**Міністерство освіти і науки України**
**Дніпровський національний університет**
**імені Олеся Гончара**

**Кафедра математичного аналізу і теорії функцій**

# ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ЗА ТЕМОЮ «ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

**Дніпро**

**2021**

Наведені основні методи розв’язування задач на інтегральне числення функцій багатьох змінних. Для студентів університету, що вивчають курси «Вища математика» і «Математичний аналіз».

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету (протокол № 7 від 16 лютого 2021р.)

Рецензенти:

**А. В. Тушев**, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри геометрії і алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
**В. М. Косарєв**, канд. тех. наук, доцент кафедри інформаційних технологій Університету імені Альфреда Нобеля

**Практикум з вищої математики за темою**
**«Інтегральне числення функцій багатьох змінних»**

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. Р. О. Біліченко
канд. фіз.-мат. наук, доц. М. Б. Вакарчук

© Біліченко Р. О., Вакарчук М. Б. 2021

# Передмова

Інтегральне числення функцій багатьох змінних є важливим розділом курсу вищої математики, який застосовується в багатьох прикладних задачах природознавства і техніки.

Перша частина видання являє собою опорний конспект, який складається з основних формул і понять. Головну увагу приділено формуванню практичних навичок розв'язання задач. Матеріал систематизовано й поділено на частини таким чином, щоб можна було легко знайти необхідну формулу або визначення. У другій частині вміщено варіанти завдань для індивідуального виконання.

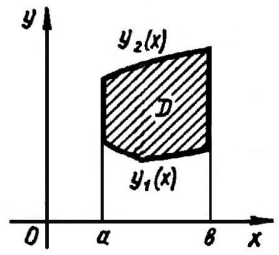
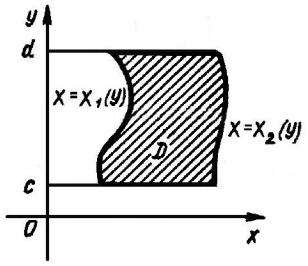
# 1. Інтеграли від функції багатьох змінних

## 1.1. Подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim_{max\ d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k,$$

де $(\xi_k,\eta_k) \in S_k$, $d_k$ – діаметр елементарної області $S_k$, $\Delta S_k$ – площа елементарної області $S_k$.

***Зведення до повторного***

| | | |
|---|---|---|
|  | $a \le x \le b,$<br>$y_1(x) \le y \le y_2(x)$ | $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ |
|  | $c \le y \le d,$<br>$x_1(y) \le x \le x_2(y)$ | $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ |

***Заміна змінних***

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|du\,dv,$$

де $J(u,v)$ – якобіан перетворення:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

## 1.2. Криволінійні інтеграли

***Криволінійні інтеграли першого роду***

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{max\ \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k,$$

де $ds$ – диференціал довжини дуги, $(\xi_k,\eta_k) \in A_{k-1}A_k$, $\Delta l_k$ – довжина дуги $A_{k-1}A_k$.

***Криволінійні інтеграли другого роду***

$$\int_L P(x,y)dx = \lim_{max\ \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k,$$

$$\int_L Q(x,y)dy = \lim_{max\ \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k,$$

де $(\xi_k,\eta_k) \in A_{k-1}A_k$, $\Delta l_k$ – довжина дуги $A_{k-1}A_k$

$$\int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

***Обчислення криволінійних інтегралів***

| | |
|---|---|
| $x = x(t);\ y = y(t)$<br>$\alpha \le t \le \beta$ | $\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ |
| | $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt$ |
| $y = y(x)$<br>$a \le x \le b$ | $\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ |
| | $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x))dx$ |
| $x = x(y)$<br>$c \le y \le d$ | $\int_L f(x,y)ds = \int_c^d f(y,x(y))\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$ |
| | $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d (P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y))\,dy$ |

***Формула Гріна***

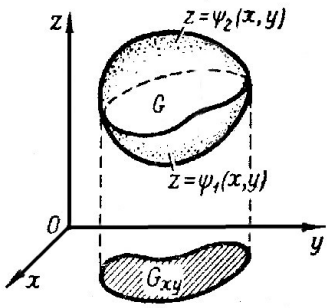
$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

## 1.3. Потрійний інтеграл

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \lim_{max\ d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \gamma_k)\Delta V_k ,$$

де $(\xi_k, \eta_k, \gamma_k) \in V_k$, $d_k$ – діаметр елементарної області $V_k$, $\Delta V_k$ – об'єм елементарної області $V_k$.

***Обчислення потрійного інтегралу***




$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iint_{G_{xy}} dxdy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz ,$$

де $G_{xy}$ - проекція правильної області G на площину $xOy$. $z = \psi_1(x,y)$ та $z = \psi_2(x,y)$ – рівняння нижньої та верхньої поверхні, що обмежують область $G$.

***Заміна змінних***

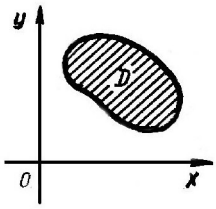
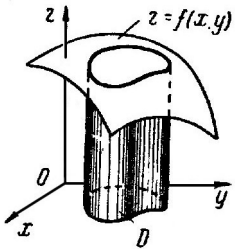
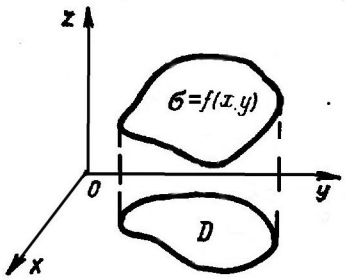
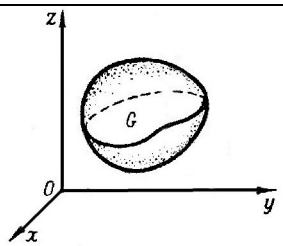
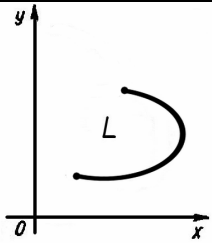
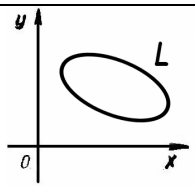
$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| J(u,v,w) \right| du\,dv\,dw ,$$

де $J(u,v,w)$ – якобіан перетворення:

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} .$$

## 1.4. Деякі застосування кратних та криволінійних інтегралів

### *Застосування в геометрії*

| | | |
|---|---|---|
| Площа області |  | $S = \iint\limits_D dxdy$ |
| Об'єм циліндричного тіла |  | $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ |
| Площа поверхні σ |  | $S_\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy$ |
| Об'єм тіла |  | $V = \iiint\limits_G dxdydz$ |
| Довжина кривої |  | $l = \int\limits_L ds$ |
| Площа області, обмеженої кривою |  | $S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$ |

## *Застосування до задач механіки*

### *Крива з лінійною густиною* $\gamma = \gamma(x, y)$

| Маса | Моменти інерції | Статичні моменти | Центр маси |
|---|---|---|---|
| $m = \int\limits_L \gamma(x, y)ds$ | $I_x = \int\limits_L y^2\gamma(x, y)ds$<br>$I_y = \int\limits_L x^2\gamma(x, y)ds$<br>$I_0 = \int\limits_L (x^2 + y^2)\gamma(x, y)ds$ | $M_x = \int\limits_L y\gamma(x, y)ds$<br>$M_y = \int\limits_L x\gamma(x, y)ds$ | $x_c = \dfrac{M_y}{m}$<br>$y_c = \dfrac{M_x}{m}$ |

### *Пластина з поверхневою густиною* $\gamma = \gamma(x, y)$

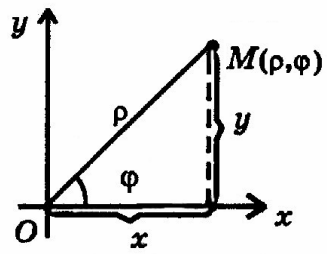
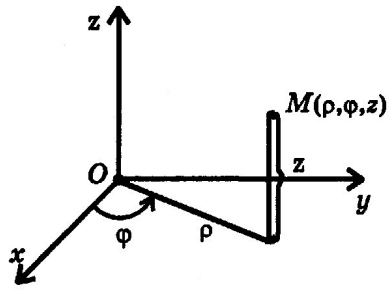
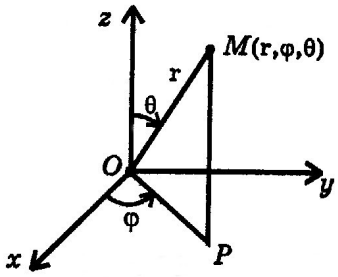
| Маса | Моменти інерції | Статичні моменти | Центр маси |
|---|---|---|---|
| $m = \iint\limits_D \gamma(x, y)dxdy$ | $I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x, y)dxdy$ | $M_x = \iint\limits_D y\gamma(x, y)dxdy$<br>$M_y = \iint\limits_D x\gamma(x, y)dxdy$ | $x_c = \dfrac{M_y}{m}$<br>$y_c = \dfrac{M_x}{m}$ |
| | $I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\gamma(x, y)dxdy$ | | |

### *Тіло з об'ємною густиною* $\gamma = \gamma(x, y, z)$

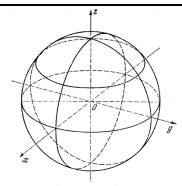
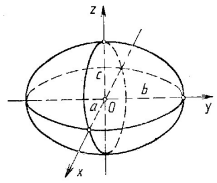
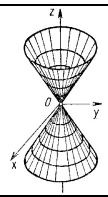
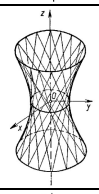
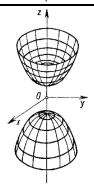
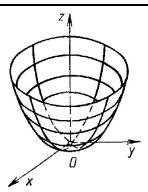
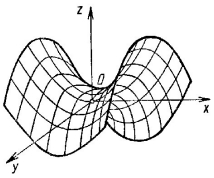
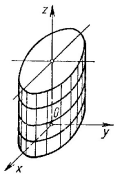
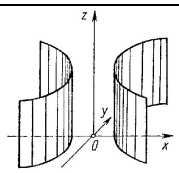
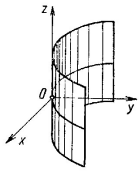
| Маса | Моменти інерції |
|---|---|
| $m = \iiint\limits_G \gamma(x, y, z)dxdydz$ | $I_x = \iiint\limits_G (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz$<br>$I_y = \iiint\limits_G (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz$<br>$I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dxdydz$ |
| | $I_{xy} = \iiint\limits_G z^2\gamma(x, y, z)dxdydz$<br>$I_{xz} = \iiint\limits_G y^2\gamma(x, y, z)dxdydz$<br>$I_{yz} = \iiint\limits_G x^2\gamma(x, y, z)dxdydz$ |
| | $I_0 = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz$ |

| Статичні моменти | Центр маси |
|---|---|
| $M_{xy} = \iiint\limits_G z\gamma(x,y,z)dxdydz$<br>$M_{xz} = \iiint\limits_G y\gamma(x,y,z)dxdydz$<br>$M_{yz} = \iiint\limits_G x\gamma(x,y,z)dxdydz$ | $x_c = \dfrac{M_{yz}}{m}$<br>$y_c = \dfrac{M_{xz}}{m}$<br>$z_c = \dfrac{M_{xy}}{m}$ |

## Деякі системи координат на площині й у просторі

| Полярна система координат | Циліндрична система координат | Сферична система координат |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $0 \le \rho < +\infty$<br>$0 \le \varphi < 2\pi$ | $0 \le \rho < +\infty$<br>$0 \le \varphi < 2\pi$<br>$-\infty < z < +\infty$ | $0 \le r < +\infty$<br>$0 \le \varphi < 2\pi$<br>$0 \le \theta \le \pi$ |
| $x = \rho \cos\varphi$<br>$y = \rho \sin\varphi$ | $x = \rho \cos\varphi$<br>$y = \rho \sin\varphi$<br>$z = z$ | $x = r \sin\theta \cos\varphi$<br>$y = r \sin\theta \sin\varphi$<br>$z = r \cos\theta$ |
| $J(\varphi,\rho) = \rho$ | $J(\varphi,\rho,z) = \rho$ | $J(\varphi,\theta,r) = r^2 \sin\theta$ |

## Поверхні другого порядку

| | | |
|---|---|---|
| Сфера | $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ |  |
| Еліпсоїд | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$<br>$a>0,\ b>0,\ c>0$ |  |
| Конус другого порядку | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$<br>$a>0,\ b>0,\ c>0$ |  |
| Однопорожнинний гіперболоїд | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$<br>$a>0,\ b>0,\ c>0$ |  |
| Двопорожнинний гіперболоїд | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$<br>$a>0,\ b>0,\ c>0$ |  |
| Еліптичний параболоїд | $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$<br>$p>0,\ q>0$ |  |
| Гіперболічний параболоїд | $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$<br>$p>0,\ q>0$ |  |
| Еліптичний циліндр | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$<br>$a>0,\ b>0$ |  |
| Гіперболічний циліндр | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$<br>$a>0,\ b>0$ |  |
| Параболічний циліндр | $x^2 = 2py$<br>$p>0$ |  |

## 2. Завдання для самостійної роботи

### 2.1. Змінити порядок інтегрування:

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,dy$.

2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)\,dx$.

3. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_x^0 f(x,y)dy$.

4. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2/9}^y f(x,y)\,dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{y^2/9}^1 f(x,y)\,dx$.

5. $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)\,dx$.

6. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^0 f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^0 f(x,y)\,dy$.

7. $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-2y-1}^{y^2} f(x,y)dx$.

8. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^0 f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^0 f(x,y)dy$.

9. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy$.

10. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)\,dx$.

11. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)\,dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)\,dx$.

12. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^{10} dx \int\limits_0^{10-x} f(x,y)\,dy$.

13. $\int\limits_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{0} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$.

14. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)dx$.

15. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy$.

16. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\,dx$.

17. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_0^{2y} f(x,y)\,dx$.

18. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

19. $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^{2} dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy$.

20. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

**2.2. За допомогою подвійного інтеграла знайти площу фігури, обмеженої лініями:**

1. $y = x^2 + 6$, $y = 5x$.
2. $xy = -4$, $x - y = 5$.
3. $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 2$.

4. $y^2 = 4x$, $y = 2$, $x = 0$.

5. $x = y$, $x + y = 4$, $x - 2y = 4$.

6. $y = 11 - x^2$, $y = -10x$.

7. $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x = 0$.

8. $y = 3\sqrt{x}$, $y = \dfrac{3}{x}$, $x = 9$.

9. $y^2 = 2x$, $y = 2$, $x = 0$.

10. $x = y$, $x + y = 2$, $x - 2y = 2$.

11. $y = 7 - x^2$, $y = -6x$.

12. $xy = 1$, $x + y = -\dfrac{5}{2}$.

13. $x = y$, $x + y = 1$, $x - 2y = 1$.

14. $y^2 = x$, $y = 4$, $x = 0$.

15. $x = -y$, $x - y = 1$, $y = 0$.

16. $y = 1 - x^2$, $x + y = 1$.

17. $y = 2\sqrt{x}$, $y = \dfrac{2}{x}$, $x = 4$.

18. $xy = 9$, $x + y = -\dfrac{15}{2}$.

19. $x = -y$, $x - y = 1$, $x = 0$.

20. $x - y = 0$, $y = x^2 - 2$.

**2.3. Переходячи до полярних координат, обчислити:**

1. $\iint\limits_D ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$, $D$: $x^2+y^2 \ge e^2$, $x^2+y^2 \le e^4$.

2. $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}\,dx\,dy$, $D$: $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

3. $\iint\limits_D \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $D$: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $x \ge 0$, $y \le x$

4. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D$: $x^2+y^2=9$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$.

5. $\iint\limits_D cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$, $D$: $x^2+y^2=\pi$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \ge -x$.

6. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, $D$: $x^2+(y+2)^2 \le 4$.

7. $\iint\limits_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dx\,dy$, $D$: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$.

8. $\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $D: x^2-2x+y^2=0$, $x^2-6x+y^2=0$, $y=x$, $y=0$.

9. $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $D$: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ .

10. $\iint\limits_D xy^2\,dx\,dy$, $D$: $x^2+(y-1)^2=1$, $x^2+y^2=4y$.

11. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D$: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$.

12. $\iint\limits_D sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$, $D$: $x^2+y^2=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=x\sqrt{3}$.

13. $\iint\limits_D \frac{y}{x^3}\,dx\,dy$, $D$: $1 \le x^2+y^2 \le 9$, $y \ge 0$, $y \le x$.

14. $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $D: x^2-4x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$, $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.

15. $\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2}dx\,dy$, $D$: $x^2-6x+y^2=0$, $x^2-10x+y^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=x\sqrt{3}$.

16. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D$: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$.

17. $\iint\limits_D sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$, $D$: $x^2+y^2=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=x$.

18. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$, $D$: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2$.

19. $\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2}dx\,dy$, $D$: $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-4x+y^2=0$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$.

20. $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}dx\,dy$, $D$: $x^2-6x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$, $y=0$, $y=x$.

**2.4. Обчислити потрійний інтеграл:**

1. $\iiint\limits_G (x-y^2+2yz)dxdydz$, $G$: $0\le x\le 3,\ -1\le y\le 0,\ -1\le z\le 2$.

2. $\iiint\limits_G (xy+yz-z)dxdydz$, $G$: $-1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ -2\le z\le 0$.

3. $\iiint\limits_G (x^2+z)y^2dxdydz$, $G$: $-1\le x\le 0,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3$.

4. $\iiint\limits_G (x-2yz^2)dxdydz$, $G$: $1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\ 1\le z\le 3$.

5. $\iiint\limits_G 12x^2y^3zdxdydz$, $G$: $-2\le x\le 0,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 2$.

6. $\iiint\limits_G (x+3yz)dxdydz$, $G$: $-1\le x\le 2,\ 0\le y\le 3,\ 1\le z\le 2$.

7. $\iiint\limits_G (x^2z+2)dxdydz$, $G$: $-2\le x\le 0,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 2$.

8. $\iiint\limits_G (yz^2+2)dxdydz$, $G$: $-2\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ 1\le z\le 2$.

9. $\iiint\limits_G (3+z^2)dxdydz$, $G$: $-2\le x\le 0,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 2$.

10. $\iiint\limits_G (3xy-4z)dxdydz$, $G$: $1\le x\le 3,\ -1\le y\le 0,\ 1\le z\le 2$.

11. $\iiint\limits_G (3xz+6y)dxdydz$, $G$: $-2\le x\le 1,\ 0\le y\le 3,\ 0\le z\le 1$.

12. $\iiint\limits_G (x-3)yzdxdydz$, $G$: $-1\le x\le 1,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3$.

13. $\iiint\limits_G 6xydxdydz$, $G$: $1\le x\le 2,\ -2\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$.

14. $\iiint\limits_G (x-2y+z^2)dxdydz$, $G$: $-2\le x\le 0,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 2$.

15. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)zdxdydz$, $G$: $-1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\ 1\le z\le 3$.

16. $\iiint\limits_G (x^2y-z)dxdydz$, $G$: $0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 1\le z\le 2$.

17. $\iiint\limits_G (3y^2+z)dxdydz$, $G$: $-2\le x\le 1,\ 0\le y\le 3,\ 0\le z\le 1$.

18. $\iiint\limits_G (x+3z)ydxdydz$, $G$: $1\le x\le 3,\ 0\le y\le 2,\ -1\le z\le 2$.

19. $\iiint\limits_G (x^2+3)zdxdydz$, $G$: $-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 2$.

20. $\iiint\limits_G (xz^3+3y)dxdydz$, $G$: $-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 1\le z\le 3$.

**2.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:**

1. $z=x^2+y^2$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
2. $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $z=0$, $x+z=6$.
3. $z=4-x^2$, $2x+y=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
4. $z=9-y^2$, $3x+4y=12$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
5. $x^2+y^2=3z$, $x^2+y^2+z^2=4$.
6. $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.
7. $x^2+y^2\le 1$, $x^2+y^2+z^2=4$.
8. $x^2+y^2=1$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$.
9. $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
10. $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=2y$, $z=0$.

11. $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$.

12. $x^2 = 2y$, $y + z = 1$, $2y + z = 2$.

13. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

14. $x^2 + y^2 = 4x$, $z = x$, $z = 2x$.

15. $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = 0$, $y = x\sqrt{3}$, $y = x$.

16. $z = 0$, $z = 9 - x^2$, $x = 0$, $y = x$, $x + y = 5$.

17. $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $2x + z = 6$, $x^2 + y^2 = 25$.

18. $z = 0$, $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 4x$.

19. $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$, $z = 4$.

20. $z = 0$, $z = 2y$, $x = 0$, $x = 6$, $x + y = 9$.

**2.6. Обчислити криволінійні інтеграли першого роду:**

1. $\int\limits_L \frac{(y + x)}{\sqrt{1 + x^2}} ds$, де $L$ – крива $y = ln\, x$, $1 \leq x \leq 2$.

2. $\int\limits_L xyds$, де $L$ – крива $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

3. $\int\limits_L (2a - y)ds$, де $L$ – крива $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4. $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де $L$ – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0; -2)$ і $B(4; 0)$.

5. $\int\limits_L \sqrt{2 - x}ds$, де $L$ – коло $x = 2\cos t$, $y = 2(1 + \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. $\int\limits_L \frac{xds}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де $L$ – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1; 0)$ і $B(0; -2)$.

7. $\int\limits_L (x^2 + y^2)^{3/2} ds$, де $L$ – крива $x = a(\cos t - \sin t)$, $y = a(\sin t + \cos t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

8. $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}ds$, де $L$ – дуга кола $x = 2\cos t$, $y = 2(1-\sin t)$, $0 \le t \le \pi$.

9. $\int\limits_L \sqrt{2y}ds$, де $L$ – арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

10. $\int\limits_L \frac{yds}{\sqrt{x^3+2x^2+x+1}}$, де $L$ – крива $y = 2\,arctg\sqrt{x}$, $\frac{1}{3} \le x \le 3$.

11. $\int\limits_L (x+y)ds$, де $L$ – контур прямокутника з вершинами у точках $O(0;\ 0)$, $A(5;\ 0)$, $B(5;\ 3)$, $C(0;\ 3)$.

12. $\int\limits_L arctg\frac{y}{x}ds$, де $L$ – дуга кола $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

13. $\int\limits_L \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}ds$, де $L$ – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;\ 1)$ і $B(2;\ 3)$.

14. $\int\limits_L yds$, де $L$ – крива $x = \frac{a}{\cos^2 t}$, $y = a\,tg^2 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$, $(a > 0)$.

15. $\int\limits_L \frac{ds}{x}$, де $L$ – крива $x = a\,ctg^2 t$, $y = \frac{a}{\sin^2 t}$, $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}$, $(a > 0)$.

16. $\int\limits_L e^{x^2+y^2}ds$, де $L$ – крива $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

17. $\int\limits_L \frac{ds}{1+y}$, де $L$ – крива $x = \cos t + \ln tg\frac{t}{2}$, $y = \sin t$, $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

18. $\int\limits_L \frac{y^3}{\sqrt{1+4y^2}}ds$, де $L$ – крива $y = e^{2x}$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

19. $\int\limits_L x^6 yds$, де $L$ – крива $y = \frac{1}{x}$, $1 \le x \le 2$.

20. $\int\limits_L y\sin xds$, де $L$ – крива $y = \ln\cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$.

**2.7. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду:**

1. $\int\limits_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, де $L$ – чверть астроїди $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ від точки $A(R; 0)$ до точки $B(0; R)$.

2. $\int\limits_L \frac{1}{x} ydx + x^3dy$, де $L$ – крива $y = \ln x$, $0 \le x \le e$.

3. $\int\limits_L (2a - y)dx + xdy$, де $L$– арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

4. $\int\limits_L \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де $L$ – крива, що задана рівняннями $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

5. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + \cos x \cdot \ln(1 + y)dy$, де $L$ – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1; 3)$ і $B(2; 3)$.

6. $\int\limits_L (x^2 + y^2)dy$, де $L$ – крива $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

7. $\int\limits_L \frac{xy}{x^2 + y^2} dx$, де $L$ – крива $x = \frac{t+1}{t}$, $y = \frac{t-1}{t}$, $1 \le t \le 2$.

8. $\int\limits_L 4x\sin^2 ydx + y\cos^2 2xdy$, де $L$ – відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0;0)$ і $A(3;6)$.

9. $\int\limits_L xdx$, де $L$ – крива $x = \ln t$, $y = t^2 - 1$, $1 \le t \le 2$.

10. $\int\limits_L x^2ydx + ydy$, де $L$ – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(-1; 1)$ і $B(0; 3)$.

11. $\int\limits_L (2x - 4)dy$, де $L$ – крива, що задана рівняннями $x = \cos t$, $y = 2t - \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

12. $\int\limits_L (2xy+1)dx + y^2 dy$, де $L$ – крива $x - 2y = 3$, $-1 \le x \le 1$.

13. $\int\limits_L (\ln xy + x + y^2)dy$, де $L$ – крива $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $0 \le t \le 1$.

14. $\int\limits_L (x^2 + y)dx + (x + y^2)dy$, де $L$ – ламана $ACB$, де $A(2; 0)$, $C(5; 0)$, $B(5; 3)$.

15. $\int\limits_L 2xydx - x^2 dy$, де $L$ – дуга параболи $y = \dfrac{x^2}{4}$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A(2; 1)$.

16. $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 ydy$, де $L$ – відрізок прямої $AB$ у напрямі від точки $A(1; 1)$ до точки $B(0; 2)$.

17. $\int\limits_L (xy - x)dx + \dfrac{1}{2}x^2 dy$, де $L$ – дуга параболи $y^2 = 4x$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

18. $\int\limits_L (2y - 6xy^3)dx + (2x - 9x^2 y^2)dy$, де $L$ – крива $y = \dfrac{1}{4}x^3$, що з'єднує точки $O(0; 0)$ і $A(2; 2)$.

19. $\int\limits_L x^2 dx + y\sqrt{x}dy$, де $L$ – крива $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

20. $\int\limits_L (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, де $L$ – ламана $OAB$, де $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(4; 2)$.

## ЗМІСТ

1. Інтеграли від функції багатьох змінних .....3
1.1. Подвійний інтеграл .....3
1.2. Криволінійні інтеграли .....4
1.3. Потрійний інтеграл .....5
1.4. Деякі застосування кратних та криволінійних інтегралів .....6
2. Завдання для самостійної роботи .....10

Підписано до друку .Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 1 Тираж прим.

ПП «Ліра ЛТД», вул.Наукова, 5, м. Дніпро, 49107
Свідоцтво про внесення до державного реєстру
Серія ДК № 6042 від 26.02.2018 р.