

Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

---

Механіко-математичний факультет  
Кафедра математичного аналізу та оптимізації

Борщ В. Л.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА  
В ПОЛЯРНИХ ЗМІННИХ  
ЗА МЕТОДОМ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

Дніпро  
2025

УДК 517.9

Б83

*Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету  
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара  
(протокол № від червня 2025)*

Рецензенти

**П. І. Когут** — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара

**В. Б. Говоруха** — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, фізики і загально інженерних дисциплін Дніпровського державного аграрно-економічного університету

В авторській редакції

**Борщ В. Л.**

## **РОЗВ'ЯЗАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ПОЛЯРНИХ ЗМІННИХ ЗА МЕТОДОМ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ**

Поданий теоретичний матеріал з дисципліни «Рівняння математичної фізики», який стосується розв'язання граничних задач для рівняння Лапласа на площині в полярних змінних; приклади та задачі для самостійного розв'язування доповнюють викладене.

Для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 111 Математика, 112 Статистика, 113 Прикладна математика та 124 Системний аналіз факультетів механіко-математичного і прикладної математики та інформаційних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

© Борщ В. Л., 2025

# Зміст

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Вступ</b>   | <b>4</b>  |
| <b>1 Рівняння <i>Лапласа</i> в полярних змінних</b>                    | <b>5</b>  |
| 1.1 Виведення рівняння <i>Лапласа</i> в полярних змінних . . . . .     | 5         |
| 1.2 Відокремлення полярних змінних в рівнянні <i>Лапласа</i> . . . . . | 6         |
| <b>2 Задачі <i>Діріхле</i> всередині та зовні диска</b>                | <b>9</b>  |
| 2.1 Постановка внутрішньої задачі . . . . .                            | 9         |
| 2.2 Розв'язання внутрішньої задачі . . . . .                           | 10        |
| 2.3 Розв'язання внутрішньої задачі за інтегральною формулою . .        | 11        |
| 2.4 Многочленне подання розв'язку внутрішньої задачі . . . . .         | 12        |
| 2.5 Постановка зовнішньої задачі . . . . .                             | 12        |
| 2.6 Розв'язання зовнішньої задачі . . . . .                            | 13        |
| 2.7 Розв'язання зовнішньої задачі за інтегральною формулою . . .       | 13        |
| 2.8 Приклади розв'язання задач . . . . .                               | 13        |
| <b>3 Задачі <i>Ноймана</i> всередині та зовні диска</b>                | <b>28</b> |
| 3.1 Постановка внутрішньої задачі . . . . .                            | 28        |
| 3.2 Розв'язання внутрішньої задачі . . . . .                           | 29        |
| 3.3 Постановка зовнішньої задачі . . . . .                             | 29        |
| 3.4 Розв'язання зовнішньої задачі . . . . .                            | 30        |
| 3.5 Приклади розв'язання задач . . . . .                               | 31        |
| <b>4 Задача <i>Діріхле</i> в кільці</b>                                | <b>35</b> |
| 4.1 Постановка задачі . . . . .  | 35        |
| 4.2 Розв'язання задачі . . . . .                                       | 37        |
| 4.3 Приклади розв'язання задачі . . . . .                              | 38        |
| <b>5 Задача <i>Ноймана</i> в кільці</b>                                | <b>41</b> |
| 5.1 Постановка задачі . . . . .  | 41        |
| 5.2 Розв'язання задачі . . . . .                                       | 42        |
| 5.3 Приклади розв'язання задачі . . . . .                              | 44        |
| <b>6 Задачі для самостійної роботи</b>                                 | <b>47</b> |
| <b>Бібліографічний опис</b>  | <b>48</b> |

## Вступ

Навчальна дисципліна «Рівняння математичної фізики» входить до відповідних освітньо-професійних програм для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 111 Математика, 112 Статистика, 113 Прикладна математика та 124 Системний аналіз, як обов'язкова компонента циклу професійної підготовки. Серед компетенцій освітніх програм за вказаними спеціальностями вивчення математичних моделей фізичних явищ, розробка та вивчення математичних методів розв'язання прикладних задач, тощо, посідають далеко не останні місця. Програма навчальної дисципліни «Рівняння математичної фізики» задовольняє ці вимоги завдяки значному переліку математичних моделей фізичних явищ та задач, які пояснюють ці моделі.

Серед різноманітних моделей, знайомство з якими передбачено програмами вивчення навчальної дисципліни «Рівняння математичної фізики», граничні задачі для рівнянь еліптичного типу, зокрема, для рівняння Лапласа посідають одне із важливих місць. Рівняння *Лапласа* є історично одним з перших рівнянь в частинних похідних, яке було виведене при створенні математичних моделей гідродинаміки, електродинаміки, теорії тяжіння, тощо; «причепними» до його виведення були *Лаплас*, *Лагранж*, *Ойлер* (навіть набагато раніше, ніж *Лаплас*!). Граничним задачам для рівняння Лапласа взагалі притаманна застосовність декількох методів розв'язання та наддивовижний зв'язок між ними, наприклад, між методами теорій функцій комплексної змінної, гармонійних функцій (зокрема методів, які ґрунтуються на інтегральних формулах *Гріна*), рядів *Фур'є* (зокрема методів підсумовування незбіжних рядів), тощо.

В даному посібнику поставлена скромна мета ознайомити студентів із застосуванням «двовимірного» різновиду метода відокремлення змінних, одного із класичних методів розв'язання граничних задач для рівняння *Лапласа*, на прикладах граничних задач *Діріхле* та *Ноймана* на площині в полярних змінних, а саме — всередині та зовні диску, а також в круговому кільці.

Матеріал посібника поділений на шість розділів. В *першому* розділі викладені основи методу відокремлення змінних для рівняння *Лапласа* в полярних змінних, в *чотирьох* наступних — методи розв'язання вказаних вище граничних задач, пояснені прикладами, в *шостому* — наведена невелика кількість задач для самостійної роботи. Обґрунтування одержаних розв'язків, а також їх одержання іншими методами заплановано подати окремим виданням.

Виходячи з обмеженого обсягу видання, допоміжні та довідкові відомості, а також задачі і приклади розв'язання розглянутих граничних задач, подані дрібним шрифтом.

# 1 Рівняння *Лапласа* в полярних змінних

## 1.1 Виведення рівняння *Лапласа* в полярних змінних

Нехай функція  $u(x, y)$  є *гармонійною* в обмеженій або необмеженій області  $\mathcal{D}$  на площині (можливо, на всій площині), тобто обмеженою та двічі неперервно диференційованою за незалежними змінними  $x, y$  і такою, що справджує рівняння *Лапласа*

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

(є розв'язком рівняння *Лапласа*) безвідносно до додаткових умов на границі області.

Уведемо полярні змінні  $r, \varphi$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \end{cases} \quad (1.2)$$

якими замінимо декартові  $(x, y)$ :  $u(x, y) \stackrel{(1.2)}{=} u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \equiv \dot{u}(r, \varphi)$ . Далі продиференціюємо тотожність  $u(x, y) \equiv \dot{u}(r(x, y), \varphi(r(x, y)))$  двічі за змінними  $x, y$ , причому функцію  $\dot{u}(r, \varphi)$  розглядатимемо як складену:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Тепер обчислимо похідні за  $x$  та  $y$  від похідних функції  $\dot{u}$  за  $r$  та  $\varphi$  в складі (1.4), згідно формул (1.3), а саме

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \end{cases}$$

а також похідні змінних  $r$  та  $\varphi$  за змінними  $x$  та  $y$

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, & \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{x^2}{r^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = +\frac{y}{r^2} \frac{x}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, & \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{y^2}{r^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = +\frac{x}{r^2}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{x}{r^2} \frac{y}{r}. \end{cases}$$

Обчислені похідні підставимо в (1.4)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial r} \frac{x^2}{r^2} - 2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial \varphi} \frac{x}{r} \frac{y}{r^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial \varphi} \frac{y}{r^2} \frac{y}{r^2} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{x^2}{r^2} \right) + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{y}{r^2} \frac{x}{r}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial r} \frac{y^2}{r^2} + 2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r \partial \varphi} \frac{x}{r} \frac{y}{r^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi \partial \varphi} \frac{x}{r^2} \frac{x}{r^2} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{y^2}{r^2} \right) - \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \frac{x}{r^2} \frac{y}{r}, \end{cases}$$

а одержані вирази похідних другого порядку — в (1.1), звідки матиме шукане подання рівняння *Лапласа*

$$\Delta \dot{u}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2}. \quad (1.5)$$

## 1.2 Відокремлення полярних змінних в рівнянні *Лапласа*

Зазвичай відокремлення змінних застосовують до граничних та крайових задач, наявність в складі яких додаткових умов (граничних та крайових) обумовлює можливість відокремлення. Для рівняння *Лапласа* на площині в полярних змінних (1.5), внаслідок періодичності функції  $\dot{u}(r, \varphi)$ , застосування відокремлення змінних допустимо без постановки граничних задач. У такому разі можна одержати загальний (нескінчено параметричний) розв'язок рівняння *Лапласа*, застосовний для побудови розв'язків граничних задач.

Поставимо задачу знаходження *обмеженого* та *періодичного* за змінною  $\varphi$  розв'язку рівняння *Лапласа*, який шукатимемо у вигляді такого *анзатцу*

$$\dot{u}(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi), \quad (1.6)$$

де  $R(r)$  і  $\Phi(\varphi)$  — шукані функції. Умова *обмеженості* класичного розв'язку граничних та крайових задач для будь-яких рівнянь є обов'язковою, однак у разі рівняння *Лапласа* в полярних змінних вона стає показово очевидною через наявність в рівнянні коефіцієнтів з від'ємними степенями  $r$ . Щодо умови *періодичності*, то вона є наслідком умови *однозначності* шуканого розв'язку. Насправді, якщо взяти на площині довільний *контур* (замкнену кусково-гладку лінію; така лінія, згідно теореми *Жордана*, поділяє площину на внутрішню і зовнішню області), то при його обході декартові змінні кінцевої точки будуть співпадати з такими початкової точки, а полярний кут  $\varphi$  кінцевої точки набуде приросту  $\mp 2\pi$  у разі знаходження точки  $(x, y) = (0, 0)$  у внутрішній по відношенню до контура області. Отже, умова *однозначності* розв'язку вказує, що значення функції  $\dot{u}(r, \varphi)$  не можуть залежати від набутого приросту кута  $\varphi$ , тобто функція задовольняє умову:  $\dot{u}(r, \varphi) = \dot{u}(r, \varphi + 2\pi)$ .

Накладена на функцію  $\dot{u}(r, \varphi)$  умова *періодичності* тягне відповідну умову для функції  $\Phi(\varphi)$ :  $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ , згідно подання (1.6). Із останнього також матимемо вирази для похідних шуканого розв'язку за змінними  $r$  та  $\varphi$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} = R' \Phi, \quad \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} = R'' \Phi, \quad \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} = R \Phi'',$$

які підставимо в рівняння *Лапласа* (1.5)

$$\frac{R'}{r} \Phi + R'' \Phi + \frac{R}{r^2} \Phi'' = 0.$$

Розділимо останнє рівняння на  $r^{-2}R(r)\Phi(\varphi)$

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0$$

і перенесемо в праву частину члени, залежні від  $\varphi$

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Оскільки остання рівність справджується в довільній точці  $(r, \varphi)$  площини, обидві частини рівняння мають порізно дорівнювати одній сталій

$$\underbrace{\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)}}_1 = -\underbrace{\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}}_2 = \underbrace{\text{const}}_3 \equiv \lambda, \quad (1.7)$$

називаній *параметром відокремлення*. Розглянемо порізно частини (1,3) і (2,3) рівності (1.7) і запишемо їх у вигляді двох залежних (через параметр  $\lambda$ ) лінійних однорідних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad (1.8)$$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) = 0. \quad (1.9)$$

Спочатку звернемося до рівняння (1.8), оскільки саме до його розв'язку застосовна умова періодичності. В залежності від знаку параметра  $\lambda$  матимемо такі три 2-параметричні сім'ї розв'язків рівняння (1.8)

$$\Phi_\lambda(\varphi) = \begin{cases} A_\lambda \exp(-\sqrt{-\lambda}\varphi) + B_\lambda \exp(+\sqrt{-\lambda}\varphi), & \lambda < 0; \\ A_0 & + B_0 \varphi, & \lambda = 0; \\ A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) & + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\varphi), & \lambda > 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Першу сім'ю (1.10) відразу виключимо, через неможливість задовольнити показниковими функціями умову періодичності. Останню можна задовольнити тільки другою та третьою сім'ями (1.10) у разі вибору відповідно:

1) значення  $\lambda = 0$ , якому відповідає сталий за  $B_0 = 0$  розв'язок

$$\Phi_0(\varphi) = A_0; \quad (1.11)$$

2) значень  $\lambda > 0$ , які налаштовані в такий спосіб

$$\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi) = \sqrt{\lambda}\varphi + \sqrt{\lambda}2\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda}2\pi = \mu 2\pi, \quad \mu \in \mathbb{N},$$

що множина допустимих додатних значень виявляється зліченою

$$\lambda = \mu^2, \quad \mu \in \mathbb{N}. \quad (1.12)$$

Внаслідок цього третя сім'я розв'язків (1.10), відповідна множині (1.12), набуває такого подання

$$\Phi_\mu(\varphi) = A_\mu \cos \mu\varphi + B_\mu \sin \mu\varphi, \quad \mu \in \mathbb{N}. \quad (1.13)$$

Тепер звернемося до рівняння (1.9) і побудуємо 2-параметричні сім'ї його розв'язків, залежні від всіх знайдених допустимих значень параметра  $\lambda$ .

За нульового значення параметра  $\lambda$  надамо рівнянню (1.9) такого виду

$$rR_0''(r) + R_0'(r) = (rR_0'(r))' = 0 \quad (1.14)$$

і знайдемо відповідну сім'ю двома послідовними інтегруваннями

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r. \quad (1.15)$$

За додатних значень параметра  $\lambda$  частинні розв'язки рівняння (1.9)

$$r^2 R_\mu''(r) + r R_\mu'(r) - \mu^2 R_\mu(r) = 0 \quad (1.16)$$

шукатимемо в вигляді степеневого *анзатцу*  $r^q$ , де  $q$  — невідомі значення показника степеня. Після підстановки анзатцу в рівняння (1.16)

$$q(q-1)r^2 r^{q-2} + q r r^{q-1} - \mu^2 r^q = r^q (q(q-1) + q - \mu^2) = r^q (q^2 - \mu^2) = 0$$

матимемо алгебраїчне рівняння  $q^2 - \mu^2 = 0$  відносно невідомого степеня  $q$ . Очевидним кореням  $q = \mp \mu \neq 0$  алгебраїчного рівняння відповідають такі частинні розв'язки рівняння (1.16)

$$R_\mu(r) = C_\mu r^{-\mu} + D_\mu r^{+\mu}, \quad \mu \in \mathbb{N}. \quad (1.17)$$

Тепер побудуємо лінійну комбінацію всіх знайдених частинних розв'язків виду (1.6) для множини допустимих значень параметра відокремлення, внаслідок чого одержимо таку нескінченно параметричну сім'ю розв'язків (*загальний розв'язок*) рівняння Лапласа (1.5)

$$u(r, \varphi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} R_\mu(r) \Phi_\mu(\varphi)$$



або, після підстановки знайдених пар виразів для  $R_0(r)$  (1.15),  $\Phi_0(\varphi)$  (1.11) та  $R_\mu(r)$  (1.17),  $\Phi_\mu(\varphi)$  (1.13), у вигляді

$$\dot{u}(r, \varphi) = (C_0 + D_0 \ln r) A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (C_\mu r^{-\mu} + D_\mu r^{+\mu}) (A_\mu \cos \mu\varphi + B_\mu \sin \mu\varphi).$$

Очевидно, що можемо прибрати параметр  $A_0$  (довільну сталу) з побудованої нескінченно параметричної сім'ї, записавши останню в такому поданні

$$\dot{u}(r, \varphi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{\mu=1}^{\infty} (C_\mu r^{-\mu} + D_\mu r^{+\mu}) (A_\mu \cos \mu\varphi + B_\mu \sin \mu\varphi). \quad (1.18)$$

Відносно сім'ї розв'язків (1.18) рівняння *Лапласа* (1.5) зазначимо таке.

*По-перше*, сім'я містить два окремих параметри  $C_0$ ,  $D_0$  та чотири необмежених послідовності параметрів:  $\{A_\mu\}$ ,  $\{B_\mu\}$ ,  $\{C_\mu\}$ ,  $\{D_\mu\}$ . При розв'язанні певних граничних задач параметр  $D_0$  та деякі з послідовностей іноді «прибирають» (тобто «руками» надають параметру та членам цих послідовностей нульових значень, задля задовільнення умови обмеженості розв'язку  $\dot{u}(r, \varphi)$ ), а ті послідовності, що залишаються, налаштовують на задовільнення граничних умов задачі, через зіставлення коефіцієнтам *Фур'є* граничних функцій. Тобто нескінченна кількість параметрів «приховує» залежність сім'ї (як *загального розв'язку* рівняння *Лапласа*) від довільних функцій, певний вибір яких здійснюється опосередковано, через граничні умови.

*По-друге*, сім'я має дві особливі точки, в яких вона стає необмеженою:

1) початок координат ( $r = 0$ ), за рахунок логарифмічного члена, якому передуює параметр  $D_0$ , і членів з від'ємними степенями змінної  $r$ , яким передують члени послідовності параметрів  $\{C_\mu\}$ ;

2) нескінченно вдалену точку ( $r = \infty$ ), за рахунок логарифмічного члена і членів з додатними степенями змінної  $r$ , яким передують члени послідовності параметрів  $\{D_\mu\}$ .

Отже, сім'я (1.18) не завжди є рівномірно придатною для побудови розв'язків граничних задач для рівняння *Лапласа* (1.5) на площині, а потребує відповідного налаштування значень параметрів для «вилучення» необмежених членів з сім'ї.

## 2 Задачі *Діріхле* всередині та зовні диска

### 2.1 Постановка внутрішньої задачі

Внутрішня задача *Діріхле* для диска полягає в знаходженні функції, яка: 1) є гармонійною в диску  $\mathcal{D}$ ; 2) є неперервною в замиканні  $\mathcal{D} + \mathcal{C}$  диска;

3) набуває заданих граничних значень на колі  $\mathcal{C}$ , а саме (див. рис. 2.1, 1)

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < c^2\}, \\ u(x, y) = g_0(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = c^2\}. \end{cases} \quad (2.1)$$

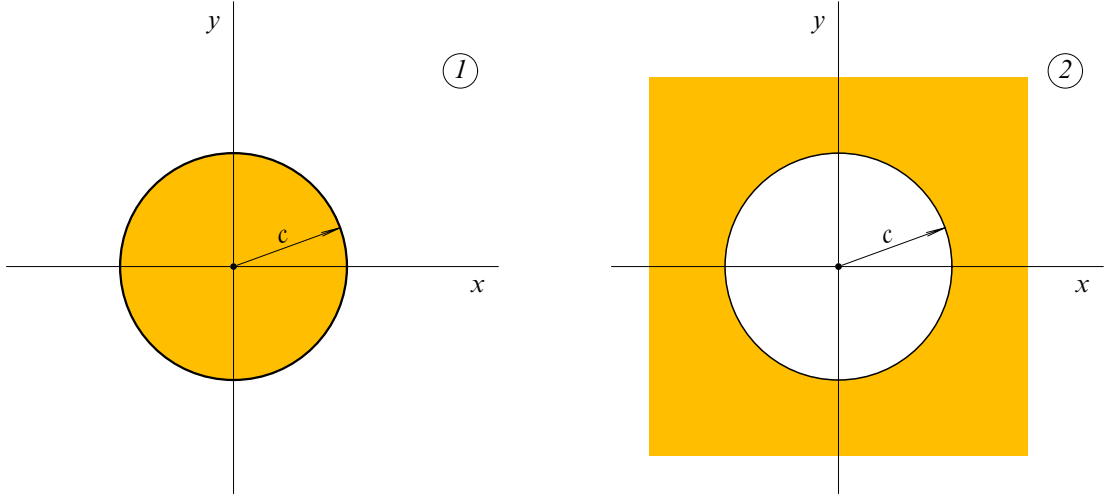


Рис. 2.1. Внутрішність (1) та зовнішність (2) диска радіуса  $c$  з центром в точці  $(0, 0)$

В полярних змінних постановка задачі перетворюється на таку

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} = 0, & 0 \leq r < c, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \dot{u}(c, \varphi) = \dot{g}_0(\varphi), & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \dot{u}(r, 0) = \dot{u}(r, 2\pi), & 0 \leq r < c, \end{cases} \quad (2.2)$$

де шуканий розв'язок  $u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: \dot{u}(r, \varphi)$  всередині диска задовольняє умови: а) обмеженості; б) періодичності за полярним кутом  $\varphi$ ; гранична функція  $g_0(c \cos \varphi, c \sin \varphi) =: \dot{g}_0(\varphi)$  є неперервною.

## 2.2 Розв'язання внутрішньої задачі

Звернемося до параметричної сім'ї (1.18) на с. 9, в якій покладемо  $D_0 = 0$ ,  $C_\mu = 0$ ,  $D_\mu = 1$ , внаслідок чого одержимо *анзати* шуканого розв'язку задачі

$$\dot{u}(r, \varphi) = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} r^{+\mu} (A_\mu \cos \mu\varphi + B_\mu \sin \mu\varphi). \quad (2.3)$$

Довільні сталі анзатцу (2.3) визначимо згідно граничної умови задачі:

1) розвинемо функцію  $\dot{g}_0(\varphi)$  в ряд *Фур'є*

$$\dot{g}_0(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} (a_{\mu} \cos \mu\varphi + b_{\mu} \sin \mu\varphi), \quad (2.4)$$

де коефіцієнти суть такі (надалі вирази коефіцієнтів не приводитимемо)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \dot{g}_0(\phi) d\phi, \quad a_{\mu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \dot{g}_0(\phi) \cos \mu\phi d\phi, \quad b_{\mu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \dot{g}_0(\phi) \sin \mu\phi d\phi;$$

2) зіставимо ряд (2.4) з анзатцем (2.3), в якому покладемо  $r = c$ , звідки

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_{\mu} = \frac{a_{\mu}}{c^{\mu}}, \quad B_{\mu} = \frac{b_{\mu}}{c^{\mu}}, \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

отже можемо записати шуканий розв'язок задачі (2.2)

$$\dot{u}(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{\mu} (a_{\mu} \cos \mu\varphi + b_{\mu} \sin \mu\varphi). \quad (2.6)$$

### 2.3 Розв'язання внутрішньої задачі за інтегральною формулою Пуассона

Підставимо в розв'язок (2.6) задачі (2.2) замість коефіцієнтів *Фур'є* інтегральні вирази та застосуємо тригонометричну формулу  $\cos(\alpha - \sigma) = \cos \alpha \cos \sigma + \sin \alpha \sin \sigma$ ; тоді матимемо таке подання для розв'язку

$$\dot{u}(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{\mu} \cos [\mu(\varphi - \phi)] \right\} \dot{g}_0(\phi) d\phi. \quad (2.7)$$

Застосуємо формулу *Ойлера*

$$e^{\mp i\mu\psi} = \cos(\mu\psi) \mp i \sin(\mu\psi) \Rightarrow 2 \cos(\mu\psi) = e^{-i\mu\psi} + e^{+i\mu\psi}$$

для того, щоб подати вираз в фігурних дужках (2.7)

$$1 + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{\mu} \cos [\mu(\phi - \varphi)] = \left\{ \varrho := \frac{r}{c} < 1; \psi = \varphi - \phi \right\} = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\varrho e^{-i\psi}\right)^{\mu} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\varrho e^{+i\psi}\right)^{\mu}.$$

Далі врахуємо, що обидва степеневих ряди суть збіжні, як суми членів нескінчених тригонометричних прогресій із знаменниками  $z_{\mp} = \varrho e^{\mp i\psi}$ ,  $|z_{\mp}| < 1$ , а саме

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\varrho e^{\mp i\psi}\right)^{\mu} = \frac{\varrho e^{\mp i\psi}}{1 - \varrho e^{\mp i\psi}},$$

тоді для вираза в фігурних дужках (2.7) матимемо

$$1 + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{\mu} \cos [\mu(\phi - \varphi)] = \frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos \psi} = \frac{c^2 - r^2}{c^2 + r^2 - 2cr \cos(\varphi - \phi)}, \quad (2.8)$$

внаслідок чого одержимо інтегральну формулу Пуассона для розв'язку задачі (2.2)

$$\dot{u}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{g}_0(\phi) \frac{c^2 - r^2}{c^2 + r^2 - 2cr \cos(\varphi - \phi)} d\phi. \quad (2.9)$$

## 2.4 Многочленне подання розв'язку внутрішньої задачі

У разі, коли гранична функція  $g_0(x, y)$  внутрішньої задачі Діріхле (2.1) на с. 10 є многочленом змінних  $x, y$  степеня  $m \geq 2$ , можна вказати [7, 8] інше подання розв'язку задачі.

**Твердження 2.1.** Нехай гранична функція з постановки внутрішньої задачі Діріхле (2.1) в диску є многочлен степеня  $m \geq 2$

$$g_0(x, y) = Q_m(x, y) = \sum_{p+q=0}^m a_{p,q} x^p y^q, \quad (2.10)$$

тоді розв'язок задачі може бути поданий в такий спосіб

$$u(x, y) = F_2(x, y) Q_{m-2}(x, y) + Q_m^*(x, y), \quad (2.11)$$

де  $F_2(x, y) = x^2 + y^2 - c^2$  — многочлен другого порядку, який задає коло  $\mathcal{C}$ :  $F_2(x, y) = 0$ ,  $Q_{m-2}(x, y)$  — многочлен степеня  $m - 2$ , визначений однозначно;  $Q_m^*(x, y)$  є поширенням граничного многочлена  $Q_m(x, y)$  всередину диска.  $\square$

## 2.5 Постановка зовнішньої задачі

Зовнішня задача Діріхле для диска полягає в знаходженні функції, яка:

- 1) є гармонійною в зовнішності  $\mathcal{D}$  диска; 2) є неперервною в замиканні  $\mathcal{D} + \mathcal{C}$ ;
- 3) набуває заданих граничних значень на  $\mathcal{C}$ , а саме (див. рис. 2.1, 2)

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > c^2\}, \\ u(x, y) = g_0(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = c^2\}. \end{cases} \quad (2.12)$$

В полярних змінних постановка задачі перетворюється на таку

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} = 0, & c < r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \dot{u}(c, \varphi) = \dot{g}_0(\varphi), & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \dot{u}(r, 0) = \dot{u}(r, 2\pi), & c \leq r < \infty, \end{cases} \quad (2.13)$$

де шуканий розв'язок  $u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: \dot{u}(r, \varphi)$  зовні диска задовольняє умови: *а)* обмеженості; *б)* періодичності за полярним кутом  $\varphi$ ; гранична функція  $g_0(c \cos \varphi, c \sin \varphi) =: \dot{g}_0(\varphi)$  є неперервною.

## 2.6 Розв'язання зовнішньої задачі

Звернемося до параметричної сім'ї (1.18) на с. 9, в якій покладемо  $B_0 = 0$ ,  $C_\mu = 1$ ,  $D_\mu = 0$ , внаслідок чого одержимо *анзати* шуканого розв'язку задачі

$$\dot{u}(r, \varphi) = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} r^{-\mu} (A_\mu \cos \mu\varphi + B_\mu \sin \mu\varphi). \quad (2.14)$$

Розв'язок задачі (2.13)

$$\dot{u}(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^\mu (a_\mu \cos \mu\varphi + b_\mu \sin \mu\varphi) \quad (2.15)$$

може бути одержаний подібно розв'язку (2.6) внутрішньої задачі (2.2).

## 2.7 Розв'язання зовнішньої задачі за інтегральною формулою Пуассона

Інтегральна формула Пуассона (інтеграл Пуассона) для розв'язання зовнішньої задачі (2.13)

$$\dot{u}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{g}_0(\phi) \frac{r^2 - c^2}{c^2 + r^2 - 2cr \cos(\phi - \varphi)} d\phi \quad (2.16)$$

може бути одержана з розв'язку (2.15) подібно інтегральній формулі (2.9) для розв'язання внутрішньої задачі (2.2) на с. 10.

## 2.8 Приклади розв'язання задач

**Приклад 2.1.** Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 + 4x < 0, \\ u(x, y) = x^2, & x^2 + y^2 + 4x = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Спочатку з'ясуємо, в якій області  $\mathcal{D}$  поставлена задача, для чого доповнимо квадратний двочлен  $x^2 + 4x$  у складі рівняння  $x^2 + y^2 + 4x = 0$ , яке визначає границю  $\mathcal{C}$  області, до повного квадрата

$$x^2 + 4x = (x^2 + 4x + 2^2) - 4 = (x + 2)^2 - 4$$

і перетворимо рівняння в такий спосіб

$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 2)^2 + y^2 = 2^2. \quad (2.18)$$

Отже, маємо внутрішню граничну задачу *Діріхле* для диска радіуса  $c=2$  з центром в точці  $(-2, 0)$  (див. рис. 2.2, 1). В локальних полярних змінних (в яких відлік  $r$  здійснюється від центру диска)

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi - 2, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad (2.19)$$

перетворимо описання граничної функції  $g_0(x, y) = x^2$  на таке

$$\dot{g}_0(\varphi) = (r \cos \varphi - 2)^2 \Big|_{r=2} = 4 \cos^2 \varphi - 8 \cos \varphi + 4. \quad (2.20)$$

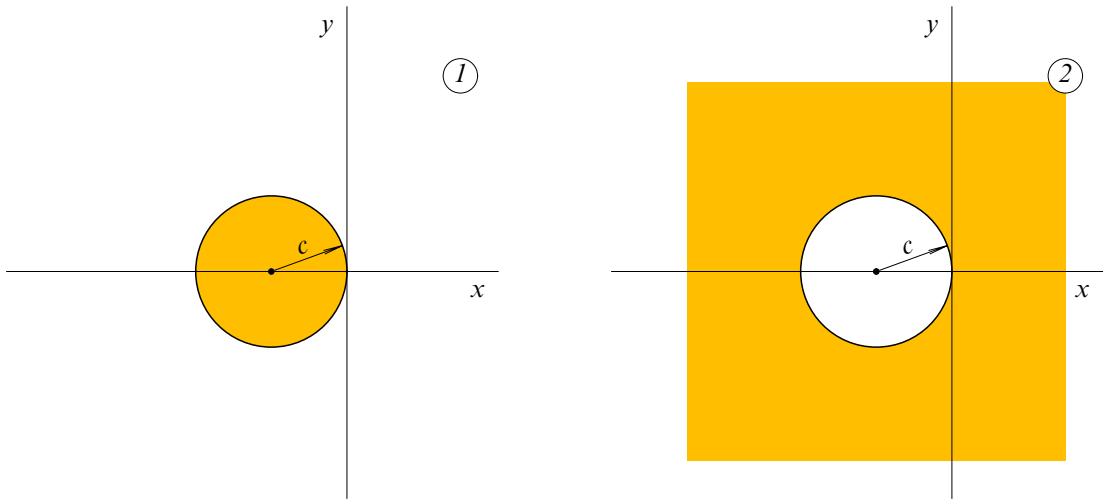


Рис. 2.2. Внутрішність (1) і зовнішність (2) кола радіуса  $c=2$  з центром в точці  $(-2, 0)$ . Через те, що уздовж осей  $x, y$  відсутні позначення, насправді зображений представник 1-параметричної сім'ї кіл  $(x + c)^2 + y^2 = c^2$

Далі застосуємо відому тригонометричну формулу  $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi)$  зниження степеня до запису граничної функції (2.20)

$$\dot{g}_0(\varphi) = 6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi, \quad (2.21)$$

що містить тригонометричні функції тільки першого степеня від простого та кратного аргумента, тобто тепер гранична функція (2.20) подана своїм рядом *Фур'є* (2.4), ненульові коефіцієнти якого суть такі

$$\frac{a_0}{2} = 6, \quad a_1 = -8, \quad a_2 = 2,$$

а складений за формулою (2.6) на с. 11 розв'язок задачі (2.17) в змінних  $(r, \varphi)$

$$\dot{u}(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \left(\frac{r}{c}\right) a_1 \cos \varphi + \left(\frac{r}{c}\right)^2 a_2 \cos 2\varphi$$

набуває вигляду (див. рис. 2.3)

$$\dot{u}(r, \varphi) = 6 - 4r \cos \varphi + \frac{1}{2} r^2 \cos 2\varphi, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2.22)$$

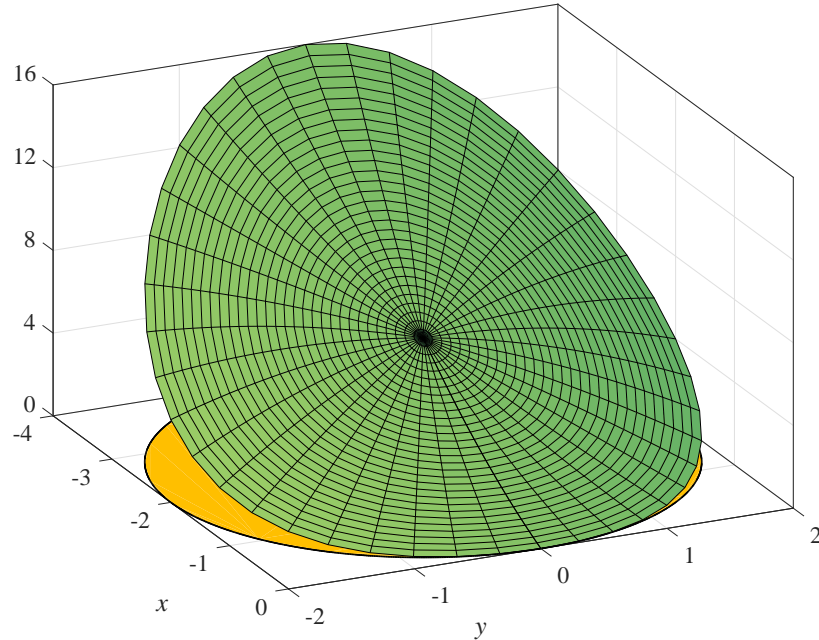


Рис. 2.3. Розв'язок  $\dot{u}(r, \varphi)$  (2.22),  $u(x, y)$  (2.24) внутрішньої задачі Діріхле (2.17)

Повернемося до змінних  $(x, y)$  в розв'язку (2.22), застосувавши формулу косінуса подвійного аргумента  $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$

$$\dot{u}(r, \varphi) = 6 - 4r \cos \varphi + \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \varphi,$$

а також «обернені» формули (2.19)

$$\begin{cases} r \cos \varphi = x + 2, \\ r \sin \varphi = y, \end{cases} \quad (2.23)$$

звідки одержуємо шукане подання розв'язку задачі Діріхле (2.17) в змінних  $(x, y)$

$$u(x, y) = 6 - 4(x + 2) + \frac{1}{2} (x + 2)^2 - \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 - 2x, \quad x^2 + y^2 + 4x < 0. \quad (2.24)$$

Обґрунтуємо розв'язки (2.22), (2.24), показавши, що вони: 1) справджують рівняння Лапласа; 2) задовольняють граничну умову. Отже, 1) знайдемо частинні похідні функції  $\dot{u}(r, \varphi)$  (2.22)

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} = 4r \cos \varphi - 2r^2 \cos 2\varphi, \quad \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} = -4 \cos \varphi + r \cos 2\varphi, \quad \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} = \cos 2\varphi,$$

які підставимо в рівняння *Лапласа* та впевнемося, що воно справджене.

Тепер знайдем повторні частинні похідні другого порядку функції  $u(x, y)$  (2.24)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = +x - 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = +1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1,$$

які підставимо в рівняння *Лапласа* та знову впевнемося, що воно справджене

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = +1 - 1 = 0.$$

Далі 2) обчислимо граничні значення: а) функції  $\dot{u}(r, \varphi)$  (2.22) на колі  $r = 2$

$$\dot{u}(r, \varphi) \Big|_{r=2} = \left( 6 - 4r \cos \varphi + \frac{1}{2} r^2 \cos 2\varphi \right) \Big|_{r=2} \stackrel{(2.21)}{=} 6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi = \dot{g}_0(\varphi)$$

та впевнемося, що гранична умова задовільнена; б) функції  $u(x, y)$  (2.24) на колі (2.18)

$$u(x, y) \Big|_{x^2+y^2+4x=0} = \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 - 2x \right) \Big|_{y^2=-x^2-4x} = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 + 2x - 2x = x^2$$

та знову впевнемося, що гранична умова задовільнена. ▲

### Приклад 2.2. Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 + 4x > 0, \\ u(x, y) = x^2, & x^2 + y^2 + 4x = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Очевидно (див. приклад 2.1 на с. 13), що маємо зовнішню задачу *Діріхле* для диска радіуса  $r = 2$  з центром в точці  $(-2, 0)$  (див. рис. 2.2, 2). В локальних полярних змінних (2.19) гранична функція набуває вже відомого виду (2.20), (2.21) на с. 14

$$\dot{g}_0(\varphi) = 4 \cos^2 \varphi - 8 \cos \varphi + 4 = 6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi. \quad (2.26)$$

Зрозуміло, що складений за формулою (2.15) на с. 13 розв'язок задачі (2.25)

$$\dot{u}(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \left( \frac{c}{r} \right) a_1 \cos \varphi + \left( \frac{c}{r} \right)^2 a_2 \cos 2\varphi$$

можемо записати так (див. рис. 2.4 та 2.5)

$$\dot{u}(r, \varphi) = 6 - \frac{16}{r} \cos \varphi + \frac{8}{r^2} \cos 2\varphi, \quad 2 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2.27)$$

Зазначимо, що розв'язок (2.27) в локальних полярних змінних неможливо перетворити до декартових змінних, через наявність полярного радіуса  $r$  в від'ємній степені.

Обґрунтуємо розв'язок (2.27), для чого покажемо, що він: 1) справджує рівняння *Лапласа*; 2) задовольняє граничній умові. Отже: 1) знайдемо частинні похідні функції  $\dot{u}(r, \varphi)$

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} = \frac{16}{r} \cos \varphi - \frac{32}{r^2} \cos 2\varphi, \quad \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} = \frac{16}{r^2} \cos \varphi - \frac{16}{r^3} \cos 2\varphi, \quad \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} = -\frac{32}{r^3} \cos \varphi + \frac{48}{r^4} \cos 2\varphi,$$



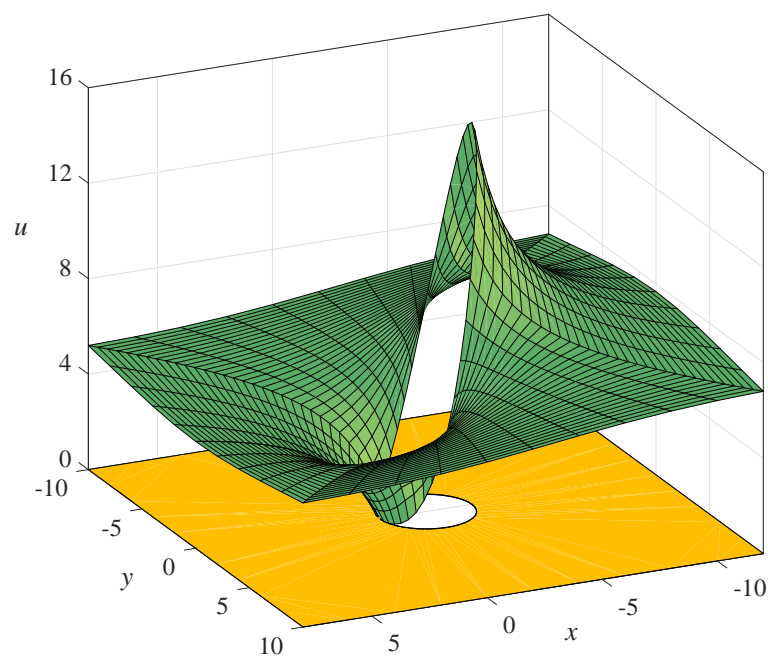


Рис. 2.4. Розв'язок  $u(x, y)$  (2.27) зовнішньої задачі Діріхле (2.25), над квадратом  $(x, y) \in [-12, +8] \times [-10, +10]$ , в якому вирізаний диск радіуса  $c=2$  та центром  $(-2, 0)$

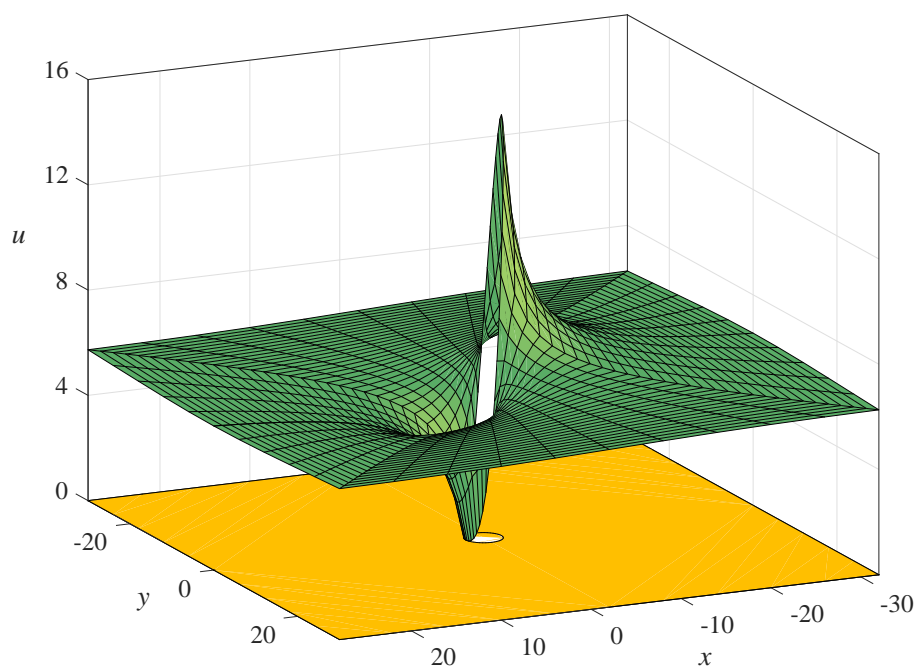


Рис. 2.5. Розв'язок  $u(x, y)$  (2.27) зовнішньої задачі Діріхле (2.25), над квадратом  $(x, y) \in [-32, +28] \times [-30, +30]$ , в якому вирізаний диск радіуса  $c=2$  та центром  $(-2, 0)$

які підставимо в рівняння *Лапласа*

$$\begin{aligned}\Delta \dot{u}(r, \varphi) &= \frac{\partial^2 \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = \\ &= -\frac{32}{r^3} \cos \varphi + \frac{48}{r^4} \cos 2\varphi + \frac{16}{r^3} \cos \varphi - \frac{16}{r^4} \cos 2\varphi + \frac{16}{r^3} \cos \varphi - \frac{32}{r^4} \cos 2\varphi = 0\end{aligned}$$

і переконаємося, що воно справджене; 2) запишемо функцію  $u(r, \varphi)$  (2.27) на границі

$$\dot{u}(r, \varphi) \Big|_{r=2} = \left( 6 - \frac{16}{r} \cos \varphi + \frac{8}{r^2} \cos 2\varphi \right) \Big|_{r=2} = 6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi \stackrel{(2.21)}{=} \dot{g}_0(\varphi)$$

і переконаємося, що гранична умова задовільнена. ▲

**Приклад 2.3.** Розглянемо внутрішню задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 < 0, \\ u(x, y) = g_{0,k}(x, y), & x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

в якій граничні функції  $g_{0,k}(x, y) = x^\alpha y^\sigma$  суть одночлени (мономи) степеня  $k = \alpha + \sigma$ , де  $\alpha, \sigma \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq 5$ , наведені в табл. 2.1. За подібністю до розв'язання задачі (2.17)

Табл. 2.1. Граничні одночлени для задачі (2.28)

| $k$ | $g_{0,k}(x, y)$ | $k$ | $g_{0,k}(x, y)$ |
|-----|-----------------|-----|-----------------|
| 0   | 1               | 3   | $x^2 y$         |
| 1   | $x$             | 4   | $x^2 y^2$       |
| 2   | $xy$            | 5   | $x^3 y^2$       |

з прикл. 2.1 на с. 13 доповнимо квадратні двочлени  $x^2 + 4x$  та  $y^2 - 2y$  у складі рівняння  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$  до повних квадратів

$$\begin{aligned}x^2 + 4x &= (x^2 + 4x + 2^2) - 4 = (x + 2)^2 - 4, \\ y^2 - 2y &= (y^2 - 2y + 1^2) - 1 = (y - 1)^2 - 1,\end{aligned}$$

і перетворимо рівняння в такий спосіб

$$F_2(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 3^2 = 0. \quad (2.29)$$

Отже, маємо внутрішню граничну задачу *Діріхле* для диска радіуса  $r = 3$  з центром в точці  $(-2, +1)$  (див. рис. 2.6, 1), де (2.29) — рівняння граничного кола  $\mathcal{C}$ , для якої застосуємо локальні полярні змінні (в яких відлік  $r$  здійснюється від центру диска)

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi - 2, \\ y = r \sin \varphi + 1. \end{cases} \quad (2.30)$$

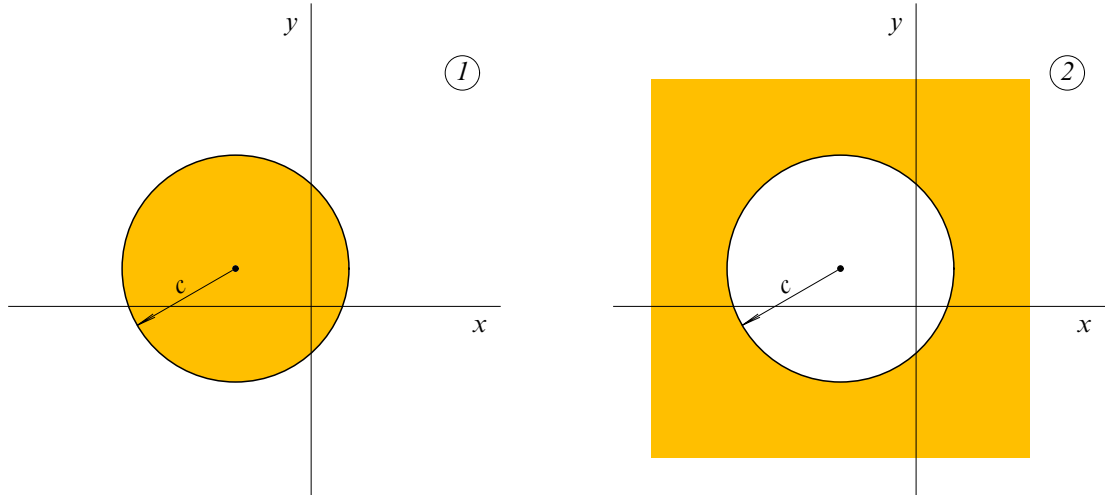


Рис. 2.6. Внутрішність (1) та зовнішність (2) диска радіуса  $c$  з центром  $\left(-\frac{2}{3}c, +\frac{1}{3}c\right)$ ; у разі диска з граничним колом (2.29) радіус  $c=3$ , а центр знаходиться в точці  $(-2, +1)$

Зазначимо, що для граничної задачі (2.28) у разі  $k \geq 2$  перевірка задовільнення граничної умови виявляється складною, тому використаємо такий *анзатц* [7, 8]

$$u_k(x, y) = F_2(x, y) P_{k-2}(x, y) + g_{0,k}^*(x, y), \quad (2.31)$$

де наперед невідомий многочлен  $P_{k-2}(x, y)$  степеня  $k-2$  має бути визначений як складова розв'язку,  $g_{0,k}^*(x, y)$  — граничний одночлен, поширений всередину диска. Оскільки у разі  $k=0, 1$  многочлен  $P_{k-2}(x, y)$  не існує, то можна припустити, що розв'язком граничної задачі буде саме граничний одночлен  $g_{0,k}^*(x, y)$ , проте, доцільно показати, що анзатц (2.31) справджується.

Насправді, у разі  $k=0$  тригонометричний ряд *Фур'є* (2.4) за полярною змінною для граничного одночлена відразу відомий

$$\dot{g}_{0,0}(\varphi) = 1 = \frac{a_0}{2},$$

отже таким є і розв'язок (2.6) граничної задачі

$$\dot{u}_0(r, \varphi) = 1 \Rightarrow u_0(x, y) = g_{0,0}^*(x, y) = 1.$$

У разі  $k=1$  тригонометричний ряд *Фур'є* (2.4) за полярною змінною для граничного одночлена також відразу відомий

$$\dot{g}_{0,1}(\varphi) = x \Big|_{x \in \mathcal{C}} = r \cos \varphi \Big|_{r=3} = 3 \cos \varphi = a_1 \cos \varphi,$$

отже розв'язок граничної задачі, згідно (2.6), є такий

$$\dot{u}_1(r, \varphi) = \left(\frac{r}{c}\right)^1 a_1 \cos \varphi \Rightarrow \dot{u}_1(r, \varphi) = \left(\frac{r}{3}\right)^1 3 \cos \varphi = r \cos \varphi \Rightarrow u_1(x, y) = g_{0,1}^*(x, y) = x.$$

У разі інших граничних багаточленів  $g_{0,k}(x, y)$  степенів  $k = 2, 3, 4, 5$  з табл. 2.1 зведемо деякі проміжні і всі остаточні вирази для розв'язків  $u_k(x, y)$  до табл. 2.2—2.5. Розгорнуте розв'язання наведемо тільки для граничного многочлена  $g_{0,5}(x, y)$ , який в полярних змінних (2.30) набуває такого виду

$$\begin{aligned} \dot{g}_{0,5}(\varphi) &= (r \cos \varphi - 2)^3 (r \sin \varphi + 1)^2 \Big|_{r=3} = \\ &= \left( r^3 \cos^3 \varphi - 6r^2 \cos^2 \varphi + 12r \cos \varphi - 8 \right) \left( r^2 \sin^2 \varphi + 2r \sin \varphi + 1 \right) \Big|_{r=3} = \\ &= \left( r^5 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - 6r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 12r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - 8r^2 \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad + 2r^4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 12r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 24r^2 \sin \varphi \cos \varphi - 16r \sin \varphi + \\ &\quad \left. + r^3 \cos^3 \varphi - 6r^2 \cos^2 \varphi + 12r \cos \varphi - 8 \right) \Big|_{r=3}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Якщо застосувати до (2.32) тригонометричні формули зниження степеня

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, & \sin^2 \varphi &= \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \\ \cos^3 \varphi &= \frac{3 \cos \varphi + \cos 3\varphi}{4}, & \sin^3 \varphi &= \frac{3 \sin \varphi - \sin 3\varphi}{4}, \\ \cos^4 \varphi &= \frac{3 + 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi}{8}, & \sin^4 \varphi &= \frac{3 - 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi}{8}, \\ \cos^5 \varphi &= \frac{10 \cos \varphi + 5 \cos 3\varphi + \cos 5\varphi}{16}, & \sin^5 \varphi &= \frac{10 \sin \varphi - 5 \sin 3\varphi + \sin 5\varphi}{16}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

відразу одержимо тригонометричний ряд *Фур'є* (2.4) граничного одночлена  $g_{0,5}(x, y)$

$$\begin{aligned} \dot{g}_{0,5}(\varphi) &= -\frac{527}{4} + \frac{1341}{8} \cos \varphi - 129 \sin \varphi + 9 \cos 2\varphi + \frac{297}{2} \sin 2\varphi - \\ &\quad - \frac{1431}{16} \cos 3\varphi - 81 \sin 3\varphi + \frac{243}{4} \cos 4\varphi + \frac{81}{4} \sin 4\varphi - \frac{243}{16} \cos 5\varphi. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Для зручності наведемо окремо «нульовий»  $a_0$  (тобто з номером 0) та перші п'ять пар  $a_\mu, b_\mu$  коефіцієнтів ряду *Фур'є* (всі інші коефіцієнти суть нулі)

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= -\frac{527}{4}, & a_1 &= +\frac{1341}{8}, & a_2 &= +9, & a_3 &= -\frac{1431}{16}, & a_4 &= +\frac{243}{4}, & a_5 &= -\frac{243}{16}, \\ b_1 &= -129, & b_2 &= +\frac{297}{2}, & b_3 &= -81, & b_4 &= +\frac{81}{4}, & b_5 &= 0, \end{aligned}$$

яким відповідає «скорочена» формула (2.6) на с. 11

$$\begin{aligned} \dot{u}_5(r, \varphi) &= \frac{a_0}{2} + \left(\frac{r}{c}\right)^1 (a_1 \cos 1\varphi + b_1 \sin 1\varphi) + \left(\frac{r}{c}\right)^2 (a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi) + \\ &\quad + \left(\frac{r}{c}\right)^3 (a_3 \cos 3\varphi + b_3 \sin 3\varphi) + \left(\frac{r}{c}\right)^4 (a_4 \cos 4\varphi + b_4 \sin 4\varphi) + \left(\frac{r}{c}\right)^5 a_5 \cos 5\varphi, \end{aligned}$$

звідки матимемо шукане подання розв'язку граничної задачі (2.28) в змінних  $(r, \varphi)$

$$\begin{aligned} \dot{u}_5(r, \varphi) = & -\frac{527}{4} + \frac{447}{8} r^1 \cos 1\varphi - 43 r^1 \sin 1\varphi + r^2 \cos 2\varphi + \frac{33}{2} r^2 \sin 2\varphi - \\ & - \frac{53}{16} r^3 \cos 3\varphi - 3 r^3 \sin 3\varphi + \frac{3}{4} r^4 \cos 4\varphi + \frac{1}{4} r^4 \sin 4\varphi - \frac{1}{16} r^5 \cos 5\varphi. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Тепер застосуємо до (2.35) тригонометричні формули кратного аргумента

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \\ \cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi, \\ \cos 4\varphi &= \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi, \\ \cos 5\varphi &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi, \\ \sin 2\varphi &= 2 \cos \varphi \sin \varphi, \\ \sin 3\varphi &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi, \\ \sin 4\varphi &= 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi, \\ \sin 5\varphi &= 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi, \end{aligned}$$

і перетворимо подання (2.35) на таке

$$\begin{aligned} \dot{u}_5(r, \varphi) = & -\frac{527}{4} + \frac{447}{8} r \cos \varphi - 43 r \sin \varphi + (r \cos \varphi)^2 - (r \sin \varphi)^2 + \\ & + 33 (r \cos \varphi)(r \sin \varphi) - \frac{53}{16} (r \cos \varphi)^3 + \frac{159}{16} (r \cos \varphi)(r \sin \varphi)^2 - \\ & - 9 (r \cos \varphi)^2 (r \sin \varphi) + 3 (r \sin \varphi)^3 + \frac{3}{4} (r \cos \varphi)^4 - \\ & - \frac{9}{2} (r \cos \varphi)^2 (r \sin \varphi)^2 + \frac{3}{4} (r \sin \varphi)^4 + (r \cos \varphi)^3 (r \sin \varphi) - \\ & - (r \cos \varphi)(r \sin \varphi)^3 - \frac{1}{16} (r \cos \varphi)^5 + \frac{5}{8} (r \cos \varphi)^3 (r \sin \varphi)^2 - \frac{5}{16} (r \cos \varphi)(r \sin \varphi)^4. \end{aligned}$$

До останнього виразу застосуємо формули (2.30) переходу до декартових змінних

$$\begin{aligned} u_5(x, y) = & -\frac{527}{4} + \frac{447}{8} (x+2) - 43 (y-1) + (x+2)^2 - (y-1)^2 + \\ & + 33 (x+2)(y-1) - \frac{53}{16} (x+2)^3 + \frac{159}{16} (x+2)(y-1)^2 - \\ & - 9 (x+2)^2 (y-1) + 3 (y-1)^3 + \frac{3}{4} (x+2)^4 - \\ & - \frac{9}{2} (x+2)^2 (y-1)^2 + \frac{3}{4} (y-1)^4 + (x+2)^3 (y-1) - \\ & - (x+2)(y-1)^3 - \frac{1}{16} (x+2)^5 + \frac{5}{8} (x+2)^3 (y-1)^2 - \frac{5}{16} (x+2)(y-1)^4, \end{aligned}$$

розкриємо дужки і виконаємо очевидні спрощення, внаслідок чого одержимо подання розв'язку граничної задачі *Діріхле* (2.28) в змінних  $(x, y)$  у вигляді багаточлена п'ятого степеня

$$u_5(x, y) = -\frac{1}{16}x^5 + \frac{5}{8}x^3y^2 - \frac{5}{16}xy^4 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3y - \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{1}{4}xy^3 + \frac{1}{8}y^4 - \\ - \frac{3}{16}x^3 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{9}{16}xy^2 - \frac{3}{2}x^2y - \frac{29}{8}x^2 + \frac{67}{8}xy + \frac{29}{8}y^2 + \frac{121}{4}x - \frac{57}{4}y - \frac{45}{2}. \quad (2.36)$$

Обґрунтуємо розв'язок (2.36), для чого покажемо, що він: 1) справджує рівняння *Лапласа*; 2) задовольняє граничну умову. Спочатку послідовним диференціюванням знайдемо похідні другого порядку функції  $u_5(x, y)$  (2.36) за змінними  $x, y$

$$\frac{\partial u_5}{\partial x} = -\frac{5}{16}x^4 + \frac{15}{8}x^2y^2 - \frac{5}{16}y^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2y - \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{4}y^3 - \frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{16}y^2 - 3xy - \\ - \frac{29}{4}x + \frac{67}{8}y + \frac{121}{4}, \\ \frac{\partial u_5}{\partial y} = +\frac{5}{4}x^3y - \frac{5}{4}xy^3 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{9}{8}xy - \frac{3}{2}x^2 - \frac{67}{8}x + \frac{29}{4}y - \frac{57}{4}, \\ \frac{\partial^2 u_5}{\partial x^2} = -\frac{5}{4}x^3 + \frac{15}{4}xy^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}xy - \frac{3}{2}y^2 - \frac{9}{8}x - 3y - \frac{29}{4}, \\ \frac{\partial^2 u_5}{\partial y^2} = +\frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{4}xy^2 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}y^2 + 3y + \frac{9}{8}x + \frac{29}{4},$$

і переконаємося, що функція  $u_5(x, y)$  (2.36) справджує рівняння *Лапласа* (1.1) на с. 5.

Далі подамо функцію  $u_5(x, y)$  (2.36) згідно (2.31) на с. 19

$$u_5(x, y) = F_2(x, y) P_3(x, y) + g_{0,5}^*(x, y) = (x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4) P_3(x, y) + x^3y^2, \quad (2.37)$$

де многочлен  $P_3(x, y)$  знайдемо, застосувавши будь-яку систему комп'ютерної математики для ділення різниці  $u_5(x, y) - u_{0,5}^*(x, y)$  на  $F_2(x, y)$  без залишка (відсутність залишка є також опосередкованим підтвердженням правильності розв'язку)

$$P_3(x, y) = \frac{u_5(x, y) - g_{0,5}^*(x, y)}{F_2(x, y)} = -\frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{16}xy^2 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}xy + \frac{1}{8}y^2 - \frac{31}{16}x + \frac{3}{4}y + \frac{45}{8}. \quad (2.38)$$

Тепер підставимо знайдений вираз (2.38) багаточлена  $P_3(x, y)$  в (2.37) і одержимо остаточне подання шуканого розв'язку граничної задачі *Діріхле* (2.28)

$$u_5(x, y) = (x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4) \left( -\frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{16}xy^2 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}xy + \frac{1}{8}y^2 - \frac{31}{16}x + \frac{3}{4}y + \frac{45}{8} \right) + x^3y^2, \quad (2.39)$$

З подань (2.37), (2.39) відразу випливає, що функція  $u_5(x, y)$  задовольняє граничну умову. Отже, внутрішня гранична задача *Діріхле* (2.28) розв'язана правильно.

Розв'язки задачі (2.28) для всіх граничних функцій зведені до табл. 2.2—2.5. ▲

Табл. 2.2. Розв'язок внутрішньої відносно кола  $F(x, y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 9 < 0$  задачі Діріхле (2.28) для граничної умови 2

|   |                               |   |
|---|-------------------------------|---|
|   | $g_{0,2}(x, y)$               | $xy$  |
|   | $\mathring{g}_{0,2}(\varphi)$ | $\underbrace{-2}_{0} \underbrace{+3 \cos \varphi - 6 \sin \varphi}_1 + \underbrace{\frac{9}{2} \sin 2\varphi}_2$      |
| 2 | $a_\mu, b_\mu$                | $\underbrace{\frac{a_0}{2} = -2}_0, \quad a_1 = +3, \quad b_1 = -6, \quad \underbrace{b_2 = +\frac{9}{2}}_2$          |
|   | $\mathring{u}_2(r, \varphi)$  | $\underbrace{-2}_{0} \underbrace{+r \cos \varphi - 2r \sin \varphi}_1 + \underbrace{\frac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi}_2$ |
|   | $u_2(x, y)$                   | $\underbrace{xy}_2$   |

Табл. 2.3. Розв'язок внутрішньої відносно кола  $F(x, y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 9 < 0$  задачі Діріхле (2.28) для граничної умови 3

|                          |  |
|--------------------------|--|
| $g_{0,3}(x, y)$          | $x^2 y$  |
| $\dot{g}_{0,3}(\varphi)$ | $\underbrace{+\frac{17}{2} - 12 \cos \varphi + \frac{75}{4} \sin \varphi}_{1} + \underbrace{\frac{9}{2} \cos 2\varphi - 18 \sin 2\varphi}_{2} + \underbrace{\frac{27}{4} \sin 3\varphi}_{3}$   |
| $a_\mu, b_\mu$           | $\underbrace{\frac{a_0}{2} = +\frac{17}{2}}_0, \quad \underbrace{a_1 = -12, \quad b_1 = +\frac{75}{4}}_1, \quad \underbrace{a_2 = +\frac{9}{2}, \quad b_2 = -18, \quad b_3 = +\frac{27}{4}}_2, \quad \underbrace{b_3 = +\frac{27}{4}}_3$ |
| $\dot{u}_3(r, \varphi)$  | $\underbrace{+\frac{17}{2} - 4r \cos \varphi + \frac{25}{4} r \sin \varphi}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2} r^2 \cos 2\varphi - 2r^2 \sin 2\varphi}_{2} + \underbrace{\frac{1}{4} r^3 \sin 3\varphi}_{3}$                                  |
| $u_3(x, y)$              | $\underbrace{+\frac{3}{4} x^2 y - \frac{1}{4} y^3}_{3} - \underbrace{\frac{1}{4} x^2 - xy + \frac{1}{4} y^2}_{2} - \underbrace{x + \frac{3}{2} y}_{1} + 1$   |
| $u_3(x, y)$              | $= F(x, y)P(x, y) + u_0(x, y) = \underbrace{(x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4)}_2 \underbrace{\left(-\frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\right)}_1 \underbrace{\left(-\frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\right)}_0 + \underbrace{x^2 y}_3$                         |



Табл. 2.4. Розв'язок внутрішньої відносно кола  $F(x, y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 9 < 0$  задачі Діріхле (2.28) для граничної умови 4

|                          |   |
|--------------------------|---|
| $g_{0,4}(x, y)$          | $x^2 y^2$   |
| $\dot{g}_{0,4}(\varphi)$ | $\underbrace{+\frac{293}{8} - 39 \cos \varphi + \frac{75}{2} \sin \varphi - \frac{27}{2} \cos 2\varphi - 36 \sin 2\varphi + 27 \cos 3\varphi + \frac{27}{2} \sin 3\varphi - \frac{81}{8} \cos 4\varphi}_0 \underbrace{\phantom{+\frac{293}{8} - 39 \cos \varphi + \frac{75}{2} \sin \varphi - \frac{27}{2} \cos 2\varphi - 36 \sin 2\varphi + 27 \cos 3\varphi + \frac{27}{2} \sin 3\varphi - \frac{81}{8} \cos 4\varphi}}_2 \underbrace{\phantom{+\frac{293}{8} - 39 \cos \varphi + \frac{75}{2} \sin \varphi - \frac{27}{2} \cos 2\varphi - 36 \sin 2\varphi + 27 \cos 3\varphi + \frac{27}{2} \sin 3\varphi - \frac{81}{8} \cos 4\varphi}}_3 \underbrace{\phantom{+\frac{293}{8} - 39 \cos \varphi + \frac{75}{2} \sin \varphi - \frac{27}{2} \cos 2\varphi - 36 \sin 2\varphi + 27 \cos 3\varphi + \frac{27}{2} \sin 3\varphi - \frac{81}{8} \cos 4\varphi}}_4$   |
| $a_\mu, b_\mu$           | $\underbrace{\frac{a_0}{2} = +\frac{293}{8}, \quad a_1 = -39, \quad b_1 = +\frac{75}{2}}_0 \underbrace{\phantom{\frac{a_0}{2} = +\frac{293}{8}, \quad a_1 = -39, \quad b_1 = +\frac{75}{2}}}_1 \underbrace{\phantom{\frac{a_0}{2} = +\frac{293}{8}, \quad a_1 = -39, \quad b_1 = +\frac{75}{2}}}_2 \underbrace{\phantom{\frac{a_0}{2} = +\frac{293}{8}, \quad a_1 = -39, \quad b_1 = +\frac{75}{2}}}_3 \underbrace{\phantom{\frac{a_0}{2} = +\frac{293}{8}, \quad a_1 = -39, \quad b_1 = +\frac{75}{2}}}_4$   |
| $\dot{u}_4(r, \varphi)$  | $\underbrace{+\frac{293}{8} - 13r \cos \varphi + \frac{25}{2} r \sin \varphi - \frac{3}{2} r^2 \cos 2\varphi - 4r^2 \sin 2\varphi + r^3 \cos 3\varphi + \frac{1}{2} r^3 \sin 3\varphi - \frac{1}{8} r^4 \cos 4\varphi}_0 \underbrace{\phantom{+\frac{293}{8} - 13r \cos \varphi + \frac{25}{2} r \sin \varphi - \frac{3}{2} r^2 \cos 2\varphi - 4r^2 \sin 2\varphi + r^3 \cos 3\varphi + \frac{1}{2} r^3 \sin 3\varphi - \frac{1}{8} r^4 \cos 4\varphi}}_1 \underbrace{\phantom{+\frac{293}{8} - 13r \cos \varphi + \frac{25}{2} r \sin \varphi - \frac{3}{2} r^2 \cos 2\varphi - 4r^2 \sin 2\varphi + r^3 \cos 3\varphi + \frac{1}{2} r^3 \sin 3\varphi - \frac{1}{8} r^4 \cos 4\varphi}}_2 \underbrace{\phantom{+\frac{293}{8} - 13r \cos \varphi + \frac{25}{2} r \sin \varphi - \frac{3}{2} r^2 \cos 2\varphi - 4r^2 \sin 2\varphi + r^3 \cos 3\varphi + \frac{1}{2} r^3 \sin 3\varphi - \frac{1}{8} r^4 \cos 4\varphi}}_3 \underbrace{\phantom{+\frac{293}{8} - 13r \cos \varphi + \frac{25}{2} r \sin \varphi - \frac{3}{2} r^2 \cos 2\varphi - 4r^2 \sin 2\varphi + r^3 \cos 3\varphi + \frac{1}{2} r^3 \sin 3\varphi - \frac{1}{8} r^4 \cos 4\varphi}}_4$ |
| $u_4(x, y)$              | $\underbrace{-\frac{1}{8} x^4 + \frac{3}{4} x^2 y^2 - \frac{1}{8} y^4 + \frac{3}{4} x^2 - 2xy - \frac{3}{4} y^2 - 9x + \frac{9}{2} y + 7}_4 \underbrace{\phantom{-\frac{1}{8} x^4 + \frac{3}{4} x^2 y^2 - \frac{1}{8} y^4 + \frac{3}{4} x^2 - 2xy - \frac{3}{4} y^2 - 9x + \frac{9}{2} y + 7}}_2 \underbrace{\phantom{-\frac{1}{8} x^4 + \frac{3}{4} x^2 y^2 - \frac{1}{8} y^4 + \frac{3}{4} x^2 - 2xy - \frac{3}{4} y^2 - 9x + \frac{9}{2} y + 7}}_1 \underbrace{\phantom{-\frac{1}{8} x^4 + \frac{3}{4} x^2 y^2 - \frac{1}{8} y^4 + \frac{3}{4} x^2 - 2xy - \frac{3}{4} y^2 - 9x + \frac{9}{2} y + 7}}_0$   |
| $u_4(x, y)$              | $= F(x, y)P(x, y) + u_0(x, y) = \underbrace{(x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4)}_2 \underbrace{\phantom{(x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4)}}_1 \underbrace{\phantom{(x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4)}}_0 \underbrace{\left(-\frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} y - \frac{7}{4}\right)}_1 \underbrace{\phantom{\left(-\frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} y - \frac{7}{4}\right)}}_0 + \underbrace{x^2 y^2}_4$  |

Табл. 2.5. Розв'язок внутрішньої відносно кола  $F(x, y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 9 < 0$  задачі Діріхле (2.28) для граничної умови 5

|                          |   |
|--------------------------|---|
|                          | 5   |
| $g_{0,5}(x, y)$          | $x^3 y^2$   |
| $\dot{g}_{0,5}(\varphi)$ | $\underbrace{-\frac{527}{4} + \frac{1341}{8} \cos \varphi - 129 \sin \varphi + 9 \cos 2\varphi + \frac{297}{2} \sin 2\varphi - \frac{1431}{16} \cos 3\varphi - 81 \sin 3\varphi + \frac{243}{4} \cos 4\varphi + \frac{81}{4} \sin 4\varphi - \frac{243}{16} \cos 5\varphi}_{0} \underbrace{\phantom{-\frac{527}{4} + \frac{1341}{8} \cos \varphi - 129 \sin \varphi + 9 \cos 2\varphi + \frac{297}{2} \sin 2\varphi - \frac{1431}{16} \cos 3\varphi - 81 \sin 3\varphi + \frac{243}{4} \cos 4\varphi + \frac{81}{4} \sin 4\varphi - \frac{243}{16} \cos 5\varphi}}_2 \underbrace{\phantom{-\frac{527}{4} + \frac{1341}{8} \cos \varphi - 129 \sin \varphi + 9 \cos 2\varphi + \frac{297}{2} \sin 2\varphi - \frac{1431}{16} \cos 3\varphi - 81 \sin 3\varphi + \frac{243}{4} \cos 4\varphi + \frac{81}{4} \sin 4\varphi - \frac{243}{16} \cos 5\varphi}}_3 \underbrace{\phantom{-\frac{527}{4} + \frac{1341}{8} \cos \varphi - 129 \sin \varphi + 9 \cos 2\varphi + \frac{297}{2} \sin 2\varphi - \frac{1431}{16} \cos 3\varphi - 81 \sin 3\varphi + \frac{243}{4} \cos 4\varphi + \frac{81}{4} \sin 4\varphi - \frac{243}{16} \cos 5\varphi}}_4 \underbrace{\phantom{-\frac{527}{4} + \frac{1341}{8} \cos \varphi - 129 \sin \varphi + 9 \cos 2\varphi + \frac{297}{2} \sin 2\varphi - \frac{1431}{16} \cos 3\varphi - 81 \sin 3\varphi + \frac{243}{4} \cos 4\varphi + \frac{81}{4} \sin 4\varphi - \frac{243}{16} \cos 5\varphi}}_5$   |
| $a_\mu, b_\mu$           | $\underbrace{\frac{a_0}{2} = -\frac{527}{4}, \quad a_1 = +\frac{1341}{8}, \quad b_1 = -129, \quad a_2 = 9, \quad b_2 = +\frac{297}{2}, \quad a_3 = -\frac{1431}{16}, \quad b_3 = -81, \quad a_4 = +\frac{243}{4}, \quad b_4 = +\frac{81}{4}, \quad a_5 = -\frac{243}{16}}_0 \underbrace{\phantom{\frac{a_0}{2} = -\frac{527}{4}, \quad a_1 = +\frac{1341}{8}, \quad b_1 = -129, \quad a_2 = 9, \quad b_2 = +\frac{297}{2}, \quad a_3 = -\frac{1431}{16}, \quad b_3 = -81, \quad a_4 = +\frac{243}{4}, \quad b_4 = +\frac{81}{4}, \quad a_5 = -\frac{243}{16}}}_1 \underbrace{\phantom{\frac{a_0}{2} = -\frac{527}{4}, \quad a_1 = +\frac{1341}{8}, \quad b_1 = -129, \quad a_2 = 9, \quad b_2 = +\frac{297}{2}, \quad a_3 = -\frac{1431}{16}, \quad b_3 = -81, \quad a_4 = +\frac{243}{4}, \quad b_4 = +\frac{81}{4}, \quad a_5 = -\frac{243}{16}}}_2 \underbrace{\phantom{\frac{a_0}{2} = -\frac{527}{4}, \quad a_1 = +\frac{1341}{8}, \quad b_1 = -129, \quad a_2 = 9, \quad b_2 = +\frac{297}{2}, \quad a_3 = -\frac{1431}{16}, \quad b_3 = -81, \quad a_4 = +\frac{243}{4}, \quad b_4 = +\frac{81}{4}, \quad a_5 = -\frac{243}{16}}}_3 \underbrace{\phantom{\frac{a_0}{2} = -\frac{527}{4}, \quad a_1 = +\frac{1341}{8}, \quad b_1 = -129, \quad a_2 = 9, \quad b_2 = +\frac{297}{2}, \quad a_3 = -\frac{1431}{16}, \quad b_3 = -81, \quad a_4 = +\frac{243}{4}, \quad b_4 = +\frac{81}{4}, \quad a_5 = -\frac{243}{16}}}_4 \underbrace{\phantom{\frac{a_0}{2} = -\frac{527}{4}, \quad a_1 = +\frac{1341}{8}, \quad b_1 = -129, \quad a_2 = 9, \quad b_2 = +\frac{297}{2}, \quad a_3 = -\frac{1431}{16}, \quad b_3 = -81, \quad a_4 = +\frac{243}{4}, \quad b_4 = +\frac{81}{4}, \quad a_5 = -\frac{243}{16}}}_5$ |
| $\dot{u}_5(r, \varphi)$  | $\underbrace{-\frac{527}{4} + \frac{447}{8} r \cos \varphi - 43r \sin \varphi + r^2 \cos 2\varphi + \frac{33}{2} r^2 \sin 2\varphi - \frac{53}{16} r^3 \cos 3\varphi - 3r^3 \sin 3\varphi + \frac{3}{4} r^4 \cos 4\varphi + \frac{1}{4} r^4 \sin 4\varphi}_{0} \underbrace{\phantom{-\frac{527}{4} + \frac{447}{8} r \cos \varphi - 43r \sin \varphi + r^2 \cos 2\varphi + \frac{33}{2} r^2 \sin 2\varphi - \frac{53}{16} r^3 \cos 3\varphi - 3r^3 \sin 3\varphi + \frac{3}{4} r^4 \cos 4\varphi + \frac{1}{4} r^4 \sin 4\varphi}}_1 \underbrace{\phantom{-\frac{527}{4} + \frac{447}{8} r \cos \varphi - 43r \sin \varphi + r^2 \cos 2\varphi + \frac{33}{2} r^2 \sin 2\varphi - \frac{53}{16} r^3 \cos 3\varphi - 3r^3 \sin 3\varphi + \frac{3}{4} r^4 \cos 4\varphi + \frac{1}{4} r^4 \sin 4\varphi}}_2 \underbrace{\phantom{-\frac{527}{4} + \frac{447}{8} r \cos \varphi - 43r \sin \varphi + r^2 \cos 2\varphi + \frac{33}{2} r^2 \sin 2\varphi - \frac{53}{16} r^3 \cos 3\varphi - 3r^3 \sin 3\varphi + \frac{3}{4} r^4 \cos 4\varphi + \frac{1}{4} r^4 \sin 4\varphi}}_3 \underbrace{\phantom{-\frac{527}{4} + \frac{447}{8} r \cos \varphi - 43r \sin \varphi + r^2 \cos 2\varphi + \frac{33}{2} r^2 \sin 2\varphi - \frac{53}{16} r^3 \cos 3\varphi - 3r^3 \sin 3\varphi + \frac{3}{4} r^4 \cos 4\varphi + \frac{1}{4} r^4 \sin 4\varphi}}_4 \underbrace{\phantom{-\frac{527}{4} + \frac{447}{8} r \cos \varphi - 43r \sin \varphi + r^2 \cos 2\varphi + \frac{33}{2} r^2 \sin 2\varphi - \frac{53}{16} r^3 \cos 3\varphi - 3r^3 \sin 3\varphi + \frac{3}{4} r^4 \cos 4\varphi + \frac{1}{4} r^4 \sin 4\varphi}}_5$   |
| $u_5(x, y)$              | $\underbrace{-\frac{1}{16} r^5 \cos 5\varphi}_{5}$ $\underbrace{-\frac{1}{16} x^5 + \frac{5}{8} x^3 y^2 - \frac{5}{16} x y^4 + \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{4} x^3 y - \frac{3}{4} x^2 y^2 + \frac{1}{4} x y^3 + \frac{1}{8} y^4 - \frac{3}{16} x^3 + \frac{1}{2} y^3 + \frac{9}{16} x y^2 - \frac{3}{2} x^2 y - \frac{29}{8} x^2 + \frac{67}{8} x y + \frac{29}{8} y^2}_{5}$ $\underbrace{+\frac{121}{4} x - \frac{57}{4} y - \frac{45}{2}}_1 \underbrace{\phantom{+\frac{121}{4} x - \frac{57}{4} y - \frac{45}{2}}}_0$   |
| $u_5(x, y)$              | $F(x, y)P(x, y) + u_0(x, y) = \underbrace{(x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4)}_2 \underbrace{\phantom{(x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4)}}_1 \underbrace{\phantom{(x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4)}}_0 \underbrace{\left(-\frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{16} x y^2 + \frac{3}{8} x^2 - \frac{3}{8} x y + \frac{1}{8} y^2 - \frac{31}{16} x + \frac{3}{4} y + \frac{45}{8}\right)}_3 \underbrace{\phantom{\left(-\frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{16} x y^2 + \frac{3}{8} x^2 - \frac{3}{8} x y + \frac{1}{8} y^2 - \frac{31}{16} x + \frac{3}{4} y + \frac{45}{8}\right)}}_2 \underbrace{\phantom{\left(-\frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{16} x y^2 + \frac{3}{8} x^2 - \frac{3}{8} x y + \frac{1}{8} y^2 - \frac{31}{16} x + \frac{3}{4} y + \frac{45}{8}\right)}}_1 \underbrace{\phantom{\left(-\frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{16} x y^2 + \frac{3}{8} x^2 - \frac{3}{8} x y + \frac{1}{8} y^2 - \frac{31}{16} x + \frac{3}{4} y + \frac{45}{8}\right)}}_0 \underbrace{+ x^3 y^2}_5$  |

Табл. 2.6. Розв'язки зовнішніх відносно кола  $F(x, y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 9 < 0$  задач Діріхле (2.28) для граничних умови 2–5

|   |                       |   |
|---|-----------------------|---|
| 2 | $\dot{u}(r, \varphi)$ | $\underbrace{-2 + 9 \frac{1}{r} \cos \varphi - 18 \frac{1}{r} \sin \varphi + \frac{81}{2} \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi}_0 \underbrace{\phantom{-2 + 9 \frac{1}{r} \cos \varphi - 18 \frac{1}{r} \sin \varphi + \frac{81}{2} \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi}}_2$   |
| 3 | $\dot{u}(r, \varphi)$ | $\underbrace{+ \frac{17}{2} - 36 \frac{1}{r} \cos \varphi + \frac{225}{4} \frac{1}{r} \sin \varphi + \frac{81}{2} \frac{1}{r^2} \cos 2\varphi - 162 \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi + \frac{729}{4} \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi}_0 \underbrace{\phantom{+ \frac{17}{2} - 36 \frac{1}{r} \cos \varphi + \frac{225}{4} \frac{1}{r} \sin \varphi + \frac{81}{2} \frac{1}{r^2} \cos 2\varphi - 162 \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi + \frac{729}{4} \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi}}_3$   |
| 4 | $\dot{u}(r, \varphi)$ | $\underbrace{+ \frac{293}{8} - 117 \frac{1}{r} \cos \varphi + \frac{225}{2} \frac{1}{r} \sin \varphi - \frac{243}{2} \frac{1}{r^2} \cos 2\varphi - 324 \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi + 729 \frac{1}{r^3} \cos 3\varphi + \frac{729}{2} \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi - \frac{6561}{8} \frac{1}{r^4} \cos 4\varphi}_0 \underbrace{\phantom{+ \frac{293}{8} - 117 \frac{1}{r} \cos \varphi + \frac{225}{2} \frac{1}{r} \sin \varphi - \frac{243}{2} \frac{1}{r^2} \cos 2\varphi - 324 \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi + 729 \frac{1}{r^3} \cos 3\varphi + \frac{729}{2} \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi - \frac{6561}{8} \frac{1}{r^4} \cos 4\varphi}}_4$   |
| 5 | $\dot{u}(r, \varphi)$ | $\underbrace{- \frac{527}{4} + \frac{4023}{8} \frac{1}{r} \cos \varphi - 387 \frac{1}{r} \sin \varphi + 81 \frac{1}{r^2} \cos 2\varphi + \frac{2673}{2} \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi - \frac{38637}{16} \frac{1}{r^3} \cos 3\varphi - 2187 \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi + \frac{19683}{4} \frac{1}{r^4} \cos 4\varphi + \frac{6561}{4} \frac{1}{r^4} \sin 4\varphi - \frac{59049}{16} \frac{1}{r^5} \cos 5\varphi}_0 \underbrace{\phantom{- \frac{527}{4} + \frac{4023}{8} \frac{1}{r} \cos \varphi - 387 \frac{1}{r} \sin \varphi + 81 \frac{1}{r^2} \cos 2\varphi + \frac{2673}{2} \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi - \frac{38637}{16} \frac{1}{r^3} \cos 3\varphi - 2187 \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi + \frac{19683}{4} \frac{1}{r^4} \cos 4\varphi + \frac{6561}{4} \frac{1}{r^4} \sin 4\varphi - \frac{59049}{16} \frac{1}{r^5} \cos 5\varphi}}_5$ |

**Приклад 2.4.** Розглянемо зовнішню задачу *Діріхле* (див. рис. 2.6, 2)

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 > 0, \\ u(x, y) = g_{0,k}(x, y), & x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0, \end{cases} \quad (2.40)$$

з граничними функціями-одночленами  $g_{0,k}(x, y)$ , наведеними в табл. 2.1, с. 18.

Оскільки розвинення граничних функцій  $\dot{g}_{0,k}(\varphi)$  в ряди *Фур'є* вже відомі (див. приклад 2.3), розв'язки задачі (2.40) можна знайти за формулою (2.15) на с. 13 (див. також приклад 2.2 на с. 16). Знайдені розв'язки зведені до табл. 2.6. ▲

### 3 Задачі *Ноймана* всередині та зовні диска

#### 3.1 Постановка внутрішньої задачі

Внутрішня задача *Ноймана* для диска полягає в знаходженні функції: 1) яка є гармонійною всередині диска  $\mathcal{D}$ ; 2) яка є неперервно диференційованою в його замиканні  $\mathcal{D} + \mathcal{C}$ ; 3) похідна якої за напрямом орта  $\boldsymbol{\nu}$  зовнішньої нормалі до границі  $\mathcal{C}$  набуває заданих граничних значень, а саме (див. рис. 2.1, 1)

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < c^2\}, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_1(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = c^2\}, \end{cases} \quad (3.1)$$

причому 4) виконана умова розв'язності задачі

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial u(x, y)}{\partial \boldsymbol{\nu}} d\mathcal{C} = \oint_{\mathcal{C}} g_1(x, y) d\mathcal{C} = 0. \quad (3.2)$$

В полярних змінних постановка задачі є такою

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} = 0, & 0 \leq r < c, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \frac{\partial \dot{u}(c, \varphi)}{\partial r} = \dot{g}_1(\varphi), & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \dot{u}(r, 0) = \dot{u}(r, 2\pi), & 0 \leq r \leq c, \end{cases} \quad (3.3)$$

де  $u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: \dot{u}(r, \varphi)$  — шуканий розв'язок, який всередині диска задовольняє умови: а) періодичності за полярним кутом  $\varphi$ ; б) обмеженості;

$g_1(c \cos \varphi, c \sin \varphi) =: \dot{g}_1(\varphi)$  — гранична функція, яка є неперервною; а умова розв’язності (3.2) набуває такого подання

$$\int_0^{2\pi} \dot{g}_1(\varphi) \, d\varphi = 0. \quad (3.4)$$

### 3.2 Розв’язання внутрішньої задачі

Звернемося до параметричної сім’ї (1.18) на с. 9, яку перетворимо подібно (2.3) на с. 10 і застосуємо як *анзатц* шуканого розв’язку задачі:

5) знайдемо похідну анзатцу (2.3) за змінною  $r$

$$\frac{\partial \dot{u}(c, \varphi)}{\partial r} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu c^{\mu-1} \left( A_{\mu} \cos \mu \varphi + B_{\mu} \sin \mu \varphi \right), \quad (3.5)$$

6) розвинемо функцію  $\dot{g}_1(\varphi)$  в ряд *Фур’є* (див. задачу 6.3 на с. 47)

$$\dot{g}_1(\varphi) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( a_{\mu} \cos \mu \varphi + b_{\mu} \sin \mu \varphi \right). \quad (3.6)$$

7) прирівняємо коефіцієнти рядів (3.5) і (3.6), звідки

$$\begin{cases} \mu c^{\mu-1} A_{\mu} = a_{\mu}, \\ \mu c^{\mu-1} B_{\mu} = b_{\mu}, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_{\mu} = \frac{a_{\mu}}{\mu c^{\mu-1}}, \\ B_{\mu} = \frac{b_{\mu}}{\mu c^{\mu-1}}, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

отже можемо записати шуканий розв’язок задачі (3.3)

$$\dot{u}(r, \varphi) = C_0 + c \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left( \frac{r}{c} \right)^{\mu} \left( a_{\mu} \cos \mu \varphi + b_{\mu} \sin \mu \varphi \right), \quad (3.8)$$

де  $C_0$  — довільна стала (див. задачу 6.4 на с. 47).

### 3.3 Постановка зовнішньої задачі

Зовнішня задача *Ноймана* для диска полягає в знаходженні функції: 1) гармонійної в зовнішності  $\mathcal{D}$  диска; 2) неперервно диференційованої в замиканні  $\mathcal{D} + \mathcal{C}$ ; 3) похідна якої за напрямом внутрішньої нормалі до границі  $\mathcal{C}$  диска

набуває заданих граничних значень на  $\mathcal{C}$ , а саме (див. рис. 2.1, 2)

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 > c^2\}, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = g_1(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = c^2\}, \end{cases} \quad (3.9)$$

причому 4) виконана умова розв'язності задачі

$$\oint_{\mathcal{C}} g_1(x, y) d\mathcal{C} = 0. \quad (3.10)$$

В полярних змінних постановка задачі є такою

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} = 0, & c < r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ -\frac{\partial \dot{u}(c, \varphi)}{\partial r} = \dot{g}_1(\varphi), & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \dot{u}(r, 0) = \dot{u}(r, 2\pi), & c \leq r < +\infty, \end{cases} \quad (3.11)$$

де  $u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: \dot{u}(r, \varphi)$  — шуканий розв'язок, який зовні диска задовольняє умови: а) періодичності за полярним кутом  $\varphi$ ; б) обмеженості;  $g_1(c \cos \varphi, c \sin \varphi) =: \dot{g}_1(\varphi)$  — гранична функція, яка є неперервною; умова розв'язності (3.2) набуває такого подання

$$\int_0^{2\pi} \dot{g}_1(\varphi) d\varphi = 0. \quad (3.12)$$

### 3.4 Розв'язання зовнішньої задачі

Звернемося до параметричної сім'ї (1.18) на с. 9, яку перетворимо подібно (2.14) на с. 13 і застосуємо як *анзати* шуканого розв'язку задачі:

5) знайдемо похідну сім'ї за напрямом орта  $\nu$  зовнішньої нормалі до  $\mathcal{C}$

$$-\frac{\partial \dot{u}(c, \varphi)}{\partial r} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu c^{-\mu-1} (A_{\mu} \cos \mu \varphi + B_{\mu} \sin \mu \varphi); \quad (3.13)$$

6) розвинемо функцію  $\dot{g}_1(\varphi)$  в ряд Фур'є (див. задачу 6.5 на с. 47)

$$\dot{g}_1(\varphi) = \sum_{\mu=1}^{\infty} (a_{\mu} \cos \mu \varphi + b_{\mu} \sin \mu \varphi). \quad (3.14)$$

7) прирівняємо коефіцієнти рядів (3.13) і (3.14), звідки

$$\begin{cases} \frac{\mu A_\mu}{c^{\mu+1}} = a_\mu, \\ \frac{\mu B_\mu}{c^{\mu+1}} = b_\mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_\mu = \frac{a_\mu c^{\mu+1}}{\mu}, \\ B_\mu = \frac{b_\mu c^{\mu+1}}{\mu}, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad (3.15)$$

отже можемо записати шуканий розв'язок задачі (3.11)

$$\dot{u}(r, \varphi) = C_0 + c \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{c}{r}\right)^\mu \left(a_\mu \cos \mu\varphi + b_\mu \sin \mu\varphi\right), \quad (3.16)$$

де  $C_0$  — довільна стала (див. задачу 6.6 на с. 47).

### 3.5 Приклади розв'язання задач

**Приклад 3.1.** Розглянемо задачу *Ноймана*

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 + 4x < 0, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = x^2, & x^2 + y^2 + 4x = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Оскільки рівняння границі  $x^2 + y^2 + 4x = 0$  може бути перетворено до канонічного, тобто рівняння кола  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2$ , де  $x_0 = -2, y_0 = 0, c = 2$  (див. приклад 2.1 на с. 13), задача (3.17) є внутрішньою, яку подамо у вигляді (3.1) на с. 28

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x + 2)^2 + y^2 < 2^2, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = x^2, & (x + 2)^2 + y^2 = 2^2. \end{cases} \quad (3.18)$$

В місцевих полярних змінних внутрішність диска  $x^2 + y^2 + 4x < 0$  має описання (див. рис. 2.2, 1 на с. 14)

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi - 2, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (3.19)$$

а гранична умова (одночлен другого степеня) набуває виду

$$\dot{g}_1(\varphi) = (r \cos \varphi - 2)^2 \Big|_{r=2} = 4 \cos^2 \varphi - 8 \cos \varphi + 4 = 6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi. \quad (3.20)$$

Отже, оскільки умова розв'язності (3.4) задачі (3.18) не виконана

$$\int_0^{2\pi} \dot{g}_1(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi) d\varphi = (6\varphi - 8 \sin \varphi + \sin 2\varphi) \Big|_0^{2\pi} = 6 \cdot 2\pi \neq 0, \quad (3.21)$$

замінімо граничну функцію на таку

$$\underline{g}_1(x, y) = g_1(x, y) + A \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\underline{g}}_1(\varphi) = \dot{g}_1(\varphi) + A, \quad (3.22)$$

для якої запишемо умову розв'язності

$$\int_0^{2\pi} \dot{\underline{g}}_1(\varphi) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \dot{g}_1(\varphi) \, d\varphi + 2\pi A = 0, \quad (3.23)$$

і знайдемо допустиме значення сталої

$$A = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{g}_1(\varphi) \, d\varphi \stackrel{(3.21)}{=} -\frac{1}{2\pi} 2\pi \cdot 6 = -6. \quad (3.24)$$

Отже, замість внутрішньої задачі *Ноймана* (3.18) розглядатимемо «змінену» внутрішню задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x+2)^2 + y^2 < 2^2, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = x^2 - 6, & (x+2)^2 + y^2 = 2^2, \end{cases} \quad (3.25)$$

де гранична функція  $\underline{g}_1(x, y) = g_1(x, y) - 6 = x^2 - 6$  (3.22), (3.24) задовольняє умову розв'язності (3.4). Запишемо «змінену» граничну функцію в місцевих полярних змінних (3.19) (див. також запис (3.20) граничної функції  $g_1(x, y) = x^2$ )

$$\dot{\underline{g}}_1(\varphi) = -8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi, \quad (3.26)$$

звідки ненульові коефіцієнти ряду *Фур'є* «виправленої» граничної функції суть такі:  $a_1 = -8$ ,  $a_2 = 2$ , отже, складений за ними розв'язок задачі *Ноймана* (3.25) в змінних  $(r, \varphi)$  містить тільки два доданки ряду (3.8), а саме

$$\dot{u}(r, \varphi) = C_0 + c \left[ \left(\frac{r}{c}\right)^1 a_1 \cos \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{c}\right)^2 a_2 \cos 2\varphi \right] = C_0 + 2 \left[ -\left(\frac{r}{2}\right)^1 8 \cos \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^2 2 \cos 2\varphi \right],$$

тобто остаточний запис розв'язку такий

$$\dot{u}(r, \varphi) = C_0 - 8r \cos \varphi + \frac{1}{2} r^2 \cos 2\varphi. \quad (3.27)$$

Обґрунтуємо розв'язок (3.27), для чого покажемо, що він: 1) справджує рівняння *Лапласа*; 2) задовольняє «змінену» граничну умову.

1) Спочатку знайдемо перші і другі повторні частинні похідні функції  $\dot{u}(r, \varphi)$  (3.27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} &= -8 \cos \varphi + r \cos 2\varphi, & \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} &= \cos 2\varphi, \\ \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} &= +8r \sin \varphi - r^2 \sin 2\varphi, & \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} &= +8r \cos \varphi - 2r^2 \cos 2\varphi, \end{aligned}$$



які далі підставимо в ліву частину рівняння *Лапласа* (див. (1.5) на с. 6 або запис рівняння в складі задачі (3.3) на с. 28) і переконаємося, що вона тотожно обертається в нуль

$$\begin{aligned}\Delta \dot{u}(r, \varphi) &= \frac{\partial^2 \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = \\ &= \cos 2\varphi + \frac{1}{r} \left( -8 \cos \varphi + r \cos 2\varphi \right) + \frac{1}{r^2} \left( +8r \cos \varphi - 2r^2 \cos 2\varphi \right) = 0.\end{aligned}$$

2) Далі обчислимо похідну функції  $\dot{u}(r, \varphi)$  (3.27) за напрямом орта зовнішньої нормалі до границі диска (тобто на граничному колі  $C$ )

$$\left. \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial \nu} \right|_C = \left. \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=2} = \left( -8 \cos \varphi + r \cos 2\varphi \right) \Big|_{r=2} = -8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi \stackrel{(3.26)}{\equiv} \dot{g}_1(\varphi)$$

і переконаємося, що гранична умова також задовільнена. Отже, розв'язок (3.27) «зміненої» внутрішньої задачі *Ноймана* (3.25) в полярних змінних знайдений правильно.

Перетворимо розв'язок (3.27) «зміненої» внутрішньої задачі *Ноймана* (3.25) до декартових змінних, для чого спочатку позбавимось від косінуса подвійного кута:  $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ , тоді розв'язок (3.27) набуде такого подання

$$\begin{aligned}\dot{u}(r, \varphi) &= C_0 - 8r \cos \varphi + \frac{1}{2} r^2 \left( \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \right) = C_0 - 8r \cos \varphi + \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \varphi = \\ &= C_0 - 8r \cos \varphi + \frac{1}{2} (r \cos \varphi)^2 - \frac{1}{2} (r \sin \varphi)^2,\end{aligned}$$

а далі застосуємо формули (3.19), тоді

$$\begin{aligned}u(x, y) &= C_0 - 8(x+2) + \frac{1}{2} (x+2)^2 - \frac{1}{2} y^2 = C_0 - 8x - 16 + \frac{1}{2} (x^2 + 4x + 4) - \frac{1}{2} y^2 = \\ &= C_0 - 8x - 16 + \frac{1}{2} x^2 + 2x + 2 - \frac{1}{2} y^2 = C_0 - 14 + \frac{1}{2} (x^2 - y^2) - 6x.\end{aligned}$$

Отже, розв'язок (3.27) «зміненої» внутрішньої задачі *Ноймана* (3.25) в декартових змінних є такий

$$u(x, y) = \underline{C}_0 + \frac{1}{2} (x^2 - y^2) - 6x, \quad (3.28)$$

де  $\underline{C}_0 = C_0 - 14$  — «нова» довільна стала.

Обґрунтуємо розв'язок (3.28), для чого покажемо, що він: 1) справджує рівняння *Лапласа*; 2) задовольняє «зміненну» граничну умову.

1) Спочатку знайдемо перші і другі повторні частинні похідні функції  $u(x, y)$  (3.28)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= x - 6, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= +1, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -y, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -1,\end{aligned} \quad (3.29)$$

які далі підставимо в ліву частину рівняння *Лапласа* і переконаємося, що вона тотожно обертається в нуль

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \equiv 0.$$

2) Далі обчислимо значення похідної функції  $u(x, y)$  (3.28) за напрямом орта зовнішньої нормалі до границі диска (тобто на граничному колі  $\mathcal{C}$ )

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right|_c = \left[ \nu_x(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \nu_y(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \Big|_c, \quad (3.30)$$

де перші похідні вже знайдені (3.29), а компоненти орта зовнішньої нормалі на граничному колі обчислимо за допомогою формул (3.19)

$$\begin{aligned} \nu_x(x, y) \Big|_c &= \frac{\partial x}{\partial r} \Big|_{r=2} = \cos \varphi = \frac{x+2}{r} \Big|_{r=2} = \frac{x+2}{2}, \\ \nu_y(x, y) \Big|_c &= \frac{\partial y}{\partial r} \Big|_{r=2} = \sin \varphi = \frac{y}{r} \Big|_{r=2} = \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Продовжимо обчислення похідної (3.30) функції  $u(x, y)$  (3.28) за напрямом орта зовнішньої нормалі до границі диска, звідки матимемо

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right|_c &= \left[ \frac{x+2}{2} (x-6) - \frac{y}{2} y \right] \Big|_{x^2+y^2+4x=0} = \left[ \frac{1}{2} x^2 - 3x + x - 6 - \frac{1}{2} y^2 \right] \Big|_{x^2+y^2+4x=0} = \\ &= \left[ \frac{1}{2} x^2 - 2x - 6 - \frac{1}{2} y^2 \right] \Big|_{x^2+y^2+4x=0} = \left[ \frac{1}{2} x^2 - 2x - 6 - \frac{1}{2} (-4x - x^2) \right] \Big|_{x^2+y^2+4x=0} = \\ &= x^2 - 6 \equiv g_1(x, y). \end{aligned}$$

Отже, розв'язок «зміненої» внутрішньої задачі (3.25) в декартових змінних знайдений правильно. ▲

### Приклад 3.2. Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 + 4x > 0, \\ u(x, y) = x^2, & x^2 + y^2 + 4x = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Очевидно (див. приклад 3.1 на с. 31), що маємо зовнішню задачу *Ноймана* для диска радіуса  $r = 2$  з центром в точці  $(-2, 0)$  (див. рис. 2.2, 2 на с. 14). В локальних полярних змінних замкнена зовнішність диска має описання

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi - 2, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad 2 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (3.32)$$

а гранична умова є такою

$$\dot{g}_1(\varphi) = (r \cos \varphi - 2)^2 \Big|_{r=2} = 4 \cos^2 \varphi - 8 \cos \varphi + 4 = 6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi. \quad (3.33)$$

Оскільки гранична функція (3.33) не задовольняє необхідну умову розв'язності (3.10) та (3.12) на с. 30 (див. приклад 3.1), замінимо вихідну зовнішню задачу такою виправленою

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x+2)^2 + y^2 > 2^2, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = x^2 - 6, & (x+2)^2 + y^2 = 2^2, \end{cases} \quad (3.34)$$

де вихідна гранична функція  $g_1(x, y) = x^2$  замінена «виправленою»  $\underline{g}_1(x, y) = g_1(x, y) - 6 = x^2 - 6$ , запис якої в полярних змінних вже відомий (див. приклад 3.1)

$$\dot{g}_1(\varphi) = -8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi, \quad (3.26)$$

тобто ненульові коефіцієнти ряду *Фур'є* «виправленої» граничної функції суть такі:  $a_1 = -8$ ,  $a_2 = 2$ , а складений за ними розв'язок задачі *Ноймана* (3.34) в змінних  $(r, \varphi)$  включає тільки перші два доданки ряду (3.16) на с. 31, а саме

$$\dot{u}(r, \varphi) = C_0 + c \left[ \left(\frac{c}{r}\right)^1 a_1 \cos \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{r}\right)^2 a_2 \cos 2\varphi \right] = C_0 + 2 \left[ -\left(\frac{2}{r}\right)^1 8 \cos \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r}\right)^2 2 \cos 2\varphi \right],$$

отже, остаточний запис розв'язку такий

$$\dot{u}(r, \varphi) = C_0 - \frac{32}{r} \cos \varphi + \frac{8}{r^2} \cos 2\varphi, \quad 2 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (3.35)$$

Обґрунтуємо розв'язок (3.35), для чого покажемо, що він: 1) справджує рівняння *Лапласа*; 2) задовольняє «виправлену» граничну умову (3.26). Отже: 1) знайдемо частинні похідні функції  $\dot{u}(r, \varphi)$  (3.35)

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} = +\frac{32}{r^2} \cos \varphi - \frac{16}{r^3} \cos 2\varphi, \quad \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} = -\frac{64}{r^3} \cos \varphi + \frac{48}{r^4} \cos 2\varphi,$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} = +\frac{32}{r} \sin \varphi - \frac{16}{r^2} \sin 2\varphi, \quad \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} = +\frac{32}{r} \cos \varphi - \frac{32}{r^2} \cos 2\varphi,$$

які підставимо в рівняння *Лапласа*

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u}(r, \varphi) &= \frac{\partial^2 \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = \\ &= -\frac{64}{r^3} \cos \varphi + \frac{48}{r^4} \cos 2\varphi + \frac{32}{r^3} \cos \varphi - \frac{16}{r^4} \cos 2\varphi + \frac{32}{r^3} \cos \varphi - \frac{32}{r^4} \cos 2\varphi = 0 \end{aligned}$$

і переконаємося, що останнє справджено; 2) обчислимо похідну функції  $\dot{u}(r, \varphi)$  (3.35) за напрямом орта зовнішньої нормалі до границі диска (тобто на граничному колі)

$$\frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial \nu} = -\frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r} = \left( -\frac{32}{r^2} \cos \varphi + \frac{16}{r^3} \cos 2\varphi \right) \Big|_{r=2} = -8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi \stackrel{(3.26)}{=} \dot{g}_1(\varphi)$$

і переконаємося, що гранична умова також виконана.

Отже, розв'язок (3.35) «виправленої» зовнішньої задачі (3.34) в полярних змінних знайдений правильно. Зазначимо, що цей розв'язок неможливо перетворити до декартових змінних, через наявність полярного радіуса  $r$  в від'ємній степені.  $\blacktriangle$

## 4 Задача *Діріхле* в кільці

### 4.1 Постановка задачі

Задача *Діріхле* в кільці полягає в знаходженні функції: 1) яка є гармонійною всередині кільця  $\mathcal{D}$ ; 2) є неперервною в замиканні  $\mathcal{D} + \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$  кільця;

3) набуває заданих граничних значень на границі  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$  кільця, а саме

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{D} = \left\{ (x, y) \mid c_1^2 < x^2 + y^2 < c_2^2 \right\}, \\ u(x, y) = g_{0,1}(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{C}_1 = \left\{ (x, y) \mid c_1^2 = x^2 + y^2 \right\}, \\ u(x, y) = g_{0,2}(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{C}_2 = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = c_2^2 \right\}. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

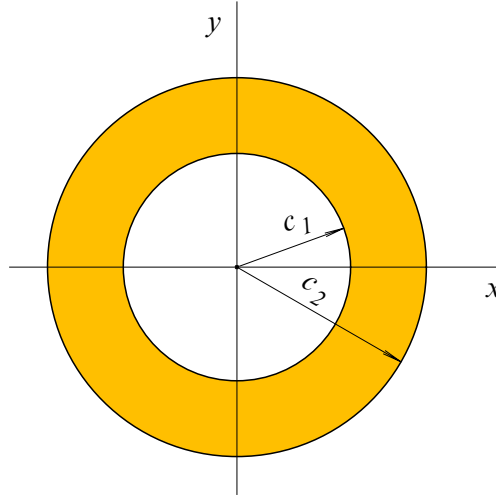


Рис. 4.1. Кільцева область з внутрішнім  $c_1$  та зовнішнім  $c_2$  радіусами і центром  $(0, 0)$

В полярних змінних постановка задачі перетворюється на таку

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} = 0, \quad c_1 < r < c_2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \left. \begin{array}{l} \dot{u}(c_1, \varphi) = \dot{g}_{0,1}(\varphi) \\ \dot{u}(c_2, \varphi) = \dot{g}_{0,2}(\varphi) \end{array} \right\} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \dot{u}(r, 0) = \dot{u}(r, 2\pi), \quad c_1 \leq r \leq c_2, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

де шуканий розв'язок  $\dot{u}(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  всередині кільця задовольняє умови: а) обмеженості; б) періодичності за полярним кутом  $\varphi$ ; граничні функції  $\dot{g}_{0,1}(\varphi) := g_{0,1}(c_1 \cos \varphi, c_1 \sin \varphi)$ ,  $\dot{g}_{0,2}(\varphi) := g_{0,2}(c_2 \cos \varphi, c_2 \sin \varphi)$  суть неперервні.

## 4.2 Розв'язання задачі

Звернемося до параметричної сім'ї (1.18) на с. 9, в якій збережемо всі члени (проте, розкриємо дужки з тригонометричним двочленом і перевизначимо довільні сталі), і застосуємо як *анзату* шуканого розв'язку задачі

$$\begin{aligned} \dot{u}(r, \varphi) = & C_0 + D_0 \ln r + \\ & + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[ \left( A_{\mu} r^{-\mu} + B_{\mu} r^{+\mu} \right) \cos(\mu\varphi) + \left( C_{\mu} r^{-\mu} + D_{\mu} r^{+\mu} \right) \sin(\mu\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Розв'язання задачі далі будуватимемо за таким алгоритмом:

1) розвинемо граничні функції  $\dot{g}_{0,1}(\varphi)$ ,  $\dot{g}_{0,2}(\varphi)$  в ряди *Фур'є*

$$\begin{cases} \dot{g}_{0,1}(\varphi) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( a_{1,\mu} \cos(\mu\varphi) + b_{1,\mu} \sin(\mu\varphi) \right), \\ \dot{g}_{0,2}(\varphi) = \frac{a_{2,0}}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( a_{2,\mu} \cos(\mu\varphi) + b_{2,\mu} \sin(\mu\varphi) \right); \end{cases} \quad (4.4)$$

2) запишемо граничні умови для *анзату* (4.3)

$$\begin{aligned} \dot{u}(c_1, \varphi) \equiv & C_0 + D_0 \ln c_1 + \\ & + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[ \left( A_{\mu} c_1^{-\mu} + B_{\mu} c_1^{+\mu} \right) \cos(\mu\varphi) + \left( C_{\mu} c_1^{-\mu} + D_{\mu} c_1^{+\mu} \right) \sin(\mu\varphi) \right] = \\ = & \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( a_{1,\mu} \cos(\mu\varphi) + b_{1,\mu} \sin(\mu\varphi) \right) \equiv \dot{g}_{0,1}(\varphi), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(c_2, \varphi) \equiv & C_0 + D_0 \ln c_2 + \\ & + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[ \left( A_{\mu} c_2^{-\mu} + B_{\mu} c_2^{+\mu} \right) \cos(\mu\varphi) + \left( C_{\mu} c_2^{-\mu} + D_{\mu} c_2^{+\mu} \right) \sin(\mu\varphi) \right] = \\ = & \frac{a_{2,0}}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( a_{2,\mu} \cos(\mu\varphi) + b_{2,\mu} \sin(\mu\varphi) \right) \equiv \dot{g}_{0,2}(\varphi); \end{aligned} \quad (4.6)$$

3) з зіставлення лівих і правих частин граничних умов (4.5) та (4.6) одержимо злічені послідовності незалежних (відносно  $\mu$ ) систем лінійних алгеб-

раїчних рівнянь відносно значень довільних сталих сім'ї (4.3)

$$\begin{cases} 2 C_0 + 2 \ln c_1 D_0 = a_{1,0}, \\ 2 C_0 + 2 \ln c_2 D_0 = a_{2,0}, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} c_1^{-\mu} A_\mu + c_1^{+\mu} B_\mu = a_{1,\mu}, \\ c_2^{-\mu} A_\mu + c_2^{+\mu} B_\mu = a_{2,\mu}, \end{cases} \quad \begin{cases} c_1^{-\mu} C_\mu + c_1^{+\mu} D_\mu = b_{1,\mu}, \\ c_2^{-\mu} C_\mu + c_2^{+\mu} D_\mu = b_{2,\mu}, \end{cases} \quad \mu = 1, 2, \dots; \quad (4.8)$$

4) розв'яжемо системи (4.7) за формулами *Крамера*

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \ln c_1 \\ 2 & 2 \ln c_2 \end{vmatrix}, \quad C_0 = \Delta_0^{-1} \begin{vmatrix} a_{1,0} & 2 \ln c_1 \\ a_{2,0} & 2 \ln c_2 \end{vmatrix}, \quad D_0 = \Delta_0^{-1} \begin{vmatrix} 2 & a_{1,0} \\ 2 & a_{2,0} \end{vmatrix};$$

5) розв'яжемо системи (4.8) за формулами *Крамера*

$$\begin{aligned} \Delta_\mu &= \begin{vmatrix} c_1^{-\mu} & c_1^{+\mu} \\ c_2^{-\mu} & c_2^{+\mu} \end{vmatrix}, & A_\mu &= \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} a_{1,\mu} & c_1^{+\mu} \\ a_{2,\mu} & c_2^{+\mu} \end{vmatrix}, & B_\mu &= \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} c_1^{-\mu} & a_{1,\mu} \\ c_2^{-\mu} & a_{2,\mu} \end{vmatrix}, \\ C_\mu &= \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} b_{1,\mu} & c_1^{+\mu} \\ b_{2,\mu} & c_2^{+\mu} \end{vmatrix}, & D_\mu &= \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} c_1^{+\mu} & b_{1,\mu} \\ c_2^{+\mu} & b_{2,\mu} \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

6) запишемо остаточні вирази для значень шуканих сталих сім'ї (4.3)

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{2} \frac{a_{1,0} \ln c_2 - a_{2,0} \ln c_1}{\ln c_2 - \ln c_1}, & A_\mu = c_1^\mu c_2^\mu \frac{c_2^\mu a_{1,\mu} - c_1^\mu a_{2,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}, & B_\mu = \frac{c_2^\mu a_{2,\mu} - c_1^\mu a_{1,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}, \\ D_0 = \frac{1}{2} \frac{a_{2,0} - a_{1,0}}{\ln c_2 - \ln c_1}, & C_\mu = c_1^\mu c_2^\mu \frac{c_2^\mu b_{1,\mu} - c_1^\mu b_{2,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}, & D_\mu = \frac{c_2^\mu b_{2,\mu} - c_1^\mu b_{1,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Очевидно, что через наявність членів  $r^{-\mu}$ , розв'язок (4.3) не може бути поданий в декартових змінних.

### 4.3 Приклади розв'язання задачі

**Приклад 4.1.** Розглянемо задачу *Діріхле* для рівняння *Лапласа* в кільці, обмеженому зсередини колом  $x^2 + y^2 + 4x = 0$ , а зовні — колом, яке має той самий центр і вдвічі більший радіус  $c_2$ . На внутрішньому колі шукана функція набуває значень  $x^2$ , а на зовнішньому — стале значення 4. Оскільки канонічний вид  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c_1^2$  рівняння внутрішнього

кола відомий:  $(x+2)^2 + y^2 = 2^2$  (2.18) (див. приклад 2.1 на с. 13), то маємо  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = 0$ ,  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 2c_1 = 4$ , і можемо записати постановку задачі подібно до (4.1) на с. 36

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 2^2 < (x+2)^2 + y^2 < 4^2, \\ u(x, y) = x^2, & 2^2 = (x+2)^2 + y^2, \\ u(x, y) = 4, & (x+2)^2 + y^2 = 4^2. \end{cases} \quad (4.10)$$

В місцевих полярних змінних кільце має таке подання (див. рис. 4.2)

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi - 2, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq r \leq 4, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{cases} \quad (4.11)$$

а граничні умови набувають такого виду (див. також перехід від рівняння (2.20) до рівняння (2.21) в прикладі 2.1)

$$\begin{cases} \dot{g}_{0,1}(\varphi) = (r \cos \varphi - 2)^2 \Big|_{r=2} = 4 \cos^2 \varphi - 8 \cos \varphi + 4 = 6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi, \\ \dot{g}_{0,2}(\varphi) = 4. \end{cases} \quad (4.12)$$

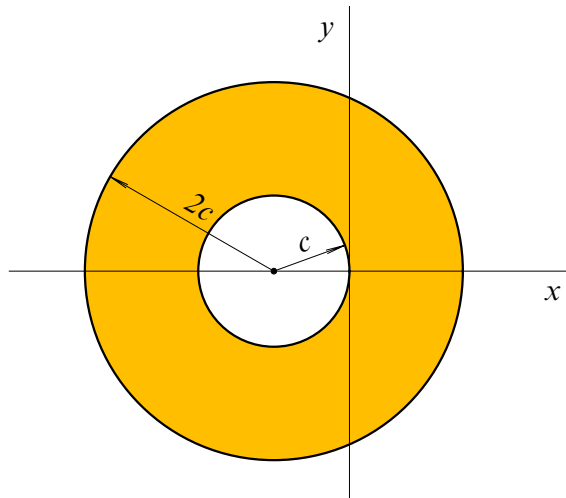


Рис. 4.2. Кільце, обмежене зсередини та зовні двома концентричними колами:  $(x+2)^2 + y^2 = 2^2$  та  $(x+2)^2 + y^2 = 4^2$ , для граничних задач: 1) (4.10) на с. 39 з прикл. 4.1 та 2) (5.14) на с. 44 з прикл. 5.1. Оскільки уздовж вісей  $x, y$  відсутні позначення, насправді зображене кільце, утворене представниками двох 1-параметричних сімей кіл:  $(x+c)^2 + y^2 = c^2$  та  $(x+c)^2 + y^2 = (2c)^2$ , спільний центр  $(-c, 0)$  яких зображений як маленький чорний диск

Отже, ненульові коефіцієнти рядів Фур'є для граничних функцій  $\dot{g}_{0,1}(\varphi), \dot{g}_{0,2}(\varphi)$  суть

$$\frac{a_{1,0}}{2} = 6, \quad a_{1,1} = -8, \quad a_{1,2} = 2, \quad \frac{a_{2,0}}{2} = 4,$$

а складений за ним розв'язок задачі *Діріхле* (4.10) в змінних  $(r, \varphi)$  включає тільки перші два доданки ряду (4.3), (4.9), причому відповідні коефіцієнти  $C_\mu, D_\mu$  суть нульові, згідно формул (4.9) (через те, що  $b_{1,\mu}=0, b_{2,\mu}=0, \mu \in \mathbb{N}$ ), а саме

$$\dot{u}(r, \varphi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{\mu=1}^2 \left( A_\mu r^{-\mu} + B_\mu r^{+\mu} \right) \cos(\mu\varphi). \quad (4.13)$$

Обчислення за формулами (4.9) дають такі значення коефіцієнтів (4.13)

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{2} \frac{12 \ln 4 - 8 \ln 2}{\ln 4 - \ln 2} = 8, & D_0 &= \frac{1}{2} \frac{8 - 12}{\ln 4 - \ln 2} = -\frac{2}{\ln 2}, \\ A_1 &= 2^1 \cdot 4^1 \frac{4^1 \cdot (-8) - 2^1 \cdot 0}{4^2 - 2^2} = -\frac{64}{3}, & B_1 &= \frac{4^1 \cdot 0 - 2^1 \cdot (-8)}{4^2 - 2^2} = \frac{4}{3}, \\ A_2 &= 2^2 \cdot 4^2 \frac{4^2 \cdot 2 - 2^2 \cdot 0}{4^4 - 2^4} = \frac{128}{15}, & B_2 &= \frac{4^2 \cdot 0 - 2^2 \cdot 2}{4^4 - 2^4} = -\frac{1}{2} \frac{1}{15}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

отже, остаточне подання розв'язку в місцевих полярних змінних є таким

$$\dot{u}(r, \varphi) = 8 - 2 \frac{\ln r}{\ln 2} + \frac{1}{3} \left( -\frac{64}{r} + 4r \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( \frac{128}{r^2} - \frac{1}{2} r^2 \right) \cos 2\varphi. \quad (4.15)$$

Обґрунтуємо розв'язок (4.15), для чого покажемо, що він: 1) справджує *Лапласа*; 2) задовольняє граничні умови. 1) Спочатку знайдемо перші і другі повторні частинні похідні функції  $\dot{u}(r, \varphi)$  (4.15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} &= -\frac{2}{\ln 2} \frac{1}{r} + \frac{1}{3} \left( \frac{64}{r^2} + 4 \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( -\frac{2 \cdot 128}{r^3} - r \right) \cos 2\varphi, \\ \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} &= +\frac{2}{\ln 2} \frac{1}{r^2} - \frac{2}{3} \frac{64}{r^3} \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( \frac{6 \cdot 128}{r^4} - 1 \right) \cos 2\varphi, \\ \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{3} \left( -\frac{64}{r} + 4r \right) \sin \varphi - \frac{2}{15} \left( \frac{128}{r^2} - \frac{1}{2} r^2 \right) \sin 2\varphi, \\ \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} &= -\frac{1}{3} \left( -\frac{64}{r} + 4r \right) \cos \varphi - \frac{4}{15} \left( \frac{128}{r^2} - \frac{1}{2} r^2 \right) \cos 2\varphi, \end{aligned}$$

які підставимо в ліву частину рівняння *Лапласа* і переконаємося, що вона тотожно перетворюється в нуль

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u}(r, \varphi) &= \frac{\partial^2 \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = \\ &= +\frac{2}{\ln 2} \frac{1}{r^2} - \frac{2}{3} \frac{64}{r^3} \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( \frac{6 \cdot 128}{r^4} - 1 \right) \cos 2\varphi - \\ &\quad - \frac{2}{\ln 2} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{3} \left( \frac{64}{r^3} + \frac{4}{r} \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( -\frac{2 \cdot 128}{r^4} - \frac{1}{r} \right) \cos 2\varphi - \\ &\quad - \frac{1}{3} \left( -\frac{64}{r^3} + \frac{4}{r} \right) \cos \varphi - \frac{4}{15} \left( \frac{128}{r^4} - \frac{1}{2} \right) \cos 2\varphi \equiv 0. \end{aligned}$$



2) Далі обчислимо значення функції  $\dot{u}(r, \varphi)$  (4.15) на границі кільця (на внутрішньому та зовнішньому колах)

$$\begin{aligned}
\dot{u}(2, \varphi) &= \left[ 8 - 2 \frac{\ln r}{\ln 2} + \frac{1}{3} \left( -\frac{64}{r} + 4r \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( \frac{128}{r^2} - \frac{1}{2} r^2 \right) \cos 2\varphi \right] \Big|_{r=2} = \\
&= 8 - 2 \frac{\ln 2}{\ln 2} + \frac{1}{3} \left( -\frac{64}{2} + 4 \cdot 2 \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( \frac{128}{2^2} - \frac{1}{2} 2^2 \right) \cos 2\varphi = \\
&= 6 + \frac{1}{3} \frac{-64 + 2 \cdot 8}{2} \cos \varphi + \frac{1}{15} \frac{128 - 2 \cdot 4}{4} \cos 2\varphi = 6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi = \dot{g}_{0,1}(\varphi), \\
\dot{u}(4, \varphi) &= \left[ 8 - 2 \frac{\ln r}{\ln 2} + \frac{1}{3} \left( -\frac{64}{r} + 4r \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( \frac{128}{r^2} - \frac{1}{2} r^2 \right) \cos 2\varphi \right] \Big|_{r=4} = \\
&= 8 - 2 \frac{\ln 4}{\ln 2} + \frac{1}{3} \left( -\frac{64}{4} + 4 \cdot 4 \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( \frac{128}{4^2} - \frac{1}{2} 4^2 \right) \cos 2\varphi = \\
&= 4 + \frac{1}{3} \frac{-64 + 4 \cdot 16}{4} \cos \varphi + \frac{1}{15} \frac{128 - 8 \cdot 16}{16} \cos 2\varphi = 4 \equiv \dot{g}_{0,2}(\varphi),
\end{aligned}$$

і переконаємося, що граничні умови задовільнені.. ▲

## 5 Задача Ноймана в кільці

### 5.1 Постановка задачі

Задача Ноймана в кільці полягає в знаходженні функції  $u(x, y)$ : 1) гармонійної всередині кільця  $\mathcal{D}$ ; 2) неперервно диференційованої в замиканні  $\mathcal{D} + \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$  кільця; 3) похідна якої за напрямом орта  $\boldsymbol{\nu}$  зовнішньої нормалі до границі  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$  кільця, набуває заданих значень, а саме

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathcal{D} = \left\{ (x, y) \mid c_1^2 < x^2 + y^2 < c_2^2 \right\}, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_{1,1}(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C}_1 = \left\{ (x, y) \mid c_1^2 = x^2 + y^2 \right\}, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_{1,2}(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C}_2 = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = c_2^2 \right\}, \end{cases} \quad (5.1)$$

причому 4) виконана умова розв'язності задачі

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial u(x, y)}{\partial \boldsymbol{\nu}} d\mathcal{C} = \oint_{\mathcal{C}_1} g_{1,1}(x, y) d\mathcal{C}_1 + \oint_{\mathcal{C}_2} g_{1,2}(x, y) d\mathcal{C}_2 = 0. \quad (5.2)$$

В полярних змінних постановка задачі *Ноймана* є такою

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (r, \varphi) \in (c_1, c_2) \times [0, 2\pi), \\ -\frac{\partial \dot{u}(c_1, \varphi)}{\partial r} = \dot{g}_{1,1}(\varphi) \\ +\frac{\partial \dot{u}(c_2, \varphi)}{\partial r} = \dot{g}_{1,2}(\varphi) \end{array} \right\}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (5.3)$$

$$\dot{u}(r, 0) = \dot{u}(r, 2\pi), \quad r \in [c_1, c_2],$$

де шуканий розв'язок  $\dot{u}(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  всередині кільця задовольняє умови: *а)* обмеженості; *б)* періодичності за полярним кутом  $\varphi$ ; граничні функції  $\dot{g}_{1,1}(\varphi) := g_{1,1}(c_1 \cos \varphi, c_1 \sin \varphi)$ ,  $\dot{g}_{1,2}(\varphi) := g_{1,2}(c_2 \cos \varphi, c_2 \sin \varphi)$  суть неперервні; умова розв'язності (5.2) набуває такого подання

$$c_1 \int_0^{2\pi} \dot{g}_{1,1}(\varphi) d\varphi + c_2 \int_0^{2\pi} \dot{g}_{1,2}(\varphi) d\varphi = 0. \quad (5.4)$$

## 5.2 Розв'язання задачі

Звернемося до параметричної сім'ї (1.18) на с. 9, в якій збережемо всі члени і застосуємо як *анзатц* (4.3) на с. 37 шуканого розв'язку задачі:

- 1) розвинемо граничні функції  $\dot{g}_{0,1}(\varphi)$ ,  $\dot{g}_{0,2}(\varphi)$  в ряди *Фур'є* (4.4) на с. 37;
- 2) знайдемо похідну *анзатцу* (4.3) за змінною  $r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r} &= \frac{D_0}{r} + \\ &+ \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu \left[ \left( -A_{\mu} r^{-\mu-1} + B_{\mu} r^{+\mu-1} \right) \cos(\mu\varphi) + \left( -C_{\mu} r^{-\mu-1} + D_{\mu} r^{+\mu-1} \right) \sin(\mu\varphi) \right]; \end{aligned} \quad (5.5)$$

- 3) залишемо граничні умови для *анзатцу* (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}(c_1, \varphi)}{\partial r} &\equiv \frac{D_0}{c_1} + \\ &+ \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu \left[ \left( -A_{\mu} c_1^{-\mu-1} + B_{\mu} c_1^{+\mu-1} \right) \cos(\mu\varphi) + \left( -C_{\mu} c_1^{-\mu-1} + D_{\mu} c_1^{+\mu-1} \right) \sin(\mu\varphi) \right] = \\ &= -\frac{a_{1,0}}{2} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( a_{1,\mu} \cos(\mu\varphi) + b_{1,\mu} \sin(\mu\varphi) \right) \equiv -\dot{g}_{1,1}(\varphi), \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{u}(c_2, \varphi)}{\partial r} &\equiv \frac{D_0}{c_2} + \\
&+ \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu \left[ \left( -A_{\mu} c_2^{-\mu-1} + B_{\mu} c_2^{+\mu-1} \right) \cos(\mu\varphi) + \left( -C_{\mu} c_2^{-\mu-1} + D_{\mu} c_2^{+\mu-1} \right) \sin(\mu\varphi) \right] = \\
&= +\frac{a_{2,0}}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( a_{2,\mu} \cos(\mu\varphi) + b_{2,\mu} \sin(\mu\varphi) \right) \equiv +\dot{g}_{1,2}(\varphi); \tag{5.7}
\end{aligned}$$

4) з зіставлення лівих і правих частин граничних умов (5.6) та (5.6) одержимо злічені послідовності незалежних (відносно  $\mu$ ) систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень довільних сталих *анзату* (4.3)

$$\frac{D_0}{c_1} = -\frac{a_{1,0}}{2}, \quad \frac{D_0}{c_2} = +\frac{a_{2,0}}{2}, \tag{5.8}$$

$$\begin{cases} -\mu c_1^{-\mu-1} A_{\mu} + \mu c_1^{+\mu-1} B_{\mu} = -a_{1,\mu}, \\ -\mu c_2^{-\mu-1} A_{\mu} + \mu c_2^{+\mu-1} B_{\mu} = +a_{2,\mu}, \end{cases} \quad \mu = 1, 2, \dots, \tag{5.9}$$

$$\begin{cases} -\mu c_1^{-\mu-1} C_{\mu} + \mu c_1^{+\mu-1} D_{\mu} = -b_{1,\mu}, \\ -\mu c_2^{-\mu-1} C_{\mu} + \mu c_2^{+\mu-1} D_{\mu} = +b_{2,\mu}, \end{cases} \quad \mu = 1, 2, \dots; \tag{5.10}$$

5) з системи (5.8) знайдемо два різних вирази для коефіцієнта  $B_0$

$$D_0 = -c_1 \frac{a_{1,0}}{2}, \quad D_0 = +c_2 \frac{a_{2,0}}{2}, \tag{5.11}$$

які, проте, суть сумісні (див. задачу 6.7 на с. 47);

6) розв'яжемо системи (5.9), (5.10) за формулами *Крамера*

$$\Delta_{\mu} = \mu \begin{vmatrix} -c_1^{-\mu-1} & +c_1^{+\mu-1} \\ -c_2^{-\mu-1} & +c_2^{+\mu-1} \end{vmatrix}, \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
A_{\mu} &= \Delta_{\mu}^{-1} \begin{vmatrix} -a_{1,\mu} & +c_1^{+\mu-1} \\ +a_{2,\mu} & +c_2^{+\mu-1} \end{vmatrix}, & B_{\mu} &= \Delta_{\mu}^{-1} \begin{vmatrix} -c_1^{-\mu-1} & -a_{1,\mu} \\ -c_2^{-\mu-1} & +a_{2,\mu} \end{vmatrix}, \\
C_{\mu} &= \Delta_{\mu}^{-1} \begin{vmatrix} -b_{1,\mu} & +c_1^{+\mu-1} \\ +b_{2,\mu} & +c_2^{+\mu-1} \end{vmatrix}, & D_{\mu} &= \Delta_{\mu}^{-1} \begin{vmatrix} -c_1^{-\mu-1} & -b_{1,\mu} \\ -c_2^{-\mu-1} & +b_{2,\mu} \end{vmatrix};
\end{aligned}$$

7) запишемо остаточні вирази для значень шуканих сталих *анзату* (4.3)

$$\begin{cases} D_0 = -c_1 \frac{a_{1,0}}{2} = +c_2 \frac{a_{2,0}}{2}, \\ A_\mu = \frac{c_1^{\mu+1} c_2^{\mu+1}}{\mu} \frac{c_1^{\mu-1} a_{2,\mu} + c_2^{\mu-1} a_{1,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}, & B_\mu = \frac{1}{\mu} \frac{c_1^{\mu+1} a_{1,\mu} + c_2^{\mu+1} a_{2,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}, \\ C_\mu = \frac{c_1^{\mu+1} c_2^{\mu+1}}{\mu} \frac{c_1^{\mu-1} b_{2,\mu} + c_2^{\mu-1} b_{1,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}, & D_\mu = \frac{1}{\mu} \frac{c_1^{\mu+1} b_{1,\mu} + c_2^{\mu+1} b_{2,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Очевидно, що через наявність членів  $r^{-\mu}$ , розв'язок (4.3) не може бути поданий в декартових змінних.

### 5.3 Приклади розв'язання задачі

**Приклад 5.1.** Розглянемо задачу *Ноймана* для рівняння *Лапласа* в кільці, обмеженому зсередини колом  $x^2 + y^2 + 4x = 0$ , а зовні — колом, яке має той самий центр і вдвічі більший радіус  $c_2$  (тобто  $x_0 = -2, y_0 = 0, c_1 = 2, c_2 = 4$ , див. прикл. 4.1 на с. 38 та рис. 4.2). На внутрішньому колі похідна шуканої функції за напрямом орта зовнішньої нормалі набуває значень  $x^2$ , а на зовнішньому — невідомого сталого значення  $A$ . Отже, можемо записати постановку задачі подібно до (5.1) на с. 41

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 2^2 < (x+2)^2 + y^2 < 4^2, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = x^2, & 2^2 = (x+2)^2 + y^2, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = A, & (x+2)^2 + y^2 = 4^2. \end{cases} \quad (5.14)$$

В полярних змінних кільце має опис (4.11) (див. також рис. 4.2 на с. 39)

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi - 2, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad 2 \leq r \leq 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (5.15)$$

а граничні умови такі

$$\begin{cases} \dot{g}_{1,1}(\varphi) = (r \cos \varphi - 2)^2 \Big|_{r=2} = 4 \cos^2 \varphi - 8 \cos \varphi + 4 = 6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi, \\ \dot{g}_{1,2}(\varphi) = A. \end{cases} \quad (5.16)$$

Запишемо умову розв'язності (5.4) задачі (5.14)

$$c_1 \int_0^{2\pi} \dot{g}_{1,1}(\varphi) d\varphi + c_2 \int_0^{2\pi} \dot{g}_{1,2}(\varphi) d\varphi = c_1 \int_0^{2\pi} \dot{g}_{1,1}(\varphi) d\varphi + 4 \int_0^{2\pi} A d\varphi = c_1 \int_0^{2\pi} \dot{g}_{1,1}(\varphi) d\varphi + 4 \cdot 2\pi A = 0, \quad (5.17)$$

з якого знайдемо допустиме значення сталої

$$A = -\frac{c_1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \dot{g}_{1,1}(\varphi) d\varphi = -\frac{2}{8\pi} \int_0^{2\pi} (6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi) d\varphi = -\frac{1}{4\pi} 12\pi = -3. \quad (5.18)$$

Отже, замість задачі *Ноймана* (5.14) розглядатимемо «виправлену» задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 2^2 < (x+2)^2 + y^2 < 4^2, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = x^2, & 2^2 = (x+2)^2 + y^2, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = -3, & (x+2)^2 + y^2 = 4^2. \end{cases} \quad (5.19)$$

Ненульові коефіцієнти рядів *Фур'є* для граничних функцій  $\dot{g}_{0,1}(\varphi), \dot{g}_{0,2}(\varphi)$  суть такі

$$\frac{a_{1,0}}{2} = 6, \quad a_{1,1} = -8, \quad a_{1,2} = 2, \quad \frac{a_{2,0}}{2} = -6,$$

а складений за ними розв'язок задачі *Ноймана* (5.19) в змінних  $(r, \varphi)$  включає тільки перші два доданки ряду (1.18), (5.13), причому коефіцієнти  $C_\mu, D_\mu$  обертаються в нуль, згідно формул (4.9) (через те, що  $b_{1,\mu}=0, b_{2,\mu}=0, \mu \in \mathbb{N}$ ), а саме

$$\dot{u}(r, \varphi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{\mu=1}^2 \left( A_\mu r^{-\mu} + B_\mu r^{+\mu} \right) \cos(\mu\varphi). \quad (5.20)$$

Обчислення за формулами (5.13) дають значення коефіцієнтів (5.20)

$$\begin{aligned} D_0 &= -2 \frac{12}{2} = +4 \frac{-6}{2} = -12, \\ A_1 &= \frac{2^{1+1} \cdot 4^{1+1}}{1} \frac{2^{1-1} \cdot 0 + 4^{1-1} \cdot (-8)}{4^{2-1} - 2^{2-1}} = -\frac{128}{3}, \quad B_1 = \frac{1}{1} \frac{2^{1+1} \cdot (-8) + 4^{1+1} \cdot 0}{4^{2-1} - 2^{2-1}} = -\frac{8}{3}, \\ A_2 &= \frac{2^{2+1} \cdot 4^{2+1}}{2} \frac{2^{2-1} \cdot 0 + 4^{2-1} \cdot 2}{4^{2-2} - 2^{2-2}} = \frac{128}{15}, \quad B_2 = \frac{1}{2} \frac{2^{2+1} \cdot 2 + 4^{2+1} \cdot 0}{4^{2-2} - 2^{2-2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{15}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

а, отже, остаточне подання розв'язку є таким

$$\dot{u}(r, \varphi) = -12 \ln r - \frac{1}{3} \left( 128 \frac{1}{r} + 8r \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( 128 \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2} r^2 \right) \cos 2\varphi. \quad (5.22)$$

Обґрунтуємо розв'язок (5.22), для чого покажемо, що він: 1) справджує рівняння *Лапласа*; 2) задовольняє граничні умови. 1) Спочатку знайдемо перші і другі повторні частинні похідні функції  $\dot{u}(r, \varphi)$  (5.22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} &= -\frac{12}{r} - \frac{1}{3} \left( -128 \frac{1}{r^2} + 8 \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( -2 \cdot 128 \frac{1}{r^3} + r \right) \cos 2\varphi, \\ \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} &= +\frac{12}{r^2} - \frac{2 \cdot 128}{3} \frac{1}{r^3} \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( 2 \cdot 3 \cdot 128 \frac{1}{r^4} + 1 \right) \cos 2\varphi, \\ \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} &= +\frac{1}{3} \left( 128 \frac{1}{r} + 8r \right) \sin \varphi - \frac{2}{15} \left( 128 \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2} r^2 \right) \sin 2\varphi, \\ \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} &= +\frac{1}{3} \left( 128 \frac{1}{r} + 8r \right) \cos \varphi - \frac{4}{15} \left( 128 \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2} r^2 \right) \cos 2\varphi, \end{aligned}$$

які підставимо в рівняння *Лапласа* і переконаємося, що вона справджено

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{u}(r, \varphi) &= \frac{\partial^2 \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = \\
&= +\frac{12}{r^2} - \frac{2 \cdot 128}{3} \frac{1}{r^3} \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( 2 \cdot 3 \cdot 128 \frac{1}{r^4} + 1 \right) \cos 2\varphi - \\
&\quad -\frac{12}{r^2} - \frac{1}{3} \left( -128 \frac{1}{r^3} + 8 \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( -2 \cdot 128 \frac{1}{r^4} + 1 \right) \cos 2\varphi + \\
&\quad + \frac{1}{3} \left( +128 \frac{1}{r^3} + 8 \frac{1}{r} \right) \cos \varphi - \frac{4}{15} \left( 128 \frac{1}{r^4} + \frac{1}{2} \right) \cos 2\varphi \equiv 0.
\end{aligned}$$

2) Далі обчислимо значення похідної функції  $\dot{u}(r, \varphi)$  (5.22) за напрямом орта зовнішньої нормалі до границі кільця (тобто на внутрішньому і зовнішньому колі)

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial \nu} \right|_{r=2} &= - \left. \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=2} = \\
&= - \left[ -\frac{12}{r} - \frac{1}{3} \left( -128 \frac{1}{r^2} + 8 \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( -2 \cdot 128 \frac{1}{r^3} + r \right) \cos 2\varphi \right] \Big|_{r=2} = \\
&= \frac{12}{2} + \frac{1}{3} \left( -128 \frac{1}{2^2} + 8 \right) \cos \varphi - \frac{1}{15} \left( -2 \cdot 128 \frac{1}{2^3} + 2 \right) \cos 2\varphi = \\
&= 6 + \frac{-128 + 4 \cdot 8}{3 \cdot 4} \cos \varphi - \frac{-128 + 4 \cdot 2}{4 \cdot 15} \cos 2\varphi = \\
&= 6 - 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi \equiv \dot{g}_{1,1}(\varphi), \\
\left. \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial \nu} \right|_{r=4} &= + \left. \frac{\partial \dot{u}(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=4} = \\
&= + \left[ -\frac{12}{r} - \frac{1}{3} \left( -128 \frac{1}{r^2} + 8 \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( -2 \cdot 128 \frac{1}{r^3} + r \right) \cos 2\varphi \right] \Big|_{r=4} = \\
&= -\frac{12}{4} - \frac{1}{3} \left( -128 \frac{1}{4^2} + 8 \right) \cos \varphi + \frac{1}{15} \left( -2 \cdot 128 \frac{1}{4^3} + 4 \right) \cos 2\varphi = \\
&= -3 - \frac{-128 + 16 \cdot 8}{3 \cdot 16} \cos \varphi + \frac{-128 + 32 \cdot 4}{15 \cdot 32} \cos 2\varphi = -3 \equiv \dot{g}_{1,2}(\varphi),
\end{aligned}$$

і переконаємося, що граничні умови задовільнені.

Отже, розв'язок задачі *Ноймана* (5.19) знайдений правильно. ▲

## 6 Задачі для самостійної роботи

**Задача 6.1.** Розв'яжіть внутрішню задачу *Діріхле* (2.28) на с. 18 в областях з границями  $\mathcal{C}$  і рекурентними граничними умовами, зведеними в табл. 6.1 на с. 47 ( $k = 1, 2, 3$ ). Запишіть розв'язки в полярній і декартовій системах координат. Обґрунтуйте розв'язки, а саме доведіть, що вони: а) справджують рівняння *Лапласа*; б) задовольняють граничну умову. Побудуйте зображення знайдених розв'язків. ▲

**Задача 6.2.** Розв'яжіть зовнішню задачу *Діріхле* (2.40) на с. 28 в областях з границями  $\mathcal{C}$  і рекурентними граничними умовами, зведеними в табл. 6.1 на с. 47. Запишіть розв'язки в полярній системі координат. Обґрунтуйте розв'язки, а саме доведіть, що вони: а) справджують рівняння *Лапласа*; б) задовольняють граничну умову. Побудуйте зображення знайдених розв'язків. ▲

Табл. 6.1. Рекурентні граничні умови для задачі *Діріхле*:  $g_{0,k+1} = g_{0,k} + \delta g_{0,k+1}$

| № | $g_{0,1}(x, y)$ | $\delta g_{0,2}(x, y)$    | $\delta g_{0,3}(x, y)$ | $\delta g_{0,4}(x, y)$ | $\mathcal{C}$                 |
|---|-----------------|---------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------------|
| 1 | $x^2$           | $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$ | $x^4$                  | $x^5$                  | $x^2 + y^2 - x - 2y - 1 = 0$  |
| 2 | $y^2$           | $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$ | $y^4$                  | $y^5$                  | $x^2 + y^2 + x + 6y + 7 = 0$  |
| 3 | $xy$            | $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$ | $x^3y$                 | $x^4y$                 | $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$ |
| 4 | $x^2 + x$       | $x^3 + y^3 + x^2y$        | $xy^3$                 | $xy^4$                 | $x^2 + y^2 + 2x - 5y + 5 = 0$ |
| 5 | $y^2 + x$       | $x^3 + y^3 + xy^2$        | $x^2y^2$               | $x^3y^2$               | $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 4 = 0$ |
| 6 | $xy + x$        | $x^3 + x^2y + xy^2$       | $x^4$                  | $x^2y^3$               | $x^2 + y^2 + 4x + y + 2 = 0$  |
| 7 | $x^2 + y$       | $y^3 + x^2y + xy^2$       | $y^4$                  | $x^5$                  | $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 8 = 0$ |

**Задача 6.3.** Поясніть відсутність коефіцієнта  $a_0$  в розвиненні граничної функції  $u_1(r, \varphi)$  в ряд *Фур'є* (3.6) на с. 29. ▲

**Задача 6.4.** Запишіть, якщо це можливо, розв'язок (3.8) на с. 29 задачі *Ноймана* для рівняння *Лапласа* всередині диска (3.3) в декартових змінних. ▲

**Задача 6.5.** Поясніть відсутність коефіцієнта  $a_0$  в розвиненні граничної функції  $g_1(r, \varphi)$  в ряд *Фур'є* (3.14) на с. 30. ▲

**Задача 6.6.** Запишіть, якщо це можливо, розв'язок (3.16) на с. 31 задачі *Ноймана* для рівняння *Лапласа* зовні диска (3.11) в декартових змінних. ▲

**Задача 6.7.** Доведіть, що рівність (5.11), яка встановлює зв'язок між нульовими коефіцієнтами розвинення граничних функцій в ряди *Фур'є*, не приводить до протиріччя, оскільки є наслідком умови розв'язності (5.4) задачі *Ноймана* (5.3) для рівняння *Лапласа* в кільці. ▲

## Бібліографічний опис

1. *Бобик О. І.* Рівняння математичної фізики: навчальний посібник / *О. І. Бобик, І. О. Бобик, В. В. Литвин.* — Львів: Вид-во «Новий Світ–2000», 2024. — 256 с.
2. *Бондаренко В. Г.* Рівняння математичної фізики: навчальний посібник для студентів спеціальності 124 «системний аналіз» / *В. Г. Бондаренко.* — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — 100 с.
3. *Бугрій О. М.* Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі: навчальний посібник / *О. М. Бугрій, О. М. Процах, Н. В. Бугрій.* — Львів, Видавець І. Е. Чижигов, 2011. — 348 с. — (Університетська бібліотека)
4. *Вайсфельд Н. Д.* Рівняння математичної фізики: навчально-методичний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика» / *Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут.* — Одеса: Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, 2018. — 194 с.
5. *Курпа Л. В.* Рівняння математичної фізики: навчальний посібник / *Л. В. Курпа, Г. Б. Лінник.* — Харків: Вид-во «Підручник НТУ ХП», 2011. — 312 с.
6. *Лопушанська Г. П.* Диференціальні рівняння та рівня математичної фізики / *Г. П. Лопушанська, О. М. Бугрій, А. О. Лопушанський.* — 2-е вид., випр. і допов. — Львів.: Видавець І. Е. Чижигов, 2017. — 372 с.
7. *Borsch V. L.* On a representation of the solution to the Dirichlet problem in a circle / *V. L. Borsch, I. E. Platonova* // *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*, 2017. — Vol. 25, No 8, P. 3–20.  
<http://dx.doi.org/10.15421/141701>
8. *Borsch V. L.* On a representation of the solution to the Dirichlet problem in a disk. The Poisson integral based solution in polynomials / *V. L. Borsch, I. E. Platonova* // *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*, 2018. — Vol. 26, No 1, P. 72–77.  
<http://dx.doi.org/10.15421/141805>