = 0, \\ 3y^2 + 12x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4}, \\ \left(-\dfrac{x^2}{4}\right)^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4}, \\ x(x^3 + 64) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -4, \\ y_2 = -4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ми знайшли дві стаціонарні точки $M_1(0,0)$ та $M_2(-4,-4)$. За необхідними умовами екстремуму він може бути тільки в цих точках. Перевіряємо виконання достатніх умов. Для цього знаходимо частинні похідні функції другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

У точці $M_1(0,0)$ маємо

$$A_1 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0,$$

$$B_1 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = 12,$$

$$C_1 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0.,$$

$$\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^{\ 2} = 0 \cdot 0 - 12^2 = -144 < 0.$$

Це означає, що точка $M_1(0,0)$ не є точкою екстремуму функції.

У точці $M_2(-4,-4)$ маємо

$$A_2 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 6 \cdot (-4) = -24,$$

$$B_2 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = 12,$$

$$C_2 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 6 \cdot (-4) = -24.,$$

$$\Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^{\ 2} = (-24) \cdot (-24) - 12^2 = 576 - 144 = 432 > 0.$$

Це означає, що точка $M_2(-4,-4)$ є точкою локального мінімуму функції $z = x^3 + y^3 + 12xy$.

Відповідь: точка $M_2(-4,-4)$ є точкою локального мінімуму функції.

Приклад 7. Знайти похідну $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}$ функції $u = 2\frac{y^4}{z^2} - 6x^3$ за напрямом вектора

Розв'язання.

Знаходимо модуль та напрямні косинуси вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = -\frac{1}{\sqrt{14}}, \quad , \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Обчислимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -18x^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{8y^3}{z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{4y^4}{z^3}.$$

Похідну $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}$ функції $u = 2\frac{y^4}{z^2} - 6x^3$ за напрямом вектора $\vec{a}\,(-2, -1, 3)$ знаходимо за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma =$$

$$= -18x^2\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right) + \frac{8y^3}{z^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) - \frac{4y^4}{z^3}\frac{3}{\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{36}{\sqrt{14}}x^2 - \frac{8}{\sqrt{14}}\frac{y^3}{z^2} - \frac{12}{\sqrt{14}}\frac{y^4}{z^3}.$$

Відповідь: $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{36}{\sqrt{14}}x^2 - \frac{8}{\sqrt{14}}\frac{y^3}{z^2} - \frac{12}{\sqrt{14}}\frac{y^4}{z^3}$.

Приклад 8. Знайти градієнт функції $u = \frac{x^3}{y^2} + 2y^4 \ln z$ у точці $M_0(2,\ -1, 1)$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2}{y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x^3}{y^3} + 8y^3 \ln z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2y^4}{z}.$$

Обчислимо значення похідних у точці $M_0(2,\ -1, 1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \frac{3\cdot 2^2}{(-1)^2} = 12,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -\frac{2\cdot 2^3}{(-1)^3} + 8\cdot(-1)^3 \ln 1 = 16,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \frac{2(-1)^4}{1} = 2.$$

$\text{grad}\, u(M_0) = 12\vec{i} + 16\vec{j} + 2\vec{k}$.

Відповідь: $\text{grad}\, u(M_0) = (12, 16, 2)$.

Приклад 9. Знайти найбільшу швидкість зростання поля $u = x^4 z^3 - 5y^2$ в точці $M_0(1, -1, 2)$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 z^3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -10y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3x^4 z^2.$$

Обчислимо значення похідних у точці $M_0(1, -1, 2)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 4 \cdot 1^3 \cdot 2^3 = 32,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -10 \cdot (-1) = 10,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 3 \cdot 1^4 \cdot 2^2 = 12.$$

$\text{grad}\, u(M_0) = 32\vec{i} + 10\vec{j} + 12\vec{k}$.

Найбільшу швидкість зростання поля $u = f(x, y, z)$ у точці M_0 знаходимо за формулою

$$\max \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}\right|_{M_0} = \left|\text{grad}\, u(M_0)\right| = \sqrt{32^2 + 10^2 + 12^2} = \sqrt{1268} = 2\sqrt{317}.$$

Відповідь: $2\sqrt{317}$.

3. Практичні завдання

3.1. Знайти диференціали dz і d^2z функцій:

1. $z = \dfrac{x^2 - 2y^3}{2x + y}$.

2. $z = e^{2x^3/3y^2}$.

3. $z = \sqrt{xy^3 - x^2y}$.

4. $z = \arcsin(x^2 - y^3)$.

5. $z = \ln(2x^3 + 3y^2)$.

6. $z = \dfrac{x - 3y}{3y^2 + 2x^3}$.

7. $z = e^{3y^2/4x^3}$.

8. $z = \sqrt{x^3y + y^4x}$.

9. $z = \arccos(x^2 + y^3)$.

10. $z = \ln(3x^2 - 2y^3)$.

11. $z = \dfrac{2x^3 + 3y^2}{x - 2y}$.

12. $z = e^{3x^4/2y^3}$.

13. $z = \sqrt{xy^4 - x^3y}$.

14. $z = \arcsin(x^3 - y^2)$.

15. $z = \ln(4x^3 - 3y^4)$.

16. $z = \dfrac{3x^2 + y^3}{x + 3y}$.

17. $z = e^{3y^4/4x^2}$.

18. $z = \sqrt{xy^2 + x^4y}$.

19. $z = \arccos(x^3 + y^2)$.

20. $z = \ln(2x^3 - 3y^3)$.

21. $z = \dfrac{3x^3 + 2y^3}{x + 2y}$.

22. $z = e^{4x^2/3y^4}$.

23. $z = \sqrt{xy^3 - x^4 y}$.

24. $z = \arcsin(x^2 + y^4)$.

25. $z = \ln(3x^4 + 2y^3)$.

3.2. Обчислити похідну y'_x неявної функції:

1. $x^2 y + xy^3 - xe^{y^2} + 2 = 0$.

2. $x \sin xy - x^2 y^3 + y^2 - 3 = 0$.

3. $x^3 y^3 + x^2 \cos y^3 - 3xy + 1 = 0$.

4. $\dfrac{x^4}{y^2} - x^3 \ln y^2 + xy - 4 = 0$.

5. $x^2 e^y + x^3 y - 3y^2 + 2x - 1 = 0$.

6. $x^4 \sin xy^2 + y^2 x^2 - 3xy - 2 = 0$.

7. $x^3 e^{y^2} - 2xy + \dfrac{y^3}{x} + 3 = 0$.

8. $\ln \dfrac{x}{y} - x^3 y^2 + 4y - 3x + 5 = 0$.

9. $\cos yx^3 + \dfrac{y^2}{x^2} - 2xy + 4 = 0$.

10. $x^2 y^3 - \sin \dfrac{y}{x} + 3x^3 - 2y + 1 = 0$.

11. $e^{xy} + 3xy^2 - \dfrac{x^2}{y} - x + 2 = 0$.

12. $\dfrac{y^3}{x^2} - \ln(3x + y^2) - xy + 3 = 0$.

13. $x^3 y^2 - x^2 y^3 + xe^{y^3} - 4 = 0$.

14. $x^4 \cos y^2 + x^3 y^2 + 3y^4 + 2 = 0$.

15. $x^2 y^4 - 2x^3 \sin xy^3 + 4xy^2 - 3 = 0$.

16. $\frac{y^4}{x^3} + x^2 \ln y^3 + 5x - 3y + 1 = 0$.

17. $x^4 e^{3y} - 2x^2 y^3 + y^2 - x - 2 = 0$.

18. $x^2 \sin xy^4 - 4y^3 x^5 + 2xy + 5 = 0$.

19. $x^4 e^{y^3} + 3xy + \frac{y^2}{x} + 5y - 1 = 0$.

20. $\ln \frac{y}{x} + 2x^2 y^3 - 4y + 2x - 6 = 0$.

21. $\sin x^4 y + \frac{y^3}{x^5} + 3xy - 7 = 0$.

22. $3x^5 y^2 + 2\cos \frac{x}{y} - 4y^3 + 5x - 3 = 0$.

23. $e^{x-y} - 4xy^2 + \frac{y^4}{x^3} + 3y + 2 = 0$.

24. $\frac{x^4}{y^3} - \ln(2x - 3y^3) + 4xy - 5 = 0$.

25. $4x^4 y^5 + 3x^3 y^4 - 2xe^{y^4} + 6 = 0$.

3.3. Обчислити похідні z'_x та z'_y неявної функції:

1. $e^z + x^3 y^2 + 2x - 3y - 4z + 5 = 0$.

2. $\ln z - \frac{\sqrt{x}}{y} - 5x + 2y + 7z - 2 = 0$.

3. $3y^4 x^2 - \cos z - 4x + y + z^3 - 6 = 0$.

4. $\sin z + \frac{y}{x^2} + 2z^2 + 5y + 6x - 1 = 0$.

5. $x^2 - 3y^2 + \arcsin z + 4x + 2y - z + 2 = 0$.

6. $x \sin y + y \sin z + z \sin x - 3 = 0$.

7. $z^3y + 2zx - \frac{y^3}{x} + x^5 + 5 = 0$

8. $z\sin(x+y) - e^z + y^2 - 2x + 4 = 0$.

9. $2y^2 - 3x^3 + z^4 + 4xyz - 2 = 0$.

10. $\frac{z}{x^4} + 2y^2z - 4x^3 + 5y - 3 = 0$.

11. $\operatorname{tg} z - x^2y + \ln x - 3y^3 + 2z + 1 = 0$.

12. $4y^2 - 2z + 3x^3 + \arcsin z - xy + 3 = 0$.

13. $\frac{x^3}{y} + e^{3z} + z - 5x + 6y + 4 = 0$.

14. $x\ln z - \frac{1}{3}xyz + y^3 + 2 = 0$.

15. $4x - y^2z + \frac{2x}{y} - \operatorname{ctg} z + 1 = 0$.

16. $x^4z - e^{2z} + x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

17. $\frac{x^2}{y^2} - 2y^3 + z^3 + \arccos z - 3 = 0$.

18. $y^2 + x^2z + \ln z - \frac{y}{z} - 2 = 0$.

19. $x\cos y + y\cos z - 4x + 2z - 5 = 0$.

20. $\sqrt{x^2 + y^2} + xy - 2z + z^2 - 4 = 0$.

21. $3x^2 - 2y^2 - z^2 + \frac{xy}{z} + 1 = 0$.

22. $\sin x\sin y - e^{z+2} - 2x^3z + 5 = 0$.

23. $\cos 4z + x - 2y + z^2 - 4\frac{y}{x} - 3 = 0$.

24. $3x^2y^2 + 2xyz^2 - x^3z - 5y^3 - 4\ln x = 0$.

25, $\frac{x}{y^2} + e^x\arcsin z + 3xyz + 3y - 7 = 0$.

3.4. Обчислити похідну $\frac{dz}{dt}$ складеної функції:

1. $z = e^{3x-4y}$; $x = \cos 4t$, $y = t^2 - t$.

2. $z = \arcsin(y - 2x)$; $x = 3t^2 - 2$, $y = \sqrt{2t+1}$.

3. $z = \ln(2x + 3y)$; $x = e^{4t}$, $y = \sin 2t$.

4. $z = \operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$; $x = \ln 3t$, $y = 2 + \cos t$.

5. $z = \cos(x^3 y^2)$; $x = e^{-5t}$, $y = 3t^4 - 2$.

6. $z = e^{2x/y}$; $x = t^3 + 2t$, $y = \cos 4t$.

7. $z = \arccos(2x + y)$; $x = e^{3t}$, $y = e^{-3t}$.

8. $z = \ln(3x - 2y)$; $x = \cos 2t$, $y = t^2 + 4$.

9. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; $x = \sin t^2$, $y = e^{2t}$.

10. $z = \sin(x^4 y^3)$; $x = \ln 2t$, $y = 1 - \operatorname{ctg} t$.

11. $z = e^{x^2 y^3}$; $x = 3t^4 - 2$, $y = \cos 2t$.

12. $z = \arcsin\frac{x}{y}$; $x = 2t^3$, $y = e^{4t} + 2$.

13. $z = \ln(2x + 3y)$; $x = \cos t^2$, $y = \operatorname{tg} 3t$.

14. $z = \operatorname{arctg}(x - 2y)$; $x = e^{3t}$, $y = t^2 + 2t$.

15. $z = \operatorname{ctg}(x^2 + y^2)$; $x = \ln 3t$, $y = \sin 2t$.

16. $z = e^{3x-4y}$; $x = 3t^2 + 1$, $y = 2 + \ln t$.

17. $z = \arccos(x^3 y^2)$; $x = e^{-2t}$, $y = 2t^3 - t$.

18. $z = \operatorname{tg}\frac{y}{x^2}$; $x = \ln t$, $y = \cos 3t$

19. $z = \operatorname{arcctg}(x - y^2)$; $x = t^2 - 1$, $y = \sin t$.

20. $z = \sin\frac{\sqrt{x}}{y}$; $x = 2 - t^4$, $y = e^{2t}$.

21. $z = e^{2y+3x}$; $x = \sin t$, $y = \sqrt{4 + t^2}$.

22. $z = \arcsin(y - x); \quad x = \cos^2 t, \quad y = 3t^2 - 2$.

23. $z = \ln(3x - 4y); \quad x = \sqrt{t^2 - 3}, \quad y = \mathrm{tg}\, t$.

24. $z = \mathrm{arctg}\, x\sqrt{y}; \quad x = e^{-t}, \quad y = \ln 3t$.

25. $z = \cos(y^2 - 3x); \quad x = t^3 + 4t, \quad y = \mathrm{ctg}\, 2\mathrm{t}$.

3.5. Обчислити похідні $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$ складеної функції:

1. $z = x^3 y - y^3 x; \quad x = u\cos v^3, \quad y = v^2 \sin u$.

2 $z = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^3}{x^3}; \quad x = u^3 \ln v, \quad y = \frac{u^2}{v^2}$.

3. $z = \frac{xy}{x - y}; \quad x = ue^v, \quad y = \frac{v^4}{u^3}$.

4. $z = x^3 \ln y; \quad x = \frac{v^2}{u}, \quad y = 2u^2 - 3v^3$.

5. $z = y^3 e^{x^2}; \quad x = v^2 \cos u, \quad y = u^2 \sin v$.

6. $z = x^2 y^3 - y^2 x^3; \quad x = v\sin u^2, \quad y = v^3 \cos u$.

7. $z = \frac{y^3}{x^2} - \frac{x^2}{y^3}; \quad x = v^2 \ln u, \quad y = u^2 - v^2$.

8. $z = \frac{xy}{3x + 2y}; \quad x = v^2 e^u, \quad y = u^3 - v^3$.

9. $z = \frac{\ln y}{x^2}; \quad x = u^2 v^3, \quad y = \frac{u^3}{v^2}$.

10. $z = x^2 e^{y^3}; \quad x = \frac{\sin u}{v}, \quad y = \frac{\cos v}{u}$.

11. $z = \frac{x^2 + y}{x - y^2}; \quad x = u^2 e^v, \quad y = v^3 - u^2$.

12. $z = \frac{x^3}{y} - \frac{y^2}{x}; \quad x = \frac{u^2}{\ln v}, \quad y = u^3 v^2$.

13. $z = x^4 y^3 + y^2 x^3; \quad x = \dfrac{\cos u}{v}, \quad y = \dfrac{\sin v}{u}.$

14. $z = \dfrac{\ln y}{x + y}; \quad x = \dfrac{v^3}{u^2}, \quad y = 3u^4 + 4v^3.$

15. $z = \dfrac{e^{y^2}}{x^3}; \quad x = \sin(u + v), \quad y = \cos(v - u).$

16. $z = x^5 y^2 + y^4 x^2; \quad x = \cos uv, \quad y = \sin\dfrac{u}{v}.$

17. $z = \dfrac{x^4}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^5}; \quad x = \ln uv, \quad y = \ln(u - v).$

18. $z = \dfrac{x^3 - y}{x + y^2}; \quad x = u^4 e^v, \quad y = \dfrac{v}{u^2}.$

19. $z = \dfrac{x^2}{\ln y}; \quad x = u^2 - v^2, \quad y = u^2 + v^2.$

20. $z = \dfrac{x^4}{e^{y^2}}; \quad x = \dfrac{\cos v}{u}, \quad y = \dfrac{\sin u}{v}.$

21. $z = x^3 y^4 + 2y^3 x^2; \quad x = \cos\dfrac{u}{v}, \quad y = \sin\dfrac{v}{u}.$

22. $z = \dfrac{x^5}{y^2} + \dfrac{y^4}{x^2}; \quad x = \ln(u + v), \quad y = u^2 v^3.$

23. $z = \dfrac{x + y^2}{x^2 - y}; \quad x = u^3 v^3, \quad y = \dfrac{v^2}{u^2}.$

24. $z = x^4 \ln y^2; \quad x = 4u^2 - 3v^4, \quad y = \dfrac{u^2}{v^3}.$

25. $z = y^4 e^{x^3}; \quad x = v^5 \sin u, \quad y = \cos uv.$

3.6. Дослідити функцію на локальний екстремум:

1. $z = x^3 + y^3 - 12xy.$
2. $z = x^2 - 2xy + 4y^3.$
3. $z = x - 2y - xy - \ln x + 2\ln y.$

4. $z = 2x^3 + 2y^3 - 3xy$.

5. $z = xy - \frac{y^2}{2} - 2x^3$.

6. $z = -y + 2x + xy + \ln y - 2\ln x$.

7. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy$.

8. $z = \frac{x^2}{2} - xy + 2y^3$.

9. $z = y - 2x - xy - \ln y + 2\ln x$.

10. $z = -x^3 - y^3 + 3xy$.

11. $z = 2xy - x^2 - 2y^3$.

12. $z = -x + 2y + xy + \ln x - 2\ln y$.

13. $z = 3xy - 2x^3 - 2y^3$.

14. $z = xy - \frac{x^2}{2} - 2y^3$.

15. $z = e^{2y}(y + x^2 + 2x)$.

16. $z = 6xy - 2x^3 - 2y^3$.

17. $z = x^2 - 2xy + 2y^3$.

18. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

19. $z = x^3 + y^3 - 9xy$.

20. $z = 2xy - y^2 - 4x^3$.

21. $z = e^{2y}(-x^2 - 2x - y)$.

22. $z = 12xy - 3x^3 - 3y^3$.

23. $z = \frac{y^2}{2} - xy + 2x^3$.

24. $z = e^{2x}(-y^2 - x - 2y)$.

25. $z = 2xy - y^2 - 2x^3$.

3.7. Знайти похідну $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}$ функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$:

1. $u = -\frac{z^3}{2x^2} - y^3$, $\vec{a}\ (-1, -1, 1)$.

2. $u = \frac{x^4}{2y^2} - 3z^2$, $\vec{a}\ (-1, 2, 3)$.

3. $u = 3\frac{y^4}{z^2} + 2x^3$, $\vec{a}\ (1, -3, 2)$.

4. $u = \frac{z^6}{2y} + x^4$, $\vec{a}\ (-2, 3, 1)$.

5. $u = \frac{x^2}{4z} + 3y^3$, $\vec{a}\ (4, 1, -1)$.

6. $u = 2x^4 + 3\frac{y^2}{z}$, $\vec{a}\ (-1, 1, 3)$.

7. $u = 2z^3 - 3\frac{y^2}{x^3}$, $\vec{a}\ (-2, 1, 1)$.

8. $u = 3x^2 + 2\frac{z^3}{y}$, $\vec{a}\ (-1, 1, 2)$.

9. $u = 4z^3 + 2\frac{y^2}{x^2}$, $\vec{a}\ (-2, -1, 1)$.

10. $u = 4\frac{z^2}{y^3} + 3x^4$, $\vec{a}\ (-3, 1, 2)$.

11. $u = -2\frac{z^2}{x} + 3y^3$, $\vec{a}\ (2, -2, -1)$.

12. $u = 6\frac{y^3}{x} + 5z^4$, $\vec{a}\ (-1, -2, -1)$.

13. $u = -4\frac{z^2}{y} - 2x^3$, $\vec{a}\ (1, -2, 3)$.

14. $u = 2\dfrac{x^4}{z^2} - y^3, \quad \vec{a}\,(-1, 1, -2)$.

15. $u = 6\dfrac{x^2}{y} - 5z^2, \quad \vec{a}\,(-1, -1, 1)$.

16. $u = 4z^2 - \dfrac{x^3}{y^2}, \quad \vec{a}\,(1, 1, -1)$.

17. $u = 3x^4 + \dfrac{y^2}{z^2}, \quad \vec{a}\,(-1, -1, -1)$.

18. $u = -z^3 - 5\dfrac{x^2}{y}, \quad \vec{a}\,(-2, 1, -1)$.

19. $u = 3y^2 + \dfrac{z^2}{x^2}, \quad \vec{a}\,(-2, 1, -1)$.

20. $u = \dfrac{z^2}{x^2} + 4y^2, \quad \vec{a}\,(-1, -1, -2)$.

21. $u = \dfrac{6x^2}{y} + z^3, \quad \vec{a}\,(-1, -2, 1)$.

22. $u = \dfrac{y^3}{z^2} - 4x^2, \quad \vec{a}\,(-1, 1, -2)$.

23. $u = \dfrac{2z^2}{x^2} + y^3, \quad \vec{a}\,(-1, -2, -1)$.

24. $u = \dfrac{z^3}{3y^2} - x^3, \quad \vec{a}\,(-1, -1, 2)$.

25. $u = -\dfrac{x^3}{2z^2} + y^4, \quad \vec{a}\,(-1, 2, -2)$.

3.8. Знайти градієнт функції $u = f(x, y, z)$ у точці M_0:

1. $u = -z^4 y^3 + 3x^2, \quad M_0(1, 2, -1)$.

2. $u = 4z^2 y^4 - x^3, \quad M_0(-1, 1, 3)$.

3. $u = -x^3 y^4 - 3z^3, \quad M_0(1,-1,2)$.

4. $u = 3z^2 y^4 - x^3, \quad M_0(2,2,-1)$.

5. $u = x^5 y^3 - 3z^4, \quad M_0(2,-1,1)$.

6. $u = 2z^4 + x^3 y^2, \quad M_0(-1,3,1)$.

7. $u = -z^3 - 2x^3 y^2, \quad M_0(2,1,2)$.

8. $u = 3z^5 y^2 + x^4, \quad M_0(3,-1,-1)$.

9. $u = z^5 y^3 - 2x^2, \quad M_0(2,1,-1)$.

10. $u = 4x^2 y^5 + z^4, \quad M_0(-1,-3,-1)$.

11. $u = z^4 y^2 + 3x^5, \quad M_0(3,1,1)$.

12. $u = 2x^5 y^3 + z^4, \quad M_0(-2,-1,-1)$.

13. $u = z^4 - 4x^5 y^2, \quad M_0(1,-1,3)$.

14. $u = 5y^3 - x^2 z^2, \quad M_0(-1,-1,1)$.

15. $u = 4z^3 - x^2 y^2, \quad M_0(1,2,-1)$.

16. $u = 3z^2 y^3 - x^3, \quad M_0(-2,1,-1)$.

17. $u = z^3 x^2 + 5y^2, \quad M_0(-1,-2,-1)$.

18. $u = -2x^3 y^2 - z^2, \quad M_0(3,-1,1)$.

19. $u = z^2 y^3 - 6x^2, \quad M_0(-2,1,1)$.

20. $u = 2x^2 y^3 - z^2, \quad M_0(-1,-1,3)$.

21. $u = z^5 y^2 - 4x^3, \quad M_0(-1,3,-1)$.

22. $u = -3z^4 y^2 + x^5, \quad M_0(-1,1,-3)$.

23. $u = 5x^4 y^3 - z^2, \quad M_0(-1,-1,-2)$.

24. $u = -4z^4y^2 + x^2, \quad M_0(-2,1,-1)$.

25. $u = -x^3y^2 - 2z^5, \quad M_0(2,1,2)$.

3.9. Знайти найбільшу швидкість зростання поля $u = f(x,y,z)$ у точці M_0:

1. $u = \dfrac{x^3}{z^2} + y^2, \quad M_0(1,2,-1)$.

2. $u = xy^2 - \dfrac{z^2}{x^2}, \quad M_0(-1,-1,-1)$.

3. $u = \dfrac{z^3}{x^2} - y^4, \quad M_0(1,-1,-1)$.

4. $u = x\ln y + \dfrac{z^2}{x^2}, \quad M_0(2,1,1)$.

5. $u = \dfrac{x^2}{y^3} - y^2\ln z, \quad M_0(-2,\ 1,\ 1)$.

6. $u = \dfrac{x^3}{y^2} - 2e^z, \quad M_0(2,\ 1,\ \ln 3)$.

7. $u = \dfrac{e^x}{y^2} + z^2, \quad M_0(\ln 2,\ 3,-1)$.

8. $u = \dfrac{z^4}{x^3} + xe^y, \quad M_0(-2,\ \ln 3,\ 1)$.

10. $u = \dfrac{x^2}{y^4} - ye^z, \quad M_0(-1,\ 2,\ \ln 2)$.

11. $u = \dfrac{x^2z^4}{y^2} + 2\ln y, \quad M_0(3,1,\ 2)$.

12. $u = \ln z - \dfrac{y^2z^4}{x^2}, \quad M_0(1,-2,\ 1)$.

13. $u = \dfrac{x^3}{z^3} + ze^y, \quad M_0(-1, \ln 2, 1)$.

14. $u = \dfrac{\ln x}{y^2} + yz^2, \quad M_0(1, 2, 2)$.

15. $u = -\dfrac{y^3}{z^2} + x^2, \quad M_0(-2, 2, -1)$.

16. $u = zx^2 + \dfrac{y^2}{z^2}, \quad M_0(1, -1, -2)$.

17. $u = \dfrac{y^3}{z^2} + x^4, \quad M_0(-1, -1, 1)$.

18. $u = y \ln x - \dfrac{z^2}{y^2}, \quad M_0(1, 1, 2)$.

19. $u = \dfrac{y^2}{x^3} + x^3 \ln z, \quad M_0(-2, -2, 1)$.

20. $u = \dfrac{y^3}{x^2} + 3xe^z, \quad M_0(1, 2, \ln 2)$.

21. $u = \dfrac{e^x}{z^2} - 2y^3, \quad M_0(\ln 3, 2, 1)$.

22. $u = \dfrac{x^4}{z^3} + ze^y, \quad M_0(-1, \ln 2, 1)$.

23. $u = \dfrac{y^4}{x^3} - ye^z, \quad M_0(2, -2, \ln 3)$.

24. $u = \dfrac{y^2 z^3}{x^2} - 3 \ln y, \quad M_0(2, 1, -2)$.

25. $u = yz^2 + \dfrac{z}{x^2}, \quad M_0(-1, -1, -2)$.

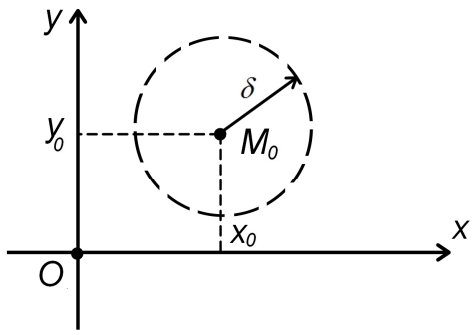
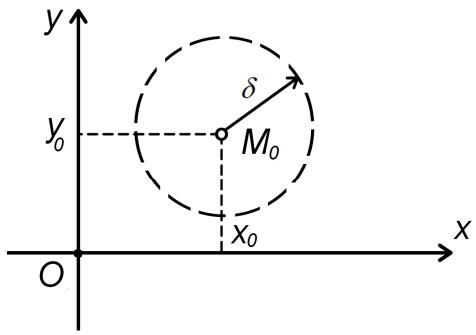
Бібліографічний опис

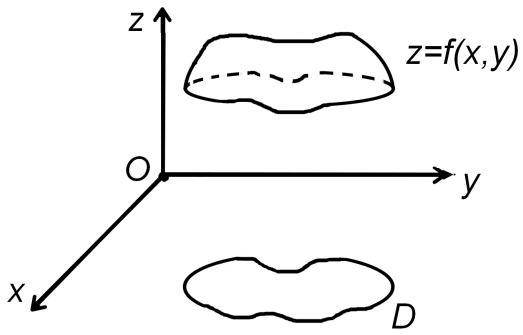
1. Вища математика: підручник / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків [та ін.]; за ред. М. І. Шинкарика. Тернопіль: Вид-во Карп'юка, 2003. 480с.
2. Вища математика: збірник задач / за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ: Вид-во А.С.К., 2003. 480 с.
3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Р. В. Коляда, Я. С. Пушак, І. О. Мельник. Львів: Магнолія 2006, 2010. 332 с.
4. Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. Вища математика: [навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.]: У 2 ч. Ч. 2. Київ: ЗАТ «Віпол»: НТУ «КПІ», 2003. 399 с.
5. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. Київ: А.С.К., 2006. 648 с.
6. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1. Київ: Техніка, 2000. 592 с.

Додаток. Основні формули та означення

Функції двох змінних

Основні поняття	Означення
Відстань між точками	$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

δ - окіл точки M_0	***Виколотий δ - окіл точки M_0***
$O_\delta(M_0) = \{M \in \boldsymbol{R}^2 : \rho(M_0, M) < \delta\}$	$\dot{O}_\delta(M_0) = O_\delta(M_0) \setminus \{M_0\}$
	

Функція двох змінних	Якщо кожній точці $(x, y) \in D \subset \boldsymbol{R}^2$ за певним правилом або законом відповідає єдине число $z \in \boldsymbol{R}$, то кажуть, що задано функцію $z = f(x, y)$.	
Графік функції двох змінних	Множина точок $P(x, y, f(x, y)) \in \boldsymbol{R}^3$, де $(x, y) \in D \subset \boldsymbol{R}^2$	
Границя функції двох змінних	$\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x, y) = A \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, M_0) > 0\ \forall M \in \dot{O}_\delta(M_0) \Rightarrow \lvert f(M) - A \rvert < \varepsilon$	

Повторні границі	$B=\lim\limits_{y\to y_o}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$ $C=\lim\limits_{x\to x_o}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$	Взагалі $B\neq C$.Якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}} f(x,y)=A$, то $B=C=A$
Частинні прирости по x та y	$z=f(x,y),\ M_0(x_0,y_0),\ \Delta x=x-x_0,\ \Delta y=y-y_0,$ $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$ $\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$	
Повний приріст функції	$z=f(x,y),\ M_0(x_0,y_0),\ \Delta x=x-x_0,\ \Delta y=y-y_0,$ $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$	
Неперервність функції двох змінних	$\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$	
	$\lim\limits_{M\to M_0}\Delta z=0$	

Частинні похідні та диференціали функцій багатьох змінних

Основні поняття	Означення
Частинна похідна за змінною x	$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$
Частинна похідна за змінною y	$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$
Функція, диференційовна в точці M_0	$z=f(x,y),\ M_0(x_0,y_0),$ $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$ $A,B\in\boldsymbol{R},\ \alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y),\ \beta=\beta(\Delta x,\Delta y),\ \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta=0$

Необхідні умови диференційовності: Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці M_0, то $A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{M_0}$, $B = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{M_0}$	***Достатні умови диференційовності:*** Якщо функція $z = f(x, y)$ має в околі точки M_0 неперервні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, то вона диференційовна в цій точці.

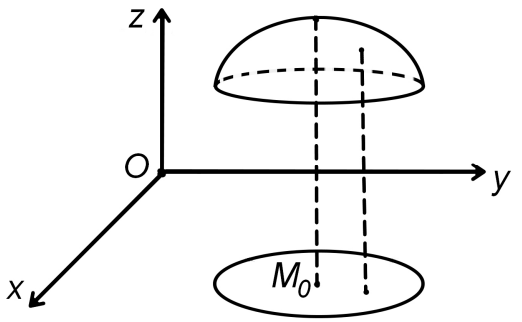
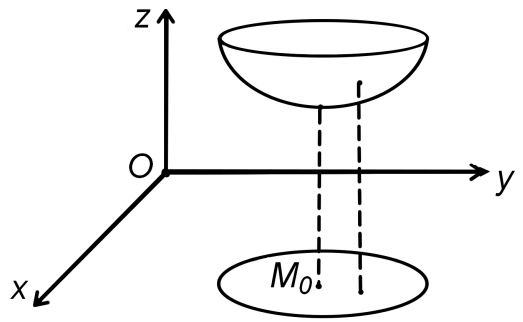
Повний диференціал диференційовної в точці M_0 функції	$z = f(x, y)$, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$	
	$u = f(x, y, z)$, $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$	
Частинні похідні другого порядку	$z = f(x, y)$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ або $z''_{xx} = (z'_x)'_x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ або $z''_{yy} = (z'_y)'_y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ або $z''_{xy} = (z'_x)'_y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ або $z''_{yx} = (z'_y)'_x$.	***Рівність мішаних похідних (теорема Шварца)*** $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\|_{M_0} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right\|_{M_0}$, якщо вказані похідні неперервні у точці M_0
Частинні похідні вищих порядків	$\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}} = \frac{\partial^{n-p}}{\partial^{n-p} y}\left(\frac{\partial^p z}{\partial x^p}\right)$ – частинна похідна *n*-го порядку (функція спочатку *p* разів диференціюється по *x*, потім *n-p* разів по *y*)	
Диференціали вищих порядків	$z = f(x, y)$ (x, y – незалежні змінні), $d^2 z = d(dz)$	

	$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$ $$d^n z=d(d^{n-1}z)$$ $$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$ де $d=\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy$ – оператор диференціювання

Диференціювання різних функцій

Спосіб задання функції	Вид функції	Формула для диференціювання
Неявно задана функція	$F(x,y)=0$, де $y=\varphi(x)$	$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$
	$F(x,y,z)=0$, де $z=\varphi(x,y)$	$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}$, $z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}$
Складена функція	$z=f(x,y),\ x=x(t),\ y=y(t)$	$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$
	$z=f(x,y),\ x=x(u,v),\ y=y(u,v)$	$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$ $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

Локальний екстремум функції двох змінних

M_0 – точка локального максимуму	***M_0 – точка локального мінімуму***
$\forall M \in \dot{O}_\delta(M_0) \Rightarrow f(M) < f(M_0)$	$\forall M \in \dot{O}_\delta(M_0) \Rightarrow f(M) > f(M_0)$
	

Необхідні умови локального екстремуму диференційовної функції

Якщо $M_0(x_0, y_0)$ – точка екстремуму функції $z = f(x, y)$, то $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$.

У цьому випадку M_0 – стаціонарна точка функції.

Достатні умови локального екстремуму двічі диференційовної функції

Нехай $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}$, $B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}$, $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$, $\Delta = AC - B^2$

$\Delta > 0$	$A > 0$	$M_0(x_0, y_0)$ – точка мінімуму
	$A < 0$	$M_0(x_0, y_0)$ – точка максимуму
$\Delta < 0$	екстремуму в точці $M_0(x_0, y_0)$ немає	
$\Delta = 0$	необхідні додаткові дослідження	

Похідна за напрямом. Градієнт

Основні поняття	Означення
Напрямні косинуси вектора	$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\cos\alpha = \frac{a_x}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{\lvert\vec{a}\rvert}$, , $\cos\gamma = \frac{a_z}{\lvert\vec{a}\rvert}$, де $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$
Орт вектора	$\vec{a}^{\,0}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – орт вектора $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$
Похідна за напрямом	$u = f(x, y, z)$, $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$
Градієнт функції	$u = f(x, y, z)$, $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$
Зв'язок між похідною за напрямом і градієнтом функції $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{a}^{\,0}$	
Найбільша швидкість зростання поля $u = f(x, y, z)$ ***у точці*** M_0 $\max \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}\right\rvert_{M_0} = \lvert\operatorname{grad} u(M_0)\rvert$	

Підписано до друку .Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 2 Тираж прим.

ПП «Ліра ЛТД», вул.Наукова, 5, м. Дніпро, 49107
Свідоцтво про внесення до державного реєстру
Серія ДК № 6042 від 26.02.2018 р