

Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

---

Механіко-математичний факультет  
Кафедра математичного аналізу та оптимізації

Борщ В. Л.

РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ ПРОСТОРОВО-ОДНОВИМІРНИХ  
ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ  
МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ  
ЗА МЕТОДОМ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

Дніпро  
2025

УДК 517.9

Б83

*Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету  
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара  
(протокол № від червня 2025)*

Рецензенти

**П. І. Когут** — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара

**В. Б. Говоруха** — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, фізики і загально інженерних дисциплін Дніпровського державного аграрно-економічного університету

В авторській редакції

**Борщ В. Л.**

## **РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОСТОРОВО-ОДНОВИМІРНИХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ЗА МЕТОДОМ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ**

Поданий теоретичний матеріал з дисципліни «Рівняння математичної фізики», який стосується розв'язання крайових задач для просторово-одновимірних еволюційних рівнянь математичної фізики; допоміжні задачі для самостійного розв'язування доповнюють викладене.

Для здобувачів вищої освіти за спеціальностями 111 Математика, 112 Статистика, 113 Прикладна математика та 124 Системний аналіз факультетів механіко-математичного і прикладної математики та інформаційних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

© Борщ В. Л., 2025

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>4</b>
<b>1 Введення в метод відокремлення змінних</b>	<b>5</b>
1.1 Відокремлення змінних в рівняннях теплопроводності та коливань . . . . .	5
1.2 Задача <i>Штурма – Ліувілля</i> . . . . .	18
1.3 Задачі для самостійної роботи . . . . .	24
1.4 Пояснення . . . . .	30
<b>2 Крайова задача для рівняння коливань з граничними умовами <i>Діріхле</i></b>	<b>32</b>
2.0 Постановка задачі . . . . .	32
2.1 Розв’язання задачі за методом відокремлення змінних . . . . .	33
2.2 Інтегральне подання розв’язку задачі . . . . .	35
2.3 Обґрунтування розв’язку задачі . . . . .	36
2.4 Задачі для самостійної роботи . . . . .	40
<b>3 Крайова задача для рівняння теплопроводності з граничними умовами <i>Діріхле</i></b>	<b>40</b>
3.1 Постановка задачі . . . . .	40
3.2 Розв’язання задачі за методом відокремлення змінних . . . . .	41
3.3 Інтегральне подання розв’язку задачі . . . . .	43
3.4 Обґрунтування розв’язку задачі . . . . .	43
<b>Бібліографічний опис</b>	<b>48</b>

## Вступ

Навчальна дисципліна «Рівняння математичної фізики» входить до відповідних освітньо-професійних програм для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 111 Математика, 112 Статистика, 113 Прикладна математика та 124 Системний аналіз, як обов'язкова компонента циклу професійної підготовки. Серед компетенцій освітніх програм за вказаними спеціальностями вивчення математичних моделей фізичних явищ, розробка та вивчення математичних методів розв'язання прикладних задач, тощо, посідають далеко не останні місця. Програма навчальної дисципліни «Рівняння математичної фізики» задовольняє ці вимоги завдяки значному переліку математичних моделей фізичних явищ та задач, які пояснюють ці моделі.

Серед різноманітних моделей, знайомство з якими передбачено програмами вивчення навчальної дисципліни «Рівняння математичної фізики», крайові задачі для просторово одновимірних рівнянь гіперболічного та параболічного типу посідають одне із важливих місць, оскільки виступають однією з перших сходинок до опанування більш складних моделей. В даному посібнику поставлена скромна мета ознайомити студентів із застосуванням «одновимірного» різновиду методу відокремлення змінних для вказаних задач.

Матеріал посібника поділений на три розділи. В *першому* роздіді викладені основні постановки граничних задач для просторово одновимірних рівнянь гіперболічного та параболічного типу, а також складові методу відокремлення змінних, серед яких спрощена гранична задача *Штурма – Ліувілля*, поняття повної та замкненої системи функцій, породженої задачею *Штурма – Ліувілля*, подання розв'язків крайових задач у вигляді функціональних рядів за власними функціями, тощо. Обґрунтування вказаних складових подано тільки у вигляді відповідних тверджень, проте без доведень, оскільки потребує значного обсягу видання, відповідної кількості академічних годин і застосування методів інших дисциплін, зокрема теорій диференціальних та інтегральних рівнянь, тощо.

В *другому* та *третьому* розділах розглянуті частинні постановки крайових задач для граничних умов *Діріхле*, одержані відповідні розв'язки та наведені повні обґрунтування розв'язків, проте, виключно методами математичного аналізу.

Виходячи з обмеженого обсягу видання, допоміжні та довідкові відомості, а також задачі і розв'язки до окремих задач, подані дрібним шрифтом.

# 1 Введення в метод відокремлення змінних

## 1.1 Відокремлення змінних в рівняннях теплопроводності та коливань

Розглянемо відокремлення змінних  $(t, x)$  для *еволюційних* крайових задач (тобто таких, в складі яких є рівняння з виділеною незалежною змінною, називаною часом  $t$ ; напрям зміни значень часу завжди додатний, а спостережуваними можуть бути тільки миті часу, проте не скінчені проміжки) в замиканні  $\bar{\mathcal{H}} = [0, T] \times [0, l] = \mathcal{H} + \Pi$  часово-просторового прямокутника  $\mathcal{H} = (0, T] \times (0, l)$  (див. рис. 1.1, скінчений часовий проміжок  $[0, T]$  зображений тільки для зручності постановки задач, проте не є спостережуваним) в складі рівняння теплопроводності і початкової умови

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x), & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ u(0, x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (1.1)$$

та в складі рівняння коливань і початкових умов

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x), & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = u_1(x) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.2)$$

а також для обох крайових задач — узагальнених граничних умов (надалі вважатимемо виконання умов  $\alpha_0^2 + \omega_0^2 \neq 0$ ,  $\alpha_1^2 + \omega_1^2 \neq 0$ )

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 u(t, 0) + \omega_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} &= \psi_1(t) \\ \alpha_1 u(t, l) + \omega_1 \frac{\partial u(t, l)}{\partial x} &= \psi_2(t) \end{aligned} \right\}, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.3)$$

Для того, щоб не відволікатися від застосування відокремлення змінних, не будемо накладати ніяких умов гладкості на: *а)* шукані розв'язки крайових задач, *б)* функції, присутні в постановках задач, а також *в)* функції, які будуть введені при застосуванні метода відокремлення змінних, отже, будемо вважати всі операції над вказаними функціями можливими. Зазвичай, всі необхідні уточнення запроваджують при розгляді певних постановок крайових задач та обґрунтуванні їх розв'язків.

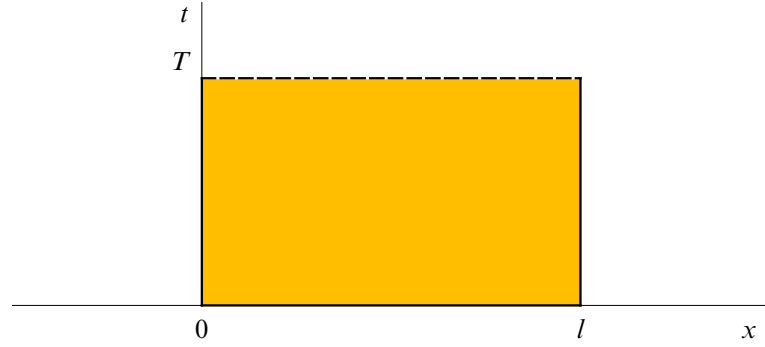


Рис. 1.1. Замкнений часово-просторовий прямокутник  $\bar{\mathcal{H}} = [0, T] \times [0, l]$  в площині змінних  $(t, x)$  для постановки крайових задач відносно функції  $u(t, x)$ , яка: 1) справджує *еволюційне* дифференціальне рівняння в прямокутнику  $\mathcal{H} = (0, T] \times (0, l)$ ; 2) задовольняє додаткові умови на так званій *параболічній границі*  $\Pi$  (проведена суцільною лінією і є лише частиною «справжньої» границі прямокутника): *а) початковим* на нижній ділянці границі  $\Pi$ ; *б) граничним* на бокових ділянках границі  $\Pi$ ; *в) узгодженості* в кутових точках границі  $\Pi$  (див. (2.2) на с. 33 та (3.2) на с. 40). На верхній частині «справжньої» границі прямокутника (не входить до складу  $\Pi$ , проведена штриховою лінією) відсутні жодні умови (тобто, майбутнє «відкрите»)

*Перший крок* розв'язання крайових задач (1.1) + (1.3), (1.2) + (1.3) полягає в тому, щоб увести «руками» функцію  $\psi(t, x)$ , яка задовольняє граничні умови (1.3), а саме

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 \psi(t, 0) + \omega_0 \frac{\partial \psi(t, 0)}{\partial x} &= \psi_1(t) \\ \alpha_1 \psi(t, l) + \omega_1 \frac{\partial \psi(t, l)}{\partial x} &= \psi_2(t) \end{aligned} \right\}, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.4)$$

Зазначимо, що введення функції  $\psi(t, x)$ : *по-перше*, можливе (наприклад, за допомогою багаточленів або тригонометричних функцій, тощо); *по-друге*, не єдине.

*Другий крок* розв'язання крайових задач (1.1) + (1.3), (1.2) + (1.3) полягає в введенні *анзатца* для шуканих розв'язків у вигляді суми

$$u(t, x) = U(t, x) + \psi(t, x), \quad (1.5)$$

де функція  $U(t, x)$  стає визначеною після підстановки її подання (1.5) в крайові задачі (1.1) + (1.3) та (1.2) + (1.3), а саме, у разі рівняння теплопроводності вона справджує рівняння з «ною» правою частиною та задовольняє «но-

бу» початкову умову

$$\begin{cases} \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} = h(t, x), & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ U(0, x) = v_0(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (1.6)$$

де «нові» права частина рівняння та початкова умова визначені таким чином

$$\begin{cases} h(t, x) = f(t, x) - \left[ \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} \right], \\ v_0(x) = u_0(x) - \psi(0, x); \end{cases} \quad (1.7)$$

а у разі рівняння коливань вона справджує рівняння з «новою» правою частиною та задовольняє «нові» початкові умови

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} = h(t, x), & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ \frac{\partial U(0, x)}{\partial t} = v_1(x) \\ U(0, x) = v_0(x) \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.8)$$

де «нові» права частина рівняння та початкові умови визначені таким чином

$$\begin{cases} h(t, x) = f(t, x) - \left[ \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} \right], \\ v_1(x) = u_1(x) - \frac{\partial \psi(0, x)}{\partial t}, \\ v_0(x) = u_0(x) - \psi(0, x), \end{cases} \quad (1.9)$$

а також для обох крайових задач — однорідні граничні умови

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 U(t, 0) + \omega_0 \frac{\partial U(t, 0)}{\partial x} &= 0 \\ \alpha_1 U(t, l) + \omega_1 \frac{\partial U(t, l)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.10)$$

Третій крок розв'язання крайових задач (1.1) + (1.3) та (1.2) + (1.3) полягає в введенні *анзатца* для шуканих функцій  $U(t, x)$  у вигляді суми

$$U(t, x) = v(t, x) + w(t, x), \quad (1.11)$$

де допоміжна функція  $v(t, x)$  або справджує однорідне рівняння теплопроводності та задовольняє відповідну «нову» початкову умову

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = 0, & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ v(0, x) = v_0(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (1.12)$$

або справджує однорідне рівняння коливань та задовольняє відповідні «нові» початкові умови

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = 0, & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ \left. \begin{aligned} \frac{\partial v(0, x)}{\partial t} &= v_1(x) \\ v(0, x) &= v_0(x) \end{aligned} \right\}; \end{cases} \quad (1.13)$$

допоміжна функція  $w(t, x)$  або справджує неоднорідне рівняння теплопроводності з « новою » правою частиною та задовольняє однорідну початкову умову

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} = h(t, x), & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ w(0, x) = 0, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (1.14)$$

або справджує неоднорідне рівняння коливань з « новою » правою частиною та задовольняє однорідні початкові умови

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} = h(t, x), & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ \left. \begin{aligned} \frac{\partial w(0, x)}{\partial t} &= 0 \\ w(0, x) &= 0 \end{aligned} \right\}, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (1.15)$$

при цьому обидві допоміжні функції задовольняють однорідні граничні умови (1.10), які не будемо записувати окремо для кожної з допоміжних функцій.

Отже, маємо чотири набори рівнянь, початкових та граничних умов, а саме: 1) (1.12), (1.10); 2) (1.13), (1.10); 3) (1.14), (1.10); 4) (1.15), (1.10), названих далі крайовими задачами 1, 2 (*першого* різновиду) та 3, 4 (*другого* різновиду).



Припустимо, що розв'язки *допоміжних* крайових задач 1, 2 *першого* різновиду можна знаходити за таким *анзатцем*

$$v(t, x) = V(t) X(x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.16)$$

де  $V(t)$ ,  $X(x)$  — поки що невідомі функції тільки часової та просторової змінних, і знайдемо частинні похідні функції  $v(t, x)$  першого та другого порядків

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = V'(t) X(x), & \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} = V''(t) X(x), \\ \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} = V(t) X'(x), & \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = V(t) X''(x). \end{cases} \quad (1.17)$$

Тепер підставимо вирази (1.17) похідних подання (1.16):

1) в *однорідні* рівняння допоміжних крайових задач *першого* різновиду (тобто в *однорідні* рівняння теплопровідності та коливань)

$$V'(t) X(x) = a^2 V(t) X''(x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < x < l;$$

$$V''(t) X(x) = a^2 V(t) X''(x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < x < l;$$

звідки виведемо, що для функцій  $V(t)$  і  $X(x)$  ті їх похідних відповідних порядків мають бути задовільнені такі тотожності (при запису яких враховано, що функції  $V(t)$  і  $X(x)$  можуть обертатися в нуль тільки в окремих точках своїх областей визначення, тобто проміжків  $[0, T]$  і  $[0, l]$  відповідно)

$$\underbrace{\frac{1}{a^2} \frac{V'(t)}{V(t)}}_1 = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_2 = \underbrace{\text{const}}_3, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < x < l; \quad (1.18)$$

$$\underbrace{\frac{1}{a^2} \frac{V''(t)}{V(t)}}_1 = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_2 = \underbrace{\text{const}}_3, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < x < l; \quad (1.19)$$

2) в граничні умови (1.10), звідки виведемо, що функція  $X(x)$  задовольняє однорідні узагальнені граничні умови

$$\alpha_0 X(0) + \omega_0 X'(0) = 0, \quad \alpha_1 X(l) + \omega_1 X'(l) = 0. \quad (1.20)$$

Тепер звернемося до одержаних вище тотожностей (1.18), (1.19) і позначимо сталі за  $-\lambda$  (далі стане зрозуміло, що це обґрунтовано зручністю запису відповідних диференціальних рівнянь), де  $\lambda$  — *параметр відокремлення*

(змінних). Внаслідок цього частини 1, 2 тотожностей порізно перетворюються на лінійні однорідні звичайні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами відповідно *першого* та *другого* порядків відносно функції  $V(t)$  (уточни-мо, що функція  $V(t)$  справджує перше рівняння у разі допоміжної крайової задачі для *однорідного* рівняння теплопроводності та друге рівняння у разі допоміжної крайової задачі для *однорідного* рівняння коливань), а саме

$$V'(t) + \lambda a^2 V(t) = 0, \quad 0 < t \leq T; \quad (1.21)$$

$$V''(t) + \lambda a^2 V(t) = 0, \quad 0 < t \leq T; \quad (1.22)$$

а частини 2, 3 тотожностей перетворюються на лінійне однорідне звичайне диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами *другого* порядку

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (1.23)$$

Диференціальні рівняння (1.21), (1.22) і (1.23) відносно функцій  $V(t)$  і  $X(x)$  містять параметр відокремлення  $\lambda$ , значення якого не визначено. Це означає, що слід поєднати знаходження функцій  $V(t)$  і  $X(x)$  і *допустимих* (в тому розумінні, яке буде надане нижче) значень параметра  $\lambda$ .

Щодо знаходження функцій  $V(t)$ , відразу вкажемо такі сім'ї розв'язків (*загальні розв'язки* або *загальні інтеграли*):

а) 1-параметричні для диференціального рівняння (1.21)

$$V(t) = A e^{-\lambda a^2 t}, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (1.24)$$

б) 2-параметричні для диференціального рівняння (1.22)

$$\left\{ \begin{array}{ll} V(t) = B e^{-\sqrt{-\lambda} a t} + C e^{+\sqrt{-\lambda} a t}, & \lambda < 0, \\ V(t) = B t + C, & \lambda = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \\ V(t) = B \cos(\sqrt{\lambda} a t) + C \sin(\sqrt{\lambda} a t), & \lambda > 0. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

У разі  $\lambda < 0$ , сім'ї (1.24), (1.25) містять необмежено зростаючі за  $t$  функції (якщо необмежено збільшувати  $T$ ), тому за *допустимі* значення параметра відокремлення можемо обрати тільки невід'ємні, тобто  $\lambda \geq 0$  (однак не всі невід'ємні дійсні значення суть допустимі; див. також задачу 1.1 на с. 24). Для рівняння теплопроводності зроблений висновок не містить невизначеності, а для рівняння коливань можна спробувати прибрати «руками» другий

необмежений доданок з першої сім'ї (1.25) (у першому рядку). Проте, тільки першим обмеженим доданком, який внаслідок цього залишиться, неможливо буде задовольнити початкові умови *допоміжних* крайових задач 1, 2 *першого* різновиду (при подальшому викладенні стане зрозуміло, чому саме).

Отже, *допустимі* значення параметра відокремлення можуть бути тільки невід'ємними дійсними числами, проте, виникає запитання щодо узгодженості цього висновку із можливістю знаходження розв'язків задачі в складі рівняння (1.23) та граничних умов (1.20), називаною (граничною) задачею *Штурма – Ліувілля*. Остання полягає в знаходженні таких значень параметра відокремлення  $\lambda$ , за яких існують ненульові (*нетривіальні*) розв'язки задачі. Саме такі значення параметра  $\lambda$  будемо надалі вважати допустимими і називати *власними значеннями*, а відповідні їм розв'язки  $X_\lambda(x)$  — *власними функціями* граничної задачі *Штурма – Ліувілля*.

Можна вказати деякі властивості власних значень задачі *Штурма – Ліувілля*, не звертаючись безпосередньо до розв'язків (1.24), (1.25) диференціальних рівнянь (1.21), (1.22) (див. також с. 18).

**Твердження 1.1.** Власні значення задачі *Штурма – Ліувілля* суть невід'ємні і утворюють монотонно зростаючу послідовність  $\{\lambda_\mu\}_{\mu=1}^\infty$ , необмежену зверху.  $\square$

**Твердження 1.2.** Кожному власному значенню  $\lambda_\mu$  задачі *Штурма – Ліувілля* відповідає власна функція  $X_\mu(x)$ , причому власні функції для різних власних значень задовольняють умову

$$(X_\mu, X_\gamma) = \int_0^l X_\mu(x) X_\gamma(x) dx = \|X_\mu\|^2 \delta_{\mu,\gamma}, \quad \mu, \gamma \in \mathbb{N}, \quad (1.26)$$

де  $\delta_{\mu,\gamma}$  — дельта *Кронекера*,  $(X_\mu, X_\gamma)$  — скалярний добуток функцій  $X_\mu(x)$  і  $X_\gamma(x)$ ,  $\|X_\mu\|^2 = (X_\mu, X_\mu)$  — квадрат норми функцій  $X_\mu(x)$ , уведеної через скалярний добуток, тобто власні функції  $\{X_\mu(x)\}_{\mu=1}^\infty$  суть ортогональні (див. пояснення 1.1 на с. 30).  $\square$

Отже, для кожного власного значення  $\lambda_\mu$  можна знайти відповідні функції  $V_\mu(t)$  і  $X_\mu(x)$  і скласти, за поданням (1.16), такі частинні розв'язки  $v_\mu(t, x) = V_\mu(t) X_\mu(x)$  однорідних рівнянь теплопроводності і коливань, які задовольняють граничні умови (1.10) і не задовольняють відповідні початкові умови (1.12) або (1.13). Проте, з множини вказаних частинних розв'язків  $v_\mu(t, x)$  рівнянь теплопроводності і коливань можна скласти розв'язки *допоміжних*

крайових задач *першого* різновиду, на що вказують такі твердження (див. пояснення 1.2 на с. 31)

**Твердження 1.3.** Розв'язок *допоміжної* крайової задачі 1 *першого* різновиду можна подати у вигляді ряду за власними функціями задачі *Штурма – Ліувілля*

$$v(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} V_{\mu}(t) X_{\mu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu} e^{-\lambda_{\mu} a^2 t} X_{\mu}(x), \quad (1.27)$$

де сталі в складі функцій  $V_{\mu}(t)$  (1.24) суть такі, що функції (1.27) задовольняють початкові умови крайової задачі.  $\square$

**Твердження 1.4.** Розв'язок *допоміжної* крайової задачі 2 *першого* різновиду можна подати у вигляді ряду за власними функціями задачі *Штурма – Ліувілля*

$$v(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} V_{\mu}(t) X_{\mu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( B_{\mu} \cos(\sigma_{\mu} a t) + C_{\mu} \sin(\sigma_{\mu} a t) \right) X_{\mu}(x), \quad (1.28)$$

де  $\sigma_{\mu} = \sqrt{\lambda_{\mu}}$ , а сталі  $B_{\mu}, C_{\mu}$  в складі функцій  $V_{\mu}(t)$  (1.25) суть такі, що функції (1.28) задовольняють початкові умови крайової задачі.  $\square$

Отже, подання розв'язків (1.27), (1.28) відповідно крайових задач 1, 2: а) визначені в прямокутнику  $[0, T] \times [0, l]$ ; б) справджують однорідне рівняння крайової задачі; в) задовольняють граничні умови крайової задачі; г) не задовольняють початкові умови. Для того, щоб подання (1.27), (1.28) («заготовки» або «анзатци») розв'язків задовольняли відповідні початкові умови, останні мають також бути поданими у вигляді рядів за власними функціями, тобто як

$$v_1(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{1,\mu} X_{\mu}(x), \quad v_0(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} X_{\mu}(x), \quad (1.29)$$

де коефіцієнти  $v_{1,\mu}, v_{0,\mu}$  визначені з умови ортогональності власних функцій таким чином

$$\begin{aligned} (v_1, X_{\gamma}) &= \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{1,\mu} X_{\mu}(x), X_{\gamma}(x) \right) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{1,\mu} (X_{\mu}, X_{\gamma}) = v_{1,\gamma} \|X_{\mu}\|^2, \\ (v_0, X_{\gamma}) &= \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} X_{\mu}(x), X_{\gamma}(x) \right) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} (X_{\mu}, X_{\gamma}) = v_{0,\gamma} \|X_{\mu}\|^2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Підставимо «заготовку» розв'язку (1.27) в ліву частину початкової умови крайової задачі (1.12) для рівняння теплопроводності, а значення  $v_{0,\mu}$  (1.30) — в праву частину

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} V_{\mu}(0) X_{\mu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu} X_{\mu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} X_{\mu}(x),$$

звідки матимемо значення сталих (параметрів)

$$A_{\mu} = v_{0,\mu}. \quad (1.31)$$

Отже, шуканий розв'язок крайової задачі 1 для рівняння теплопроводності є такий

$$v(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} e^{-\lambda_{\mu} a^2 t} X_{\mu}(x). \quad (1.32)$$

Далі підставимо «заготовку» розв'язку (1.28) в ліві частини початкових умов крайової задачі (1.13) для рівняння коливань

$$\frac{\partial v(0, x)}{\partial t} = \sum_{\mu=1}^{\infty} V'_{\mu}(0) X_{\mu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma_{\mu} a \left( -B_{\mu} \sin(\sigma_{\mu} a t) + C_{\mu} \cos(\sigma_{\mu} a t) \right) \Big|_{t=0} X_{\mu}(x),$$

$$v(0, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} V_{\mu}(0) X_{\mu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( +B_{\mu} \cos(\sigma_{\mu} a t) + C_{\mu} \sin(\sigma_{\mu} a t) \right) \Big|_{t=0} X_{\mu}(x),$$

а подання (1.29) — в праві частини

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma_{\mu} a C_{\mu} X_{\mu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{1,\mu} X_{\mu}(x), \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{\mu} X_{\mu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} X_{\mu}(x),$$

звідки матимемо значення сталих (параметрів)

$$B_{\mu} = v_{0,\mu} \quad \sigma_{\mu} a C_{\mu} = v_{1,\mu}. \quad (1.33)$$

Отже, шуканий розв'язок крайової задачі 2 для рівняння коливань є такий

$$v(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( v_{0,\mu} \cos(\sigma_{\mu} a t) + \frac{v_{1,\mu}}{\sigma_{\mu} a} \sin(\sigma_{\mu} a t) \right) X_{\mu}(x). \quad (1.34)$$

Тепер звернемося до крайових задач 3, 4 *другого* різновиду для неоднорідних рівнянь теплопроводності і коливань, розв'язки яких, за зразками вже

знайдених розв'язків крайових задач 1, 2 *першого* різновиду відразу будемо розшукувати у вигляді рядів за власними функціями задачі *Штурма – Ліувілля* (див. пояснення 1.2 на с. 31)

$$w(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} W_{\mu}(t) X_{\mu}(x), \quad (1.35)$$

в яких коефіцієнти  $W_{\mu}(t)$  суть невідомі функції, причому ряд визначений в замкненні  $\bar{\mathcal{E}}$  прямокутника  $\mathcal{E}$ .

Для того, щоб знайти функції  $W_{\mu}(t)$ :

а) обчислимо частинні похідні першого та другого порядків ряду (1.35), враховуючі рівняння задачі *Штурма – Ліувілля* (1.23), а саме

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} &= \sum_{\mu=1}^{\infty} W'_{\mu}(t) X_{\mu}(x), \\ \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} &= \sum_{\mu=1}^{\infty} W''_{\mu}(t) X_{\mu}(x), \quad \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} = - \sum_{\mu=1}^{\infty} \lambda_{\mu} w_{\mu}(t) X_{\mu}(x); \end{aligned} \quad (1.36)$$

б) розвинемо праві частини  $h(t, x)$  рівнянь крайових задач 3, 4 в ряди за власними функціями  $X_{\mu}(x)$  задачі *Штурма – Ліувілля*

$$h(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_{\mu}(t) X_{\mu}(x), \quad h_{\mu}(t) = \|X_{\mu}\|^{-2} (h, X_{\mu}); \quad (1.37)$$

в) підставимо похідні (1.36) і розвинення (1.37) в неоднорідні рівняння крайових задач 3 (1.14) та 4 (1.15), звідки одержимо два ряди за власними функціями  $X_{\mu}(x)$ , які тотожно обертаються в нуль в прямокутнику  $\mathcal{E}$ , а саме:

$$\begin{aligned} \text{для задачі 3} \quad & \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ W'_{\mu}(t) + \lambda_{\mu} a^2 W_{\mu}(t) - h_{\mu}(t) \right\} X_{\mu}(x) \equiv 0, \\ \text{для задачі 4} \quad & \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ W''_{\mu}(t) + \lambda_{\mu} a^2 W_{\mu}(t) - h_{\mu}(t) \right\} X_{\mu}(x) \equiv 0, \end{aligned}$$

що можливо тільки у разі тотожного обертання в нуль всіх коефіцієнтів обох рядів, звідки маємо дві послідовності звичайних лінійних із сталими коефіцієнтами неоднорідних диференціальних рівнянь (відповідно першого та другого порядку) відносно функцій  $w_{\mu}(t)$ :

$$\text{для задачі 3} \quad W'_{\mu}(t) + \lambda_{\mu} a^2 W_{\mu}(t) - h_{\mu}(t) = 0, \quad (1.38)$$

для задачі 4 
$$W_\mu''(t) + \lambda_\mu a^2 W_\mu(t) - h_\mu(t) = 0; \quad (1.39)$$

г) підставимо подання (1.35) та його похідну першого порядку за  $t$  (1.36) в початкові умови (1.14) та (1.15) крайових задач 3 та 4, звідки матимемо відповідні початкові умови для функцій  $W_\mu(t)$ :  $W_\mu(0) = 0$  та  $W_\mu(0) = 0, W_\mu'(0) = 0$ ;

д) поєднаємо диференціальні рівняння (1.38), (1.39) з відповідними початковими умовами, звідки одержимо злічені послідовності задач *Koши*:

для задачі 3 
$$\begin{cases} W_\mu'(t) + \lambda_\mu a^2 W_\mu(t) = h_\mu(t), & 0 < t \leq T, \\ W_\mu(0) = 0, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad (1.40)$$

для задачі 4 
$$\begin{cases} W_\mu''(t) + \lambda_\mu a^2 W_\mu(t) = h_\mu(t), & 0 < t \leq T, \\ W_\mu'(0) = 0 \\ W_\mu(0) = 0 \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{N}; \quad (1.41)$$

е) розв'яжемо задачі *Koши* (1.40):

★) для однорідних рівнянь

$$\dot{W}_\mu'(t) + \lambda_\mu a^2 \dot{W}_\mu(t) = 0, \quad \mu \in \mathbb{N},$$

запишемо 1-параметричні сім'ї розв'язків

$$\dot{W}_\mu(t) = A_\mu e^{-\lambda_\mu a^2 t}, \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad (1.42)$$

де  $A_\mu$  — невизначені сталі (параметри);

★) застосуємо метод варіації довільних сталих до розв'язків (1.42) однорідних рівнянь (тобто замінимо довільні сталі довільними функціями змінної  $t$ ) і утворимо «заготовки» або «анзатци» 1-параметричних сімей розв'язків неоднорідних рівнянь

$$W_\mu(t) = A_\mu(t) e^{-\lambda_\mu a^2 t}, \quad \mu \in \mathbb{N}; \quad (1.43)$$

★) підставимо анзатци (1.43) в задачі *Koши* (1.40) і одержимо злічені послідовності задач *Koши* для знаходження функцій  $A_\mu(t)$

$$\begin{cases} A_\mu'(t) = e^{+\lambda_\mu a^2 t} h_\mu(t), \\ A_\mu(0) = 0, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad (1.44)$$

розв'язки яких знайдемо безпосереднім інтегруванням

$$A_\mu(t) = \int_0^t e^{+\lambda_\mu a^2 \tau} h_\mu(\tau) d\tau; \quad (1.45)$$

★) підставимо вирази  $A_\mu(t)$  (1.45) в анзатци (1.43) і запишемо розв'язки задач *Koshi* (1.40)

$$W_\mu(t) = \int_0^t e^{-\lambda_\mu a^2 (t-\tau)} h_\mu(\tau) d\tau; \quad (1.46)$$

з) розв'яжемо задачі *Koshi* (1.41):

●) для однорідних рівнянь

$$\ddot{W}_\mu(t) + \lambda_\mu a^2 \dot{W}_\mu(t) = 0, \quad \mu \in \mathbb{N},$$

запишемо 2-параметричні сім'ї розв'язків

$$\dot{W}_\mu(t) = B_\mu \cos(\sigma_\mu at) + C_\mu \sin(\sigma_\mu at), \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad (1.47)$$

де  $B_\mu, C_\mu$  — невизначені сталі (параметри);

●) застосуємо метод варіації довільних сталих до розв'язків (1.47) однорідних рівнянь (тобто замінімо довільні сталі довільними функціями змінної  $t$ ) і утворимо «заготовки» або «анзатци» 2-параметричних сімей розв'язків неоднорідних рівнянь

$$W_\mu(t) = B_\mu(t) \cos(\sigma_\mu at) + C_\mu(t) \sin(\sigma_\mu at), \quad \mu \in \mathbb{N}; \quad (1.48)$$

●) накладемо на функції  $B_\mu(t), C_\mu(t)$ , згідно метода варіації довільних сталих, обмеження у вигляді злічених послідовностей систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно похідних функцій  $B_\mu(t), C_\mu(t)$

$$\begin{cases} \cos(\sigma_\mu at) B'_\mu(t) + \sin(\sigma_\mu at) C'_\mu(t) = 0, \\ -\sigma_\mu a \sin(\sigma_\mu at) B'_\mu(t) + \sigma_\mu a \cos(\sigma_\mu at) C'_\mu(t) = h_\mu(t), \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N},$$

з яких одержимо вирази похідних

$$\begin{cases} B'_\mu(t) = -\frac{1}{\sigma_\mu a} h_\mu(t) \sin(\sigma_\mu at), \\ C'_\mu(t) = +\frac{1}{\sigma_\mu a} h_\mu(t) \cos(\sigma_\mu at), \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N}; \quad (1.49)$$



•) підставимо подання (1.48) та їх похідні першого порядку в початкові умови для функцій  $W_\mu(t)$ , звідки матимемо початкові умови для функцій  $B_\mu(t), C_\mu(t)$

$$\begin{cases} W_\mu(0) = \left( B_\mu(t) \cos(\sigma_\mu a t) + C_\mu(t) \sin(\sigma_\mu a t) \right) \Big|_{t=0} = 0, \\ W'_\mu(0) = \left( -\sigma_\mu a B_\mu(t) \sin(\sigma_\mu a t) + \sigma_\mu a C_\mu(t) \cos(\sigma_\mu a t) \right) \Big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

тобто  $B_\mu(0) = 0, C_\mu(0) = 0, \mu \in \mathbb{N}$ ;

•) поєднаємо диференціальні рівняння (1.49) з початковими умовами і розв'яжемо одержані задачі *Koши* безпосереднім інтегруванням рівнянь

$$\begin{cases} B_\mu(t) = -\frac{1}{\sigma_\mu a} \int_0^t h_\mu(\tau) \sin(\sigma_\mu a \tau) d\tau, \\ C_\mu(t) = +\frac{1}{\sigma_\mu a} \int_0^t h_\mu(\tau) \cos(\sigma_\mu a \tau) d\tau, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N}; \quad (1.50)$$

•) підставимо знайдені функції  $C_\mu(t), D_\mu(t)$  (1.50) в анзац (1.47) і запишемо розв'язки задач *Koши* (1.41)

$$W_\mu(t) = \frac{1}{\sigma_\mu a} \int_0^t h_\mu(\tau) \left( \sin(\sigma_\mu a t) \cos(\sigma_\mu a \tau) - \cos(\sigma_\mu a t) \sin(\sigma_\mu a \tau) \right) d\tau.$$

•) спростимо вираз в круглих дужках одержаних розв'язків, звернувшись до відомої тригонометричної формули

$$\sin(\alpha \mp \sigma) = \sin \alpha \cos \sigma \mp \cos \alpha \sin \sigma,$$

внаслідок чого для розв'язків задач *Koши* матимемо такі вирази

$$W_\mu(t) = \frac{1}{\sigma_\mu a} \int_0^t \sin[\sigma_\mu a(t - \tau)] h_\mu(\tau) d\tau, \quad \mu \in \mathbb{N}; \quad (1.51)$$

у) поєднання (1.35), (1.37) та (1.46) дає розв'язок крайової задачі 3 (1.14),  
(1.3)

$$w(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t e^{-\lambda_\mu a^2(t-\tau)} h_\mu(\tau) d\tau \right\} X_\mu(x), \quad (1.52)$$

а поєднання (1.35), (1.37) та (1.51) — розв’язок крайової задачі 4 (1.15), (1.3)

$$w(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{\mu} a} \left\{ \int_0^t \sin[\sigma_{\mu} a(t - \tau)] h_{\mu}(\tau) d\tau \right\} X_{\mu}(x). \quad (1.53)$$

Отже, розв’язки (1.32), (1.34), (1.52), (1.53) допоміжних крайових задач 1, 2, 3, 4 показують, що відмінності між ними проявляються через власні значення та власні функції задачі *Штурма – Ліувілля*.

## 1.2 Задача *Штурма – Ліувілля*

Склад та спрямованість (зміст) задачі *Штурма – Ліувілля* вже були визначені відповідно на с. 9 та 11, проте, для подальшого викладення бажано формалізувати поняття цієї задачі у вигляді такого

**Означення 1.1.** Гранична задача *Штурма – Ліувілля* на проміжку  $[0, l]$  полягає в знаходженні:

1) 1-параметричної сім’ї ненульових (нетривіальних) дійснозначних розв’язків  $X_{\lambda}(x)$  звичайного лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (1.23)$$

які задовольняють однорідні граничні умови

$$\alpha_0 X(0) + \sigma_0 X'(0) = 0, \quad \alpha_1 X(l) + \sigma_1 X'(l) = 0, \quad (1.20)$$

де  $\alpha_0^2 + \sigma_0^2 \neq 0$ ,  $\alpha_1^2 + \sigma_1^2 \neq 0$ ;

2) дійсних значень параметра  $\lambda$ , за яких такі розв’язки існують.

Шукані розв’язки  $X_{\lambda}(x)$  називаються *власними* функціями задачі *Штурма – Ліувілля*, а відповідні їм значення параметра  $\lambda_{\mu}$  — *власними* значеннями задачі (див. пояснення 1.3 на с. 31).  $\square$

Стосовно постановки задачі зазначимо таке: а) функція  $X(x) \equiv 0$  є розв’язком задачі *Штурма – Ліувілля* (оскільки справджує рівняння (1.23) і задовольняє граничні умови (1.20)), проте така функція немає ніякого застосування при побудові розв’язків крайових задач (1.1), (1.3) та (1.2), (1.3) на с. 5; б) далі розглядатимемо частинні граничні умови (1.20), наведені у другому і третьому стовпчиках табл. 1.1.

Табл. 1.1. Власні значення  $\lambda_\mu$  і власні функції  $X_\mu(x)$  задачі *Штурма – Ліувілля* (1.23), (1.20) для чотирьох різновидів граничних умов (1.20)

Задача	$x = 0$	$x = l$	$\lambda_\mu$	$X_\mu$
SL <sub>1</sub> $\mu = 1, 2, 3, \dots$	$X(0) = 0$	$X(l) = 0$	$\left(\frac{\pi\mu}{l}\right)^2$	$\sin\left(\frac{\pi\mu x}{l}\right)$
SL <sub>2</sub> $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$	$X'(0) = 0$	$X'(l) = 0$	$\left(\frac{\pi\mu}{l}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi\mu x}{l}\right)$
SL <sub>3</sub> $\mu = 1, 2, 3, \dots$	$X(0) = 0$	$X'(l) = 0$	$\left(\frac{\pi(2\mu - 1)}{2l}\right)^2$	$\sin\left(\frac{\pi(2\mu - 1)x}{2l}\right)$
SL <sub>4</sub> $\mu = 1, 2, 3, \dots$	$X'(0) = 0$	$X(l) = 0$	$\left(\frac{\pi(2\mu - 1)}{2l}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi(2\mu - 1)x}{2l}\right)$

Хоча метод відокремлення змінних для еволюційних крайових задач приводить до висновку про те, що допустимі значення параметра  $\lambda$  суть невід’ємні (ще раз зверніться до с. 11), можна вказати область допустимих значень параметра, ґрунтуючись тільки на постановці задачі *Штурма – Ліувілля* (тобто апріорно). Насправді, помножимо рівняння задачі (1.23) на власну функцію  $X_\lambda(x)$ , проінтегруємо на проміжку  $[0, l]$  за частинами

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^l X(x) (X''(x) + \lambda X(x)) dx = \int_0^l X(x) X''(x) dx + \lambda \int_0^l X^2(x) dx = \\
 &= X(x) X'(x) \Big|_0^l - \int_0^l X'^2(x) dx + \lambda \int_0^l X^2(x) dx = - \underbrace{\int_0^l X'^2(x) dx}_{I_1} + \lambda \underbrace{\int_0^l X^2(x) dx}_{I_0}
 \end{aligned}$$

і врахуємо наведені в табл. 1.1 частинні граничні умови, звідки одержимо нерівність, яка визначає допустимі значення параметра  $\lambda$ , а саме

$$\lambda = \frac{I_1}{I_0} \geq 0. \quad (1.54)$$

Оскільки множина допустимих значень параметра  $\lambda$  вже є відомою, перейдемо до безпосереднього розв’язання задачі *Штурма – Ліувілля*, причому значення  $\lambda = 0$  і  $\lambda > 0$  розглянемо окремо для всіх різновидів граничних умов з табл. 1.1.

**I.** Допустимому значенню параметра  $\lambda=0$  відповідає рівняння  $X''(x)=0$ , 2-параметричну сім'ю розв'язків (або *загальний розв'язок*) якого знайдемо двократним інтегруванням

$$X(x) = A_1 + A_2 x. \quad (1.55)$$

Підстановка граничних умов задач  $SL_1$ ,  $SL_3$ ,  $SL_4$  дає тривіальні розв'язки  $X_0(x) \equiv 0$  (очевидно, що такі розв'язки надалі не враховуватимемо), а підстановка граничної умови задачі  $SL_2$  дає розв'язок  $X_0(x) = A_1$ , де  $A_1 \neq 0$  — довільна стала. Ми оберемо за сталу  $A_1 = 1$  (див. задачу 1.3 на с. 24), тоді  $X_0(x) \equiv 1$  (див. рис. 1.2, 2 на с. 25).

**II.** 2-параметричну сім'ю розв'язків (або *загальний розв'язок*) рівняння (1.23), які відповідають допустимим значенням параметра  $\lambda > 0$ , знайдемо за методом *Ойлера*. Згідно цього методу, спочатку знайдемо частинні розв'язки виду  $e^{\kappa x}$ , де  $\kappa$  — невідоме число (взагалі, комплексне). Для цього обчислимо похідні частинних розв'язків

$$X(x) = e^{\kappa x}, \quad X'(x) = \kappa e^{\kappa x}, \quad X'' = \kappa^2 e^{\kappa x},$$

підставимо вирази для  $X(x)$  і  $X''(x)$  в рівняння (1.23) і одержимо тотожність

$$X''(x) + \lambda X(x) = \kappa^2 e^{\kappa x} + \lambda e^{\kappa x} = e^{\kappa x} (\kappa^2 + \lambda) = 0, \quad x \in (0, l).$$

Задовольнити тотожність зможемо, якщо оберемо за невідомі числа  $\kappa$  корені *характеристичного рівняння*  $\kappa^2 + \lambda = 0$ . Оскільки корені останнього  $\kappa_{1,2} = \mp i\sqrt{\lambda}$  суть різні, матимемо два лінійно незалежних частинних розв'язки  $e^{\kappa_1 x}$  і  $e^{\kappa_2 x}$ , лінійна комбінація яких утворює шукану 2-параметричну сім'ю розв'язків

$$X(x) = A_1 e^{\kappa_1 x} + A_2 e^{\kappa_2 x}, \quad (1.56)$$

де  $A_1, A_2$  — довільні сталі.

Покажемо, що сім'я функцій (1.56) справджує рівняння (1.23). Насправді, 1) з характеристичного рівняння маємо  $\kappa_{1,2}^2 = -\lambda$ ; 2) двократним диференціюванням знайдемо, що

$$X''(x) = \kappa_1^2 A_1 e^{\kappa_1 x} + \kappa_2^2 A_2 e^{\kappa_2 x} = -\lambda X(x) \Rightarrow X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Підставимо вирази для коренів  $\kappa_{1,2} = \mp i\sqrt{\lambda}$  характеристичного рівняння в сім'ю (1.56) і запишемо останню в такому поданні

$$X_\lambda(x) = +A_1 e^{-i\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{+i\sqrt{\lambda}x}, \quad (1.57)$$

де показчик  $\lambda$  означає залежність  $X$  від  $\lambda$ , як від параметра.

Розв'язання задачі *Штурма – Лівівілля* можна продовжити, ґрунтуючись на комплекснозначній формі запису (1.57) 2-параметричної сім'ї (див. задачу 1.12 на с. 26), проте, віддамо перевагу загальній теорії розв'язання лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами і замінимо комплекснозначну форму дійснозначною. Для цього звернемося до формули *Ойлера*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

і запишемо знайдені комплекснозначні лінійно незалежні частинні розв'язки в такому поданні

$$e^{\kappa_{1,2}x} = e^{\mp i\sqrt{\lambda}x} = \cos(\sqrt{\lambda}x) \mp i \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

далі візьмемо дійсну та уявну частини першого і другого записаних частинних розв'язків за два дійснозначних лінійно незалежних частинних розв'язки, після чого складемо дійснозначну форму 2-параметричної сім'ї розв'язків у вигляді лінійної комбінації одержаних частинних розв'язків

$$X_{\lambda}(x) = A_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + A_2 \sin(\sqrt{\lambda}x). \quad (1.58)$$

Сім'я (1.58), за своєї будови, справджує рівняння (1.23), проте можна довести це і безпосередньо. Насправді, знайдемо похідну другого порядку сім'ї (1.58), тоді матимемо

$$X_{\lambda}''(x) = -\lambda \left( A_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + A_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \right) = -\lambda X_{\lambda}(x).$$

Далі підставимо сім'ю (1.58) і її першу похідну

$$\begin{cases} X_{\lambda}(x) = +A_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + A_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_{\lambda}'(x) = -A_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + A_2 \cos(\sqrt{\lambda}x), \end{cases} \quad (1.59)$$

в частинні граничні умови задач *Штурма – Лівівілля* (див. табл. 1.1) і складемо відповідні системи лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь відносно шуканих значень  $A_1$  і  $A_2$

$$\text{SL}_1 : \begin{cases} +\cos(\sqrt{\lambda}0) A_1 + \sin(\sqrt{\lambda}0) A_2 = 0, \\ +\cos(\sqrt{\lambda}l) A_1 + \sin(\sqrt{\lambda}l) A_2 = 0, \end{cases} \quad (1.60)$$

$$\text{SL}_2 : \begin{cases} -\sin(\sqrt{\lambda} 0) A_1 + \cos(\sqrt{\lambda} 0) A_2 = 0, \\ -\sin(\sqrt{\lambda} l) A_1 + \cos(\sqrt{\lambda} l) A_2 = 0, \end{cases} \quad (1.61)$$

$$\text{SL}_3 : \begin{cases} +\cos(\sqrt{\lambda} 0) A_1 + \sin(\sqrt{\lambda} 0) A_2 = 0, \\ -\sin(\sqrt{\lambda} l) A_1 + \cos(\sqrt{\lambda} l) A_2 = 0, \end{cases} \quad (1.62)$$

$$\text{SL}_4 : \begin{cases} -\sin(\sqrt{\lambda} 0) A_1 + \cos(\sqrt{\lambda} 0) A_2 = 0, \\ +\cos(\sqrt{\lambda} l) A_1 + \sin(\sqrt{\lambda} l) A_2 = 0. \end{cases} \quad (1.63)$$

Очевидно, що можемо записати систему (1.60) в спрощений спосіб

$$\text{SL}_1 : \begin{cases} A_1 = 0, \\ +\cos(\sqrt{\lambda} l) A_1 + \sin(\sqrt{\lambda} l) A_2 = 0, \end{cases} \quad (1.64)$$

причому, оскільки  $A_1 = 0$ , в силу першого рівняння системи, друге рівняння спрощується до одночленного

$$\sin(\sqrt{\lambda} l) A_2 = 0,$$

з якого виведемо, що стала  $A_2$  може набувати будь-якого дійсного значення, проте власні значення  $\lambda$  не довільні, а задовольняють умову

$$\sin(\sqrt{\lambda} l) = 0.$$

Остання буде задовільнена, якщо аргумент сінуса обрати рівним

$$\sqrt{\lambda_\mu} l = \mu\pi, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.65)$$

звідки знайдемо шукані власні значення (див. задачу 1.4 на с. 24)

$$\lambda_\mu = \left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (1.66)$$

Отже, власні значення задачі  $\text{SL}_1$  утворюють злічену множину (1.66), а відповідна злічена множина власних функцій суть така (рис. 1.2, 1 на с. 25)

$$X_\mu(x) = \sin \frac{\mu\pi x}{l}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.67)$$

де обрали за сталу  $A_2 = 1$  (див. задачу 1.5 на с. 25).

Далі запишемо в спрощеному вигляді систему (1.61)

$$\text{SL}_2 : \begin{cases} A_2 = 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda} l) A_1 - \cos(\sqrt{\lambda} l) A_2 = 0, \end{cases} \quad (1.68)$$

друге рівняння якої зводиться до одночленного

$$\sin(\sqrt{\lambda} l) A_1 = 0.$$

Отже, в задачі  $\text{SL}_2$  злічена множина власних значень відрізняється від такої (1.66) задачі  $\text{SL}_1$  урахуванням нульового значення (див. задачу 1.6 на с. 25)

$$\lambda_\mu = \left( \frac{\mu\pi}{l} \right)^2, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \quad (1.69)$$

а відповідна злічена множина власних функцій суть така (див. рис. 1.2, 2 на с. 25)

$$X_\mu(x) = \cos \frac{\mu\pi x}{l}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.70)$$

де обрали за сталу  $A_1 = 1$  (див. задачу 1.7 на с. 25).

Спрощений запис системи (1.62)

$$\text{SL}_3 : \begin{cases} A_1 = 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda} l) A_1 - \cos(\sqrt{\lambda} l) A_2 = 0, \end{cases} \quad (1.71)$$

зводиться до  $A_1 = 0$  і довільному значенню сталої  $A_2$ , а також до умови

$$\cos(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

для знаходження власних значень  $\lambda$ .

Остаточно для задачі  $\text{SL}_3$  матимемо таку злічену множину власних значень (див. задачу 1.8 на с. 25)

$$\lambda_\mu = \left( \frac{(2\mu - 1)\pi}{2l} \right)^2, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (1.72)$$

и відповідну злічену множину власних функцій (див. рис. 1.2, 3 на с. 25)

$$X_\mu(x) = \sin \left( \frac{(2\mu - 1)\pi x}{2l} \right), \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.73)$$

де обрали за сталу  $A_1 = 1$  (див. задачу 1.9 на с. 26).

Нарешті, система (1.63) набуває вигляду

$$\text{SL}_4 : \begin{cases} A_2 = 0, \\ \cos(\sqrt{\lambda} l) A_1 + \sin(\sqrt{\lambda} l) A_2 = 0, \end{cases} \quad (1.74)$$

звідки виводимо, що  $A_2 = 0$ , стала  $A_1$  може набувати довільного дійсного значення, а власні значення задовольняють умову

$$\cos(\sqrt{\lambda} l) = 0.$$

Отже, в задачі  $\text{SL}_4$  злічена множина власних значень співпадає з такою для задачі  $\text{SL}_3$ , тобто

$$\lambda_\mu = \left( \frac{(2\mu - 1)\pi}{2l} \right)^2, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.75)$$

а відповідна злічена множина власних функцій (див. рис. 1.2, 4 на с. 25)

$$X_\mu(x) = \cos\left(\frac{(2\mu - 1)\pi x}{2l}\right), \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.76)$$

де несуттєва (пояснить, чому) стала  $A_2 = 1$ .

Знайдені власні значення та функції задач *Штурма–Ліувілля*  $\text{SL}_{1-4}$  наведені також в четвертому та п'ятому стовпчиках табл. 1.1.

### 1.3 Задачі для самостійної роботи

**Задача 1.1.** Пояснить, чому в нерівності  $\lambda \geq 0$  (1.54) на с. 19 нульове значення параметра відокремлення  $\lambda$  є допустимим. ▲

**Задача 1.2.** Розгляньте задачу *Штурма–Ліувілля* (1.23), (1.20) на с. 9, а також на с. 18 з наборами частинних граничних умов, наведених в табл. 1.1 на с. 19, і безпосередньо покажіть, що у разі  $\lambda < 0$  задача не має розв'язку. ▲

**Задача 1.3.** Пояснить, чому в розв'язку (1.55) задачі *Штурма–Ліувілля*  $\text{SL}_2$  можна обрати за сталу  $A_1 = 1$ . ▲

**Задача 1.4.** Пояснить, чому при утворенні множини власних значень (1.66) задачі *Штурма–Ліувілля*  $\text{SL}_1$  із знайденої множини (1.65) допустимих значень параметра  $\lambda$  для системи (1.64) надалі вилучається нульове значення. ▲



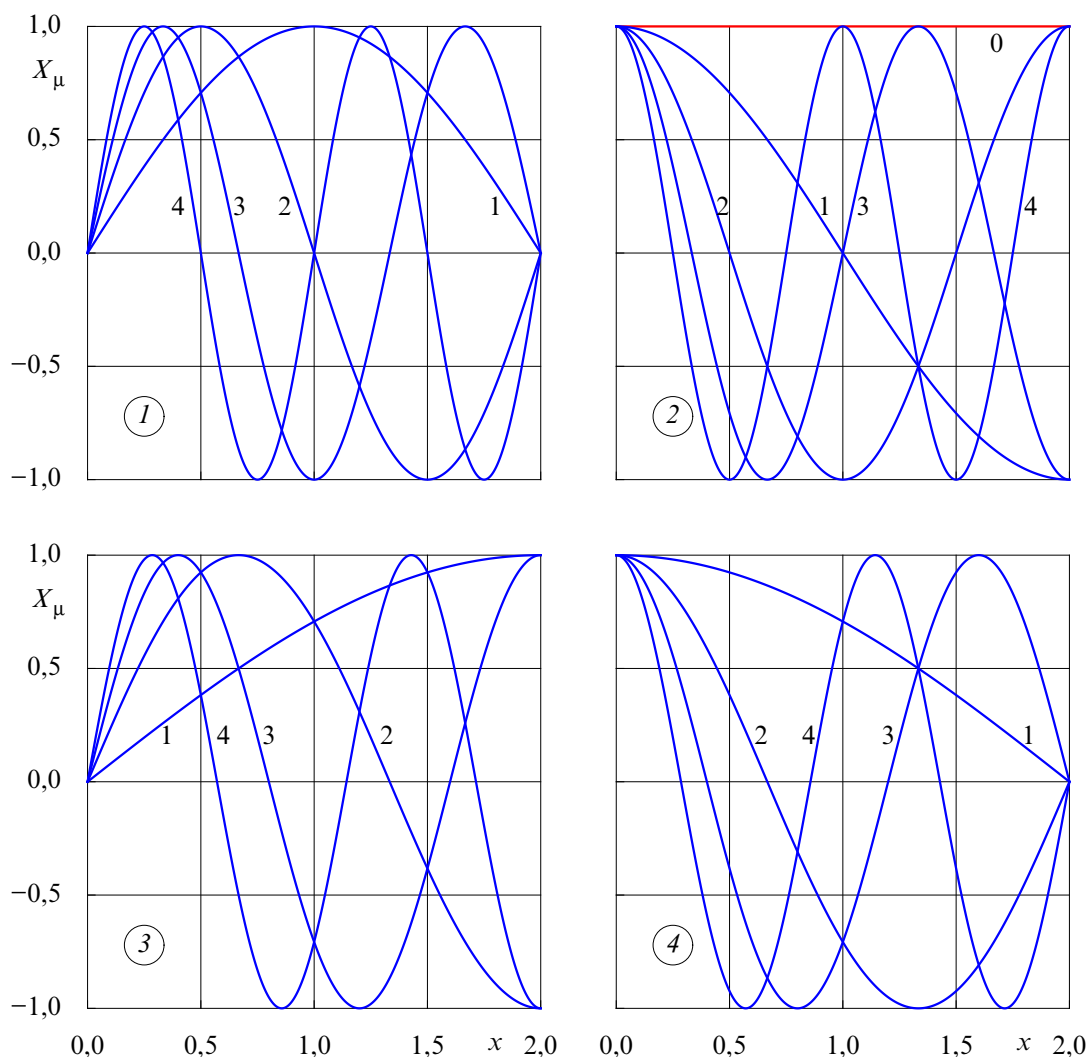


Рис. 1.2. Власні функції  $X_\mu(x)$  задач Штурма – Ліувілья  $SL_1$  ( $1, \mu=1, 2, 3, 4$ ),  $SL_2$  ( $2, \mu=0, 1, 2, 3, 4$ ),  $SL_3$  ( $3, \mu=1, 2, 3, 4$ ) і  $SL_4$  ( $4, \mu=1, 2, 3, 4$ ). Власна функція  $X_0(x) \equiv 1$  задачі  $SL_2$  співпадає з горизонтальною лінією сітки

**Задача 1.5.** Поясніть, чому для власних функції (1.66) задачі Штурма – Ліувілья  $SL_1$  можна обрати за сталу  $A_2 = 1$ . ▲

**Задача 1.6.** Поясніть, чому множина власних значень (1.69) задачі Штурма – Ліувілья  $SL_2$ , на відміну від такої (1.66) для задачі Штурма – Ліувілья  $SL_1$ , містить нульове значення. ▲

**Задача 1.7.** Поясніть, чому для власних функції (1.70) задачі Штурма – Ліувілья  $SL_2$  можна обрати за сталу  $A_1 = 1$ . ▲

**Задача 1.8.** Поясніть, чому множина власних значень (1.72) задачі Штурма – Ліувілья  $SL_3$ , на відміну від такої (1.66) для задачі Штурма – Ліувілья  $SL_1$ , містить нульове

значення. ▲

**Задача 1.9.** Поясніть, чому для власних функції (1.73) задачі *Штурма – Ліувілья*  $SL_3$  можна обрати за сталу  $A_1 = 1$ . ▲

**Задача 1.10.** Поясніть, чому множина власних значень (1.75) задачі *Штурма – Ліувілья*  $SL_4$ , на відміну від такої (1.66) для задачі *Штурма – Ліувілья*  $SL_1$ , містить нульове значення. ▲

**Задача 1.11.** Поясніть, чому для власних функції (1.76) задачі *Штурма – Ліувілья*  $SL_4$  можна обрати за сталу  $A_1 = 1$ . ▲

**Задача 1.12.** Покажіть, що можна знайти розв’язки задачі *Штурма – Ліувілья* (1.23), (1.20) на с. 9, а також на с. 18 з наборами частинних граничних умов, наведених в табл. 1.1 на с. 19, безпосередньо з комплекснозначної сім’ї (1.57) на с. 20.

**Розв’язання.** Будемо виходити з комплекснозначної сім’ї (1.57) та її першої похідної

$$\begin{cases} X_\lambda(x) = +A_1 e^{-i\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{+i\sqrt{\lambda}x}, \\ \frac{1}{i\sqrt{\lambda}} X'_\lambda(x) = -A_1 e^{-i\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{+i\sqrt{\lambda}x}. \end{cases} \quad (1.77)$$

Отже, підставимо (1.77) в граничні умови задачі *Штурма – Ліувілья*, наведені в табл. 1.1 на с. 19, звідки матимемо такі чотири системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно сталих  $A_1, A_2$

$$\begin{aligned} SL_1 : \begin{cases} +e^{-i\sqrt{\lambda}0}A_1 + e^{+i\sqrt{\lambda}0}A_2 = 0, \\ +e^{-i\sqrt{\lambda}l}A_1 + e^{+i\sqrt{\lambda}l}A_2 = 0, \end{cases} & SL_2 : \begin{cases} -e^{-i\sqrt{\lambda}0}A_1 + e^{+i\sqrt{\lambda}0}A_2 = 0, \\ -e^{-i\sqrt{\lambda}l}A_1 + e^{+i\sqrt{\lambda}l}A_2 = 0, \end{cases} \\ SL_3 : \begin{cases} +e^{-i\sqrt{\lambda}0}A_1 + e^{+i\sqrt{\lambda}0}A_2 = 0, \\ -e^{-i\sqrt{\lambda}l}A_1 + e^{+i\sqrt{\lambda}l}A_2 = 0, \end{cases} & SL_4 : \begin{cases} -e^{-i\sqrt{\lambda}0}A_1 + e^{+i\sqrt{\lambda}0}A_2 = 0, \\ +e^{-i\sqrt{\lambda}l}A_1 + e^{+i\sqrt{\lambda}l}A_2 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.78)$$

Нагадаємо, що єдиний (причому ненульовий) розв’язок системи лінійних *неоднорідних* алгебраїчних рівнянь  $2 \times 2$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.79)$$

можна знайти, наприклад, за формулами *Крамера*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (1.80)$$

де головний і допоміжні визначники суть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}, \quad (1.81)$$

за умови, що  $\Delta \neq 0$ .

Формули *Крамера* (1.80) застосовні також для знаходження єдиного розв'язку системи лінійних *однорідних* алгебраїчних рівнянь  $2 \times 2$

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 = 0, \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 = 0, \end{cases} \quad (1.82)$$

який у разі задовільнення умови  $\Delta \neq 0$ , очевидно, є нульовий:  $x_1 = 0, x_2 = 0$ . У разі, коли задовільнена умова  $\Delta = 0$  (тобто система вироджена)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2} = 0, \quad (1.83)$$

відповідні коефіцієнти рівнянь системи (1.82) суть пропорційні

$$\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} = \frac{a_{2,2}}{a_{1,2}} = \alpha \neq 0, \quad (1.84)$$

що можна подати в такий спосіб

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 = 0, \\ \alpha a_{2,1} x_1 + \alpha a_{2,2} x_2 = 0, \end{cases} \quad (1.85)$$

для того, щоб підкреслити, що насправді система утворена лише одним рівнянням  $1 \times 2$

$$a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 = 0, \quad (1.86)$$

тобто одним рівнянням відносно двох невідомих.

Рівняння (1.86) має нескінченні множини розв'язків виду

$$x_1 = -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2, \quad a_{1,1} \neq 0, \quad (1.87)$$

$$x_2 = -\frac{a_{1,1}}{a_{1,2}} x_1, \quad a_{1,2} \neq 0. \quad (1.88)$$

Множини розв'язків (1.87), (1.88) суть 1-параметричні сім'ї. Насправді, перша множина розв'язків (1.87) утворена набуттям параметром  $x_2$  послідовних значень на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ , а множина розв'язків (1.88) — набуттям параметром  $x_1$  послідовних значень на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ . Іншими словами, вказані множини подібні до множини розв'язків рівняння прямої лінії

$$ax + by = c; \quad (1.89)$$

остання утворена парами  $(x, y)$ , в яких або значення  $x$  або значення  $y$  може бути обране довільно (як параметр), тоді відповідно значення  $y$  або значення  $x$  має бути обчисленим згідно рівняння (1.89). Оскільки пряма лінія (1.89) проходить через початок системи координат, множина розв'язків містить пару  $(0, 0)$ .

У разі лінійних однорідних систем (1.78) маємо врахувати, що системи містять параметр  $\lambda \geq 0$ . Спробуємо налаштувати значення параметра  $\lambda$  в такий спосіб, щоб визначники систем оберталися в нуль, а, отже, — побудувати 1-параметричні сім'ї ненульових розв'язків систем (тобто знайти значення сталих  $A_1, A_2$ :  $A_1^2 + A_2^2 \neq 0$ ).

Застосуємо до подань систем (1.78) формулу *Ойлера*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

тоді матимемо такі вирази рівності нулю визначників систем і відповідних значень параметра  $\lambda$

$$\begin{aligned} \text{SL}_1 : \quad \begin{vmatrix} +e^{-i\sqrt{\lambda}0} & +e^{+i\sqrt{\lambda}0} \\ +e^{-i\sqrt{\lambda}l} & +e^{+i\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ -e^{i\sqrt{\lambda}l} & +e^{+i\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix} = \\ &= +2i \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_\mu} l = \mu\pi, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SL}_2 : \quad \begin{vmatrix} -e^{-i\sqrt{\lambda}0} & +e^{+i\sqrt{\lambda}0} \\ -e^{-i\sqrt{\lambda}l} & +e^{+i\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & +1 \\ -e^{-i\sqrt{\lambda}l} & +e^{+i\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix} = \\ &= -2i \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_\mu} l = \mu\pi, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SL}_3 : \quad \begin{vmatrix} +e^{-i\sqrt{\lambda}0} & +e^{+i\sqrt{\lambda}0} \\ -e^{-i\sqrt{\lambda}l} & +e^{+i\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ -e^{-i\sqrt{\lambda}l} & +e^{+i\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix} = \\ &= +2 \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_\mu} l = \frac{\pi}{2} + (\mu - 1)\pi, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SL}_4 : \quad \begin{vmatrix} -e^{-i\sqrt{\lambda}0} & +e^{+i\sqrt{\lambda}0} \\ +e^{-i\sqrt{\lambda}l} & +e^{+i\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & +1 \\ +e^{-i\sqrt{\lambda}l} & +e^{+i\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix} = \\ &= -2 \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_\mu} l = \frac{\pi}{2} + (\mu - 1)\pi, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Тепер перейдемо до побудови власних функцій (1.57), (1.77) задачі *Штурма – Ліувілля*

$$X_\lambda(x) = (A_1 + A_2) \cos \sqrt{\lambda}x + i(A_2 - A_1) \sin \sqrt{\lambda}x, \quad (1.90)$$

тобто знаходженню значень сталих  $A_1, A_2$ . Оскільки системи лінійних рівнянь (1.78) за найдених вище значень параметра  $\lambda$  суть вироджені, одну з двох сталих лінійно виразимо через іншу, а при виборі значення останньої врахуємо, що власні функції  $X_\mu(x)$  задачі *Штурма – Ліувілля* застосовні як повна замкнена система для побудови розв'язків крайових задач (1.1), (1.3) та (1.2), (1.3) на с. 5 (див. пояснення 1.1 на с. 30), тому будемо виходити з бажаності простих виразів власних функцій (1.90).

В задачі  $\text{SL}_1$  власні значення суть  $\sqrt{\lambda_\mu} = \frac{\mu\pi}{l}$ , тоді для власних функцій (1.90) матимемо

$$X_\mu(x) = (A_1 + A_2) \cos \frac{\mu\pi x}{l} + i(A_2 - A_1) \sin \frac{\mu\pi x}{l}, \quad (1.91)$$

де значення сталих  $A_1$  і  $A_2$  знайдемо як розв'язки відповідної виродженої системи рівнянь (1.78)

$$\begin{cases} + & A_1 + & A_2 = 0, \\ + \cos \mu \pi & A_1 + \cos \mu \pi & A_2 = 0. \end{cases} \quad (1.92)$$

Виразимо з (1.92)  $A_2 = -A_1$  і запишемо (1.91) в такий спосіб

$$X_\mu(x) = -2iA_1 \sin \frac{\mu \pi x}{l}. \quad (1.93)$$

Оскільки на вибір коефіцієнта  $A_1$  не накладено жодної умови, оберемо  $2iA_1 = -1$  і одержимо власні функції задачі  $SL_1$  в такому поданні

$$X_\mu(x) = \sin \frac{\mu \pi x}{l}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (1.94)$$

В задачі  $SL_2$  власні значення суть  $\sqrt{\lambda_\mu} = \frac{\mu \pi}{l}$ , тоді для власних функцій  $X_\mu(x)$  (1.90) матимемо

$$X_\mu(x) = (A_1 + A_2) \cos \frac{\mu \pi x}{l} + i(A_2 - A_1) \sin \frac{\mu \pi x}{l}, \quad (1.95)$$

де значення сталих  $A_1$  і  $A_2$  знайдемо як розв'язки відповідної виродженої системи рівнянь (1.78)

$$\begin{cases} - & A_1 + & A_2 = 0, \\ - \cos \mu \pi & A_1 + \cos \mu \pi & A_2 = 0. \end{cases} \quad (1.96)$$

Виразимо з (1.96)  $A_2 = A_1$ , запишем (1.95) так

$$X_\mu(x) = 2A_1 \cos \frac{\mu \pi x}{l}, \quad (1.97)$$

далі оберемо  $2A_1 = 1$  і одержимо власні функції задачі  $SL_2$  в такому поданні

$$X_\mu(x) = \cos \frac{\mu \pi x}{l}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \quad (1.98)$$

В задачі  $SL_3$  власні значення суть  $\sqrt{\lambda_\mu} = \frac{(2\mu - 1) \pi}{2l}$ , тоді для власних функцій (1.90) матимемо

$$X_\mu(x) = (A_1 + A_2) \cos \frac{(2\mu - 1) \pi x}{2l} + i(A_2 - A_1) \sin \frac{(2\mu - 1) \pi x}{2l}, \quad (1.99)$$

де значення сталих  $A_1$  і  $A_2$  знайдемо як розв'язки відповідної виродженої системи рівнянь (1.78)

$$\begin{cases} + & A_1 + & A_2 = 0, \\ + i \sin \frac{(2\mu - 1) \pi}{2l} & A_1 + i \sin \frac{(2\mu - 1) \pi}{2l} & A_2 = 0. \end{cases} \quad (1.100)$$

Виразимо з (1.100)  $A_2 = -A_1$ , запишем (1.99) так

$$X_\mu(x) = -2iA_1 \sin \frac{(2\mu - 1) \pi x}{2l}, \quad (1.101)$$

далі оберемо  $2iA_1 = -1$  і одержимо власні функції задачі  $SL_3$  в такому поданні

$$X_\mu(x) = \sin \frac{(2\mu - 1)\pi x}{2l}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (1.102)$$

В задачі  $SL_4$  власні значення суть  $\sqrt{\lambda_\mu} = \frac{(2\mu - 1)\pi}{2l}$ , тоді для власних функцій (1.90) матимемо

$$X_\mu(x) = (A_1 + A_2) \cos \frac{(2\mu - 1)\pi x}{2l} + i(A_2 - A_1) \sin \frac{(2\mu - 1)\pi x}{2l}, \quad (1.103)$$

де значення сталих  $A_1$  і  $A_2$  знайдемо як розв'язки відповідної виродженої системи рівнянь (1.78)

$$\begin{cases} -A_1 + A_2 = 0, \\ -i \sin \frac{(2\mu - 1)\pi}{2l} A_1 + i \sin \frac{(2\mu - 1)\pi}{2l} A_2 = 0. \end{cases} \quad (1.104)$$

Виразимо з (1.104)  $A_2 = A_1$ , запишем (1.103) так

$$X_\mu(x) = 2A_1 \cos \frac{(2\mu - 1)\pi x}{2l}, \quad (1.105)$$

далі оберемо  $2A_1 = 1$  і одержимо власні функції задачі  $SL_4$  в такому поданні

$$X_\mu(x) = \cos \frac{(2\mu - 1)\pi x}{2l}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (1.106)$$

Отже, ми знайшли ті ж самі власні значення і власні функції, які наведені в табл. 1.1 на с. 19, при цьому уникнули безпосереднього переходу до дійснозначної форми фундаментальної системи частинних розв'язків  $e^{\mp i\sqrt{\lambda}x}$  рівняння (1.23) на с. 10 та на с. 19 задачі *Штурма – Ліувілля*. ▲

**Задача 1.13.** Спробуйте розв'язати задачу *Штурма – Ліувілля* (1.23), (1.20) на с. 10 без спрощення граничних умов. ▲

## 1.4 Пояснення

**Пояснення 1.1** до с. 11. Звернемо увагу на те, що для власних функцій  $X_\mu(x)$  спрощеної граничної задачі *Штурма – Ліувілля* (1.23), (1.20) на с. 9 (щодо повної задачі *Штурма – Ліувілля*, див. пояснення 1.3 на с. 31) застосована норма простору функцій, квадрат яких є інтегровним, тобто таких, які можуть бути розривними і навіть необмеженими, хоча насправді власні функції  $X_\mu(x)$  суть нескінченно диференційовані на проміжку  $[0, l]$ , див. с. 18. Отже, для них можна увести відповідні норми для неперервних або гладких функцій.

Проте, власні функції утворюють *повну* і *замкнену* ортогональну систему  $\{X_\mu(x)\}_{\mu=1}^\infty$ , за якою здійснюється розвинення шуканих розв'язків крайових задач (1.1), (1.3) та (1.2), (1.3) на с. 5 в узагальнені ряди *Фур'є* (згідно тверджень 1.3, 1.4 на с. 12), а в теорії таких рядів саме подібна до уведеної в (1.26) на с. 11 через скалярний добуток норма є найбільш

зручною, навіть *природною*, оскільки знаходження коефіцієнтів розвинення деякої функції ґрунтується на послідовному обчисленні скалярних добутків цієї функції і функцій  $X_\mu$  (див., наприклад, вирази коефіцієнтів (1.30) розвинень (1.29) на с. 12 початкових умов крайових задач 1, 2 або коефіцієнтів розвинення (1.37) на с. 14 правих частин неоднорідних рівнянь крайових задач 3, 4). ▼

**Пояснення 1.2** до с. 12. У разі, коли розглядається не спрощена задача *Штурма – Ліувілля* (1.23), (1.20) на с. 9, а узагальнена (див. пояснення 1.3 на с. 31), твердження про можливість розвинення двічі неперервно диференційованої функції, яка задовольняє граничні умови такої задачі *Штурма – Ліувілля*, в збіжний ряд *Фур’є* за *власними* функціями цієї задачі 1.3, 1.4 називається теоремою *Стеклова*. Доведення цієї теореми потребує застосування теорії інтегральних рівнянь.

У разі спрощеної задачі *Штурма – Ліувілля* (1.23), (1.20) на с. 9 відповідні власні функції наведені в табл. 1.1 на с. 19, а твердження 1.3, 1.4 на с. 12 можуть бути доведені методами одновимірного аналізу (зокрема, теорії тригонометричних рядів *Фур’є*). ▼

**Пояснення 1.3** до с. 18. Задача *Штурма – Ліувілля* (1.23), (1.20) на с. 9, а також з означення 1.1 на с. 18 є спрощенням класичної задачі *Штурма – Ліувілля*, утвореної звичайним диференціальним рівнянням другого порядку

$$-\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + q(x) y(x) = \lambda y(x), \quad x \in \mathcal{I}, \quad (1.107)$$

де  $\mathcal{I} = (a, b)$ ,  $q(x)$  — дійснозначна додатна функція, неперервна на  $\bar{\mathcal{I}} = [a, b]$ , і однорідними граничними умовами

$$\begin{cases} \alpha_a y(a) + \sigma_a y'(a) = 0, \\ \sigma_b y(b) + \sigma_b y'(b) = 0, \end{cases} \quad (1.108)$$

де  $\alpha_a^2 + \sigma_a^2 \neq 0$ ,  $\alpha_b^2 + \sigma_b^2 \neq 0$ . Іноді класичну задачу *Штурма – Ліувілля* узагальнюють для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + q(x) y(x) = \lambda r(x) y(x), \quad x \in \mathcal{I}, \quad (1.109)$$

де  $p(x)$  — дійснозначна додатна функція, неперервно диференційована на  $\bar{\mathcal{I}}$ ,  $r(x)$  — дійснозначна додатна функція на  $\bar{\mathcal{I}}$ . За виконання деяких умов, накладених на функції  $p(x)$ ,  $r(x)$ , рівняння (1.109) може бути зведене до рівняння (1.107).

Очевидно, що в задачі *Штурма – Ліувілля* (1.23), (1.20) на с. 9, а також з означення 1.1 на с. 18 спрощення класичної задачі *Штурма – Ліувілля* досягнуто обранням тотожно рівної нулю функції  $q(x)$ , проте, такого спрощення достатньо для розв’язання крайових задач, постановки яких наведені на с. 5.

Задача *Штурма – Ліувілля* будь-якого різновиду з наведених вище називається також задачею про знаходження *власних* значень і *власних* функцій диференціального оператора другого порядку в складі рівняння задачі. Зазначимо також деяку подібність задачі *Штурма – Ліувілля* до задачі про знаходження *власних* значень  $\lambda$  і *власних* векторів  $\mathbf{r}$

лінійного оператора  $\mathcal{A}$ , який діє в  $n$ -вимірному векторному просторі, а саме

$$\mathbf{A} \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad (1.110)$$

де матриця  $\mathbf{A}$  і стовпчик  $\mathbf{r}$  суть подання лінійного оператора  $\mathcal{A}$  і власного вектору  $\mathbf{r}$  в обраному базисі.

Нехай існує повний набір ортогональних власних векторів  $\mathbf{r}_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, n$ , тоді справджується таке подання оператора

$$A = \sum_{\mu=1}^n \lambda_\mu \mathbf{r}_\mu, \quad (1.111)$$

де  $\lambda_\mu$  — власні значення, які відповідають власним векторам  $\mathbf{r}_\mu$ . Тобто такі власні вектори самі утворюють базис в  $n$ -вимірному векторному просторі, подібно до того, як власні функції задачі *Штурма – Ліувільля* утворюють повну замкнену систему (див. пояснення 1.2 на с. 31). ▼

## 2 Крайова задача для рівняння коливань з граничними умовами *Діріхле*

### 2.0 Постановка задачі

Математична постановка задачі випливає з постановки задачі з узагальненими граничними умовами, наведеної в підрозділі 1.1 на с. 5, і є такою

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = u_1(x) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{array} \right\}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = \psi_1(t) \\ u(t, l) = \psi_2(t) \end{array} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

причому початкові та граничні умови узгоджені в кутових точках параболическої границі  $\Pi$  прямокутника  $\mathcal{H}$ , а саме (див. рис. 1.1 на с. 6 а також задачу 2.1



на с. 40)

$$\begin{cases} u_0(0) = \psi_1(0), & u_1(0) = \psi_1'(0), \\ u_0(l) = \psi_2(0), & u_1(l) = \psi_2'(0). \end{cases} \quad (2.2)$$

## 2.1 Розв'язання задачі за методом відокремлення змінних

Розв'язок задачі (2.1) розшукуватимемо у вигляді суми трьох функцій (див. с. 5)

$$u(t, x) = \psi(t, x) + v(t, x) + w(t, x), \quad (2.3)$$

де: 1) функція  $\psi(t, x)$  задовольняє (тільки!) граничні умови задачі (2.1):

$$\psi(t, 0) = \psi_1(t), \quad \psi(t, l) = \psi_2(t), \quad (2.4)$$

і може бути уведена багатьма способами (див. задачу 2.2 на с. 40), наприклад, у вигляді лінійної за  $x$

$$\psi(t, x) = \psi_1(t) + [\psi_2(t) - \psi_1(t)] \frac{x}{l}; \quad (2.5)$$

2) функція  $v(t, x)$  є розв'язком *допоміжної* крайової задачі з однорідними (нульовими) граничними умовами і «новими» початковими умовами для однорідного рівняння коливань

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial v(0, x)}{\partial t} = v_1(x) \\ v(0, x) = v_0(x) \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ 0 \leq x \leq l, \end{array} \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t, 0) = 0 \\ v(t, l) = 0 \end{array} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

де «нові» початкові умови визначені таким чином

$$v_1(x) = u_1(x) - \frac{\partial \psi(0, x)}{\partial t}, \quad v_0(x) = u_0(x) - \psi(0, x); \quad (2.7)$$

3) функція  $w(t, x)$  є розв'язком *допоміжної* крайової задачі з однорідними (нульовими) граничними умовами, однорідними початковими умовами для

неоднорідного рівняння коливань

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} = h(t, x), \quad 0 < t \leq T \quad 0 < x < l, \\ \frac{\partial w(0, x)}{\partial t} = 0 \\ w(0, x) = 0 \end{array} \right\}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(t, 0) = 0 \\ w(t, l) = 0 \end{array} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

де «нова» права частина рівняння є такою

$$h(t, x) = f(t, x) - \left[ \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} \right]. \quad (2.9)$$

2) Для знаходження розв'язку крайової задачі (2.6) будемо ґрунтуватися на твердженні 1.4 на с. 12 та поданні (1.34) на с. 13:

а) врахуємо, що крайовій задачі (2.6) відповідає гранична задача *Штурма – Ліувілля* першого різновиду (див. табл. 1.1 на с. 19), розв'язок якої (злічені множини *власних значень* і відповідних *власних функцій*) є відомий, а саме

$$\lambda_\mu = \left( \frac{\mu\pi}{l} \right)^2, \quad X_\mu(x) = \sin \frac{\mu\pi x}{l}, \quad \mu \in \mathbb{N}; \quad (2.10)$$

б) розвинемо початкові умови (2.7) крайової задачі (2.6) в ряд за власними функціями (2.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{1,\mu} X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{1,\mu} \sin \frac{\mu\pi x}{l}, \\ v_0(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} \sin \frac{\mu\pi x}{l}, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

де коефіцієнти розвинення суть

$$v_{1,\mu} = \|X_\mu\|^{-2} (v_1, X_\mu) = \frac{2}{l} \int_0^l v_1(\xi) \sin \frac{\mu\pi\xi}{l} d\xi, \quad (2.12)$$

$$v_{0,\mu} = \|X_\mu\|^{-2} (v_0, X_\mu) = \frac{2}{l} \int_0^l v_0(\xi) \sin \frac{\mu\pi\xi}{l} d\xi;$$

в) підставимо власні значення, власні функції (2.10) та коефіцієнти (2.12) розвинення (2.7) в подання (1.34) на с. 13, звідки матимемо шуканий розв'язок крайової задачі (2.6)

$$v(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( v_{0,\mu} \cos \frac{\mu \pi a t}{l} + \frac{l}{\mu \pi a} v_{1,\mu} \sin \frac{\mu \pi a t}{l} \right) \sin \frac{\mu \pi x}{l}. \quad (2.13)$$

3) Для знаходження розв'язку крайової задачі (2.8) будемо ґрунтуватися на поданні (1.53) на с. 18:

а) врахуємо, що крайовій задачі (2.8) відповідає гранична задача *Штурма – Ліувілля* першого різновиду (див. табл. 1.1 на с. 19) розв'язок якої наведений вище як (2.10);

б) розвинемо праву частину рівняння крайової задачі (2.8) в ряд за власними функціями (2.10)

$$h(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_{\mu}(t) X_{\mu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_{\mu}(t) \sin \frac{\mu \pi x}{l}, \quad (2.14)$$

де коефіцієнти розвинення суть

$$h_{\mu}(t) = \|X_{\mu}\|^{-2} (h, X_{\mu}) = \frac{2}{l} \int_0^l h(t, \xi) \sin \frac{\mu \pi \xi}{l} d\xi; \quad (2.15)$$

в) підставимо власні значення, власні функції (2.10) та коефіцієнти (2.15) розвинення (2.9) в подання (1.53) на с. 18, звідки матимемо шуканий розв'язок крайової задачі (2.8)

$$w(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l}{\mu \pi a} \left\{ \int_0^t h_{\mu}(\tau) \sin \frac{\mu \pi a(t - \tau)}{l} d\tau \right\} \sin \frac{\mu \pi x}{l}. \quad (2.16)$$

Отже, розв'язком крайової задачі (2.1) є сума (2.3), в якій функції  $\psi(t, x)$ ,  $v(t, x)$  та  $w(t, x)$  дані відповідно виразами (2.5), (2.13) та (2.16) (див. задачу 2.3 на с. 40).

## 2.2 Інтегральне подання розв'язку задачі

Розв'язки (2.13) і (2.16) відповідно допоміжних задач (2.6) на с. 33 і (2.8) на с. 34 допускають інші подання, для чого: а) підставимо вирази коефіцієнтів *Фур'є* (2.12) в (2.13)

і (2.15) в (2.16); б) змінимо порядок інтегрування і підсумовування в (2.13) і (2.16), тоді матимемо для вказаних розв'язків такі вирази

$$\begin{aligned}
v(t, x) &= \int_0^l \left( \frac{2}{l} \sum_{\mu=1}^{\infty} \cos \frac{\mu \pi a t}{l} \sin \frac{\mu \pi x}{l} \sin \frac{\mu \pi \xi}{l} \right) v_0(\xi) d\xi + \\
&+ \int_0^l \left( \frac{2}{l} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l}{\mu \pi a} \sin \frac{\mu \pi a t}{l} \sin \frac{\mu \pi x}{l} \sin \frac{\mu \pi \xi}{l} \right) v_1(\xi) d\xi, \\
w(t, x) &= \int_0^t \int_0^l \left( \frac{2}{l} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l}{\mu \pi a} \sin \frac{\mu \pi a(t-\tau)}{l} \sin \frac{\mu \pi x}{l} \sin \frac{\mu \pi \xi}{l} \right) h(\tau, \xi) d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Уведемо функцію

$$G(t, x; \xi) = \frac{2}{l} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l}{\mu \pi a} \sin \frac{\mu \pi a t}{l} \sin \frac{\mu \pi x}{l} \sin \frac{\mu \pi \xi}{l}, \quad (2.17)$$

називану функцією *Гріна* крайової задачі (2.1) на с. 32, за допомогою якої розв'язкам допоміжних крайових задач можна надати такі інтегральні подання

$$v(t, x) = \int_0^l \frac{\partial G(t, x; \xi)}{\partial t} v_0(\xi) d\xi + \int_0^l G(t, x; \xi) v_1(\xi) d\xi, \quad (2.18)$$

$$w(t, x) = \int_0^t \int_0^l G(t - \tau, x; \xi) h(\tau, \xi) d\tau d\xi. \quad (2.19)$$

## 2.3 Обґрунтування розв'язку задачі

Звернемося до обґрунтування розв'язку крайової задачі (2.1) на с. 32 (наведемо, за можливості, всі необхідні для цього вирази у даному підрозділі, для того, щоб зробити викладення незалежним), знайденого у вигляді суми (2.3) трьох функцій, з яких *перша*  $\psi(t, x)$  задовольняє граничні умови крайової задачі; *друга*  $v(t, x)$  є розв'язком допоміжної крайової задачі (2.6) на с. 33 і подана функціональним рядом (2.13) на с. 35; *третья*  $w(t, x)$  є розв'язком допоміжної крайової задачі (2.8) на с. 34 і подана функціональним рядом (2.16) на с. 35.

Очевидно, що обґрунтування розв'язку крайової задачі (2.1) може буде зведено до обґрунтування розв'язків (2.13) і (2.16) відповідно допоміжних крайових задач (2.6) і (2.8).

**Твердження 2.1.** *Нехай на відрізку  $[0, l]$ : 1) функція  $v_0(x)$ : а) двічі неперервно диференційована, б) тричі кусково-неперервно диференційована і в) на кінцях відрізка виконані умови*

$$v_0(0) = v_0(l) = 0, \quad v_0''(0) = v_0''(l) = 0; \quad (2.20)$$

2) функція  $v_1(x)$ : а) неперервно диференційована, б) двічі кусково-неперервно диференційована і в) на кінцях відрізка задовольняє умови

$$v_1(0) = v_1(l) = 0; \quad (2.21)$$

тоді функція  $v(t, x)$ , подана рядом (2.13), є розв'язком допоміжної крайової задачі (2.6) на с. 33 (див. задачу 2.4 на с. 40).  $\square$

Надалі нам знадобляться числові ряди

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \rightarrow \infty, \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} < \infty, \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^3} < \infty, \quad (2.22)$$

стосовно яких нагадаємо, що перший є розбіжним, а другий і третій — збіжні.

**Твердження 2.2.** Нехай функція  $h(t, x)$  в прямокутнику  $\bar{\mathcal{H}} = [0, T] \times [0, l]$ : а) неперервна по  $t$ , б) двічі неперервно диференційована за  $x$  і в) задовольняє умови

$$h(t, 0) = h(t, l) = 0; \quad (2.23)$$

тоді функція  $w(t, x)$  (2.16) є розв'язком крайової задачі (2.8).  $\square$

**Доведення.** Попередньо зазначимо таке. *По-перше*, умова (2.23) є природньою, оскільки означає, що до нерухомих кінців струни не прикладені зовнішні сили. *По-друге*, твердження означає, що функція  $w(t, x)$  (2.16) (див. постановки задач (2.1) на с. 32 і (2.8) на с. 34): 1) неперервна в замкненні  $\bar{\mathcal{H}} = [0, T] \times [0, l]$  прямокутнику; 2) неперервно-диференційована за  $t$  в прямокутнику  $\bar{\mathcal{H}} = (0, T] \times (0, l)$ , включно до нижньої ділянки границі  $\Pi$ ; 3) двічі неперервно диференційована за  $t$  і  $x$  в прямокутнику; 4) справджує рівняння крайової задачі в  $\mathcal{H}$  і 5) задовольняє початкові і граничні умови на  $\Pi$ .

*По-перше*, внаслідок умов твердження, такі ряди Фур'є суть збіжні

$$\left\{ \begin{array}{l} h(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_{\mu}(t) \sin \frac{\mu \pi x}{l}, \\ \frac{\partial^2 h(t, x)}{\partial x^2} = \sum_{\mu=1}^{\infty} H_{\mu}(t) \sin \frac{\mu \pi x}{l} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^2 h_{\mu}(t) \sin \frac{\mu \pi x}{l}, \end{array} \right. \quad (2.24)$$

причому другий ряд може бути одержаний з першого повторним почленним диференціюванням, звідки маємо

$$h_{\mu}(t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\mu^2} H_{\mu}(t). \quad (2.25)$$

Також зазначимо, що справджується рівність *Парсеваля*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} H_{\mu}^2(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 h(t, x)}{\partial x^2} \right]^2 dx, \quad (2.26)$$

в лівій частині якого знаходиться збіжний ряд, тобто

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} H_{\mu}^2(t) \leq C, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.27)$$

По-друге, виконаємо оцінку коефіцієнтів функціонального ряду (2.16)

$$\begin{aligned}
\max_{(t,x) \in \bar{E}} \left| w_\mu(t) X_\mu(x) \right| &= \max_{t \in [0,T]} \left| w_\mu(t) \right| = \frac{l}{\mu\pi a} \max_{t \in [0,T]} \left| \int_0^t h_\mu(\tau) \sin \frac{\mu\pi a(t-\tau)}{l} d\tau \right| \leq \\
&\leq \frac{l}{\mu\pi a} \int_0^T \left| h_\mu(\tau) \right| d\tau = \frac{l}{\mu\pi a} \left( \frac{l}{\mu\pi} \right)^2 \int_0^T \left| H_\mu(\tau) \right| d\tau = \\
&= \frac{1}{a} \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{1}{\mu^3} \int_0^T \left| H_\mu(\tau) \right| d\tau.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Для оцінки підінтегральної функції в правій частині останнього ланцюга нерівностей, звернемося до збіжного ряду (2.27) і врахуємо, що кожний член ряду не більше суми рядц, звідки матимемо

$$H_\mu^2(\tau) \leq \sum_{\gamma=1}^{\infty} H_\gamma^2(\tau) \leq C \quad \Rightarrow \quad \left| H_\mu(\tau) \right| \leq \sqrt{C}, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}, \tag{2.29}$$

і завершимо оцінку

$$\max_{(t,x) \in \bar{E}} \left| w_\mu(t) X_\mu(x) \right| \leq \frac{\sqrt{C} T}{a} \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{1}{\mu^3}. \tag{2.30}$$

Оскільки третій числовий ряд (2.22) є збіжним, побудова мажорантного числового ряду для функціонального ряду (2.16) завершена.

По-третє, перетворимо вираз для функції  $w(t, x)$  (2.16) до виду

$$w(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l}{\mu\pi a} \left\{ \sin \frac{\mu\pi at}{l} \int_0^t h_\mu(\tau) \cos \frac{\mu\pi a\tau}{l} d\tau - \cos \frac{\mu\pi at}{l} \int_0^t h_\mu(\tau) \sin \frac{\mu\pi a\tau}{l} d\tau \right\} \sin \frac{\mu\pi x}{l},$$

зручному для диференціювання за змінною  $t$ , і двічі продиференціюємо почленно

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \cos \frac{\mu\pi at}{l} \int_0^t h_\mu(\tau) \cos \frac{\mu\pi a\tau}{l} d\tau + \sin \frac{\mu\pi at}{l} \int_0^t h_\mu(\tau) \sin \frac{\mu\pi a\tau}{l} d\tau \right\} \sin \frac{\mu\pi x}{l} + \\
&+ \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{l}{\mu\pi a} h_\mu(t) \underbrace{\left( \sin \frac{\mu\pi at}{l} \cos \frac{\mu\pi at}{l} - \cos \frac{\mu\pi at}{l} \sin \frac{\mu\pi at}{l} \right)}_{\equiv 0} \sin \frac{\mu\pi x}{l},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu\pi a}{l} \underbrace{\left\{ -\sin \frac{\mu\pi at}{l} \int_0^t h_\mu(\tau) \cos \frac{\mu\pi a\tau}{l} d\tau + \cos \frac{\mu\pi at}{l} \int_0^t h_\mu(\tau) \sin \frac{\mu\pi a\tau}{l} d\tau \right\}}_{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 w_\mu(t)} \sin \frac{\mu\pi x}{l} + \\
&+ \sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t) \underbrace{\left( \cos \frac{\mu\pi at}{l} \cos \frac{\mu\pi at}{l} + \sin \frac{\mu\pi at}{l} \sin \frac{\mu\pi at}{l} \right)}_{\equiv 1} \sin \frac{\mu\pi x}{l}.
\end{aligned}$$

Диференціювання функції  $w(t, x)$  (2.16) за змінною  $x$  полягає в диференціюванні функцій  $X_\mu(x)$  і не складає труднощів. Знайденим похідним надамо подання, зручного для подальшої роботи, а саме

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} &= - \underbrace{\sum_{\mu=1}^{\infty} \left( \frac{\mu \pi a}{l} \right)^2 w_\mu(t) X_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t) X_\mu(x)}_{\sum_{\mu=1}^{\infty} W_\mu(t) X_\mu(x)} = a^2 \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + h(t, x), \\ \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} &= - \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( \frac{\mu \pi}{l} \right)^2 w_\mu(t) X_\mu(x). \end{aligned} \right. \quad (2.31)$$

По-четверте, зійснено оцінку членів першого з функціональних рядів (2.31) (див. також оцінки (2.28) і (2.29))

$$\begin{aligned} \max_{(t,x) \in \bar{E}} |W_\mu(t) X_\mu(x)| &\leq \left( \frac{\mu \pi a}{l} \right)^2 \max_{t \in [0, T]} |w_\mu(t)| + \max_{t \in [0, T]} |h_\mu(t)| \leq \\ &\leq \frac{\mu \pi a}{l} \int_0^T |h_\mu(\tau)| d\tau + \left( \frac{l}{\mu \pi} \right)^2 \max_{t \in [0, T]} |H_\mu(t)| = \\ &= a \frac{l}{\pi} \int_0^T |H_\mu(\tau)| d\tau + \sqrt{C} \left( \frac{l}{\pi} \right)^2 \frac{1}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Оцінимо перший доданок в правій частині (2.32)

$$a \frac{l}{\pi} \int_0^T |H_\mu(\tau)| d\tau \leq \frac{a}{2} \frac{l}{\pi} \int_0^T \left[ H_\mu^2(\tau) + \frac{1}{\mu^2} \right] d\tau = \frac{a}{2} \frac{l}{\pi} \int_0^T H_\mu^2(\tau) d\tau + \frac{aT}{2} \frac{l}{\pi} \frac{1}{\mu^2}, \quad (2.33)$$

тоді, якщо продовжити оцінку (2.32), матимемо

$$\max_{(t,x) \in \bar{E}} |W_\mu(t) X_\mu(x)| \leq \frac{a}{2} \frac{l}{\pi} \int_0^T H_\mu^2(\tau) d\tau + \frac{l}{\pi} \left[ \frac{aT}{2} + \sqrt{C} \right] \frac{1}{\mu^2}. \quad (2.34)$$

Оскільки другий числовий ряд (2.22) збігається, а також внаслідок нерівності

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^T H_\mu^2(\tau) d\tau = \int_0^T \sum_{\mu=1}^{\infty} H_\mu^2(\tau) d\tau \stackrel{(2.27)}{\leq} CT, \quad (2.35)$$

з оцінки (2.34) заклачимо, що підсилюючий числовий ряд для першого з функціональних рядів (2.31) побудований.

Існування підсилюючого числового ряді для другого з функціональних рядів (2.31) очевидно, а оцінка загальних членів функціональних рядів, одержаних однократним диференціюванням функції  $w(t, x)$  (2.16) за  $t$  і  $x$  проводиться простіше за оцінки другої похідної функції  $w(t, x)$  (2.16) за  $t$ , виконаної раніше.

Перевірка того, що функція  $w(t, x)$  (2.16) справджує рівняння крайової задачі (2.8), відразу випливає з порівняння першого та другого функціональних рядів (2.31). ■

## 2.4 Задачі для самостійної роботи

До підрозділу 2.0 на с. 32

**Задача 2.1.** Дайте тлумачення умовам узгодження (2.2) початкових та граничних умов крайової задачі (2.1) на с. 32.

До підрозділу 2.1 на с. 33

**Задача 2.2.** Запропонуйте сімї функцій  $\psi(t, x)$  в поданнях (2.3) на с. 33, які відрізняються від лінійної (2.5).

**Розв'язання.**

**Задача 2.3.** Замініть лінійну функцію  $\psi(t, x)$  (2.5) в поданні (2.3) на с. 33 іншою функцією з допустимої множини (див. задачу 2.2) і поясніть, як це впливатиме на функції  $v(t, x)$  та  $w(t, x)$  і на розв'язок  $u(t, x)$ .

До підрозділу 2.3 на с. 36

**Задача 2.4.** Спробуйте обґрунтувати твердження 2.1 на с. 36 за зразком обґрунтування твердження 3.1 на с. 44.

## 3 Крайова задача для рівняння теплопроводності з граничними умовами *Діріхле*

### 3.1 Постановка задачі

Математична постановка задачі впливає з постановки задачі з узагальненими граничними умовами, наведеної в підрозділі 1.1 на с. 5, і є такою

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ \left. \begin{array}{l} u(t, 0) = \psi_1(t) \\ u(t, l) = \psi_2(t) \end{array} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

причому початкові та граничні умови узгоджені в кутових точках параболічної границі  $\Pi$  прямокутника  $\mathcal{H}$ , а саме (див. рис. 1.1 на с. 6)

$$\psi_1(0) = u_0(0), \quad u_0(l) = \psi_2(0). \quad (3.2)$$



### 3.2 Розв'язання задачі за методом відокремлення змінних

Розв'язок задачі (3.1) розшукуватимемо у вигляді суми трьох функцій

$$u(t, x) = \psi(t, x) + v(t, x) + w(t, x), \quad (3.3)$$

де: 1) функція  $\psi(t, x)$  задовольняє граничні умови задачі (3.1); 2) функція  $v(t, x)$  є розв'язком такої *допоміжної* крайової задачі з однорідними (нульовими) граничними умовами і «новою» початковою умовою для однорідного рівняння теплопроводності

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = 0, \\ v(0, x) = v_0(x), \\ \left. \begin{array}{l} v(t, 0) = 0 \\ v(t, l) = 0 \end{array} \right\}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ 0 \leq x \leq l, \\ 0 \leq t \leq T, \end{array} \quad (3.4)$$

де «нова» початкова умова визначена таким чином

$$v_0(x) = u_0(x) - \psi(0, x); \quad (3.5)$$

3) функція  $w(t, x)$  є розв'язком такої *допоміжної* крайової задачі з однорідними (нульовими) граничними умовами, однорідною початковою умовою для неоднорідного рівняння теплопроводності

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} = h(t, x), \\ w(0, x) = 0, \\ \left. \begin{array}{l} w(t, 0) = 0 \\ w(t, l) = 0 \end{array} \right\}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \\ 0 \leq x \leq l, \\ 0 \leq t \leq T, \end{array} \quad (3.6)$$

де «нова» права частина рівняння є такою

$$h(t, x) = f(t, x) - \left[ \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} \right]. \quad (3.7)$$

2) Для розв'язання *допоміжної* крайової задачі (3.4) будемо ґрунтуватися на твердженні 1.3 на с. 12 та поданні (1.32) на с. 13:

а) врахуємо, що задачі (3.4) відповідає задача *Штурма – Ліувілля* першого різновиду (див. табл. 1.1 на с. 19), розв’язок якої (злічені множини *власних значень* і відповідних *власних функцій*) є відомий, а саме

$$\lambda_\mu = \left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2, \quad X_\mu(x) = \sin \frac{\mu\pi x}{l}, \quad \mu \in \mathbb{N}; \quad (3.8)$$

б) розвинемо початкову умову (3.5) в ряд за власними функціями (3.8)

$$v_0(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} \sin \frac{\mu\pi x}{l}, \quad (3.9)$$

де коефіцієнти розвинення суть

$$v_{0,\mu} = \|X_\mu\|^{-2} (v_0, X_\mu) = \frac{2}{l} \int_0^l v_0(\xi) \sin \frac{\mu\pi\xi}{l} d\xi; \quad (3.10)$$

в) підставимо власні значення, власні функції (3.8) та коефіцієнти (3.10) в подання (1.32) на с. 13, звідки матимемо шуканий розв’язок задачі (3.4)

$$v(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\mu\pi x}{l}; \quad (3.11)$$

3) Для розв’язання *допоміжної* крайової задачі (3.6) будемо ґрунтуватися на поданні (1.52) на с. 17:

а) врахуємо, що задачі (3.6) відповідає задача *Штурма – Ліувілля* першого різновиду (див. табл. 1.1 на с. 19), розв’язок якої наведений вище як (3.8);

б) розвинемо праву частину рівняння задачі (3.6) в ряд за власними функціями (3.8)

$$h(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t) X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t) \sin \frac{\mu\pi x}{l}, \quad (3.12)$$

де коефіцієнти розвинення суть

$$h_\mu(t) = \|X_\mu\|^{-2} (h, X_\mu) = \frac{2}{l} \int_0^l h(t, \xi) \sin \frac{\mu\pi\xi}{l} d\xi; \quad (3.13)$$

в) підставимо власні значення, власні функції (3.8) та коефіцієнти (3.13) в подання (1.52) на с. 17, звідки матимемо шуканий розв'язок задачі (3.6)

$$w(t, x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} h_{\mu}(\tau) d\tau \right\} \sin \frac{\mu\pi x}{l}. \quad (3.14)$$

Отже, розв'язком крайової задачі (3.1) є сума (2.3), в якій функції  $\psi(t, x)$ ,  $v(t, x)$  та  $w(t, x)$  дані відповідно виразами (2.5) на с. 33, (3.11) та (3.14).

### 3.3 Інтегральне подання розв'язку задачі

Розв'язки (3.11) і (3.14) відповідно допоміжних задач (3.4) на с. 41 і (3.6) на с. 41 допускають інші подання, для чого: а) підставимо вирази коефіцієнтів *Фур'є* (3.10) в (3.11) і (3.13) в (3.14); б) змінимо порядок інтегрування і сумування в (3.11) і (3.14), тоді матимемо для вказаних розв'язків такі вирази

$$v(t, x) = \int_0^l \left( \frac{2}{l} \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\mu\pi x}{l} \sin \frac{\mu\pi \xi}{l} \right) v_0(\xi) d\xi,$$

$$w(t, x) = \int_0^t \int_0^l \left( \frac{2}{l} \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin \frac{\mu\pi x}{l} \sin \frac{\mu\pi \xi}{l} \right) h(\tau) d\tau d\xi.$$

Уведемо функцію

$$G(t, x; \xi) = \frac{2}{l} \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\mu\pi x}{l} \sin \frac{\mu\pi \xi}{l}, \quad (3.15)$$

називану функцією *Гріна* крайової задачі (3.1) на с. 40, за допомогою якої розв'язкам допоміжних крайових задач можна надати такі інтегральні подання

$$v(t, x) = \int_0^l G(t, x; \xi) v_0(\xi) d\xi, \quad (3.16)$$

$$w(t, x) = \int_0^t \int_0^l G(t - \tau, x; \xi) h(\tau) d\tau d\xi. \quad (3.17)$$

### 3.4 Обґрунтування розв'язку задачі

Звернемося до обґрунтування розв'язку крайової задачі (3.1) на с. 40, поданого у вигляді суми (2.3) трьох функцій, з яких *перша*  $\psi(t, x)$  задовольняє граничні умови крайової задачі; *друга*  $v(t, x)$  є розв'язком допоміжної крайової задачі (3.4) на с. 41 і подана функціональним рядом (3.11) на с. 42; *третья*  $w(t, x)$  є розв'язком допоміжної крайової задачі (3.6) на с. 41 і подана функціональним рядом (3.14) на с. 43.

Очевидно, що обґрунтування розв'язку крайової задачі (3.1) може буде зведено до обґрунтування розв'язків (3.11) і (3.14) відповідно допоміжних крайових задач (3.4) і (3.6)

**Твердження 3.1.** *Нехай на відрізку  $[0, l]$  функція  $v_0(x)$ : а) неперервна, б) кусково-неперервно диференційована і в) на кінцях відрізка задовольняє умови*

$$v_0(0) = v_0(l) = 0; \quad (3.18)$$

тоді функція  $v(t, x)$ , подана рядом (3.11), є розв'язком допоміжної крайової задачі (3.4) на с. 41.  $\square$

**Доведення.** Спочатку зазначимо таке. *По-перше*, умова (3.18) виконана внаслідок побудови функції  $v_0(t, x)$  з функцій  $u_0(t, x)$  і  $\psi(t, x)$ .

*По-друге*, твердження означає, що функція  $v(t, x)$  (3.11): 1) неперервна в замиканні  $\bar{\mathcal{H}} = [0, T] \times [0, l]$  прямокутника  $\mathcal{H} = (0, T] \times (0, l)$ ; 2) неперервно диференційована в прямокутнику  $\mathcal{H}$  один раз за  $t$  і двічі за  $x$ ; 3) справджує однорідне рівняння теплопроводності в прямокутнику  $\mathcal{H}$ ; 4) задовольняє а) початкову і б) однорідні граничні умови допоміжної крайової задачі (3.4) на П.

1) Неперервність функції  $v(t, x)$ , поданої рядом (3.11), в  $\bar{\mathcal{H}}$  випливає з того, що:

а) числовий ряд, утворений коефіцієнтами ряду  $\Phi_{ур}'$ е (3.10) функції  $v_0(x)$ , є абсолютно збіжний, тобто збігається такий числовий ряд з невід'ємними членами

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |v_{0,\mu}| < \infty; \quad (3.19)$$

б) числовий ряд (3.19) підсилює ряд (3.11) в  $\bar{\mathcal{H}}$ , тобто справджуються такі нерівності

$$\max_{(t,x) \in \bar{\mathcal{H}}} |V_{\mu}(t) X_{\mu}(x)| = \max_{(t,x) \in \bar{\mathcal{H}}} \left| v_{0,\mu} e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\mu\pi x}{l} \right| \leq |v_{0,\mu}|; \quad (3.20)$$

в) внаслідок (3.19), (3.20) ряд (3.11) є рівномірно збіжним в  $\bar{\mathcal{H}}$ .

2) Неперервна диференційованість функції  $v(t, x)$ , поданої рядом (3.11), один раз за  $t$  і двічі за  $x$  в  $\mathcal{H}$  означає рівномірну збіжність таких рядів (почленне диференціювання ряду (3.11) можна виконати або безпосередньо, або врахуванням диференціальних рівнянь, які задовольняють функції  $V_{\mu}(t)$  та  $X_{\mu}(x)$ , відповідно: (1.21) на с. 10 та (1.23) на с. 10)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} &= \sum_{\mu=1}^{\infty} V'_{\mu}(t) X_{\mu}(x) = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^2 V_{\mu}(t) X_{\mu}(x) = a^2 \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} &= \sum_{\mu=1}^{\infty} V_{\mu}(t) X''_{\mu}(x) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^2 V_{\mu}(t) X_{\mu}(x), \end{aligned} \right. \quad (3.21)$$

для обґрунтування якої побудуємо такі числові ряди, які підсилюватимуть ряди (3.21):

а) виконаємо попередню оцінку коефіцієнтів рядів (3.21) в  $\mathcal{H}$  (без урахування несуттєвих для цього сталих множників попереду відповідних сум)

$$\max_{(t,x) \in \mathcal{H}} \left| \mu^2 V_{\mu}(t) X_{\mu}(x) \right| = \max_{(t,x) \in \mathcal{H}} \left| \mu^2 v_{0,\mu} e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\mu\pi x}{l} \right| \leq \mu^2 |v_{0,\mu}| e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 t}; \quad (3.22)$$

б) врахуємо, що функція  $v_0(x)$ , неперервна на замкненому проміжку  $[0, l]$ , є обмеженою (тобто існує додатна стала  $M$ , така що  $|v_0(x)| < M$ ) і виконаємо оцінку коефіцієнтів (3.10) її ряду Фур'є (3.9)

$$|v_{0,\mu}| = \left| \frac{2}{l} \int_0^l v_0(\xi) \sin \frac{\mu\pi\xi}{l} d\xi \right| \leq \frac{2}{l} \int_0^l |v_0(\xi) \sin \frac{\mu\pi\xi}{l}| d\xi < \frac{2}{l} M \int_0^l d\xi = \frac{2}{l} M l = 2M; \quad (3.23)$$

в) завершимо оцінку (3.22), проте вже в прямокутнику  $\mathcal{H}_\delta := [\delta, T] \times (0, l) \subset \mathcal{H}$ ,  $0 < \delta < T$ , і з урахуванням (3.23), а саме як

$$\max_{(t,x) \in \mathcal{H}_\delta} \left| \mu^2 V_\mu(t) X_\mu(x) \right| = \max_{(t,x) \in \mathcal{H}_\delta} \left| \mu^2 v_{0,\mu} e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\mu\pi x}{l} \right| < 2M \mu^2 e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 \delta} =: a_\mu; \quad (3.24)$$

г) обчислимо границю

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{a_{\mu+1}}{a_\mu} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left( \frac{\mu+1}{\mu} \right)^2 e^{-(\mu+1)^2 \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \delta + \mu^2 \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \delta} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right)^2 e^{-(2\mu+1) \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \delta} = 0, \quad (3.25)$$

звідки випливає, згідно ознаки Даламбера, що числовий ряд з додатними членами  $a_\mu$  є збіжним, а отже підсилює ряди (3.21) в  $\mathcal{H}_\delta$  (з урахуванням сталих множників, які передують відповідним сумах і які тимчасово не були взяті до уваги);

д) оскільки величину  $\delta$  можна обирати довільно (як завгодно близькою до нуля), рівномірна збіжність рядів (3.21) в  $\mathcal{H}$  доведена.

3) Оскільки ряд (3.11), утворений частинними розв'язками  $V_\mu(t) X_\mu(x)$  однорідного рівняння теплопроводності, може бути диференційований почленно, він справджує це рівняння (див. також (3.21)).

4) Оскільки: а) ряд (3.11) при  $t = 0$  перетворюється на ряд Фур'є (3.9) початкової функції  $v_0(x)$  (3.5), він задовольняє початкову умову допоміжної крайової задачі (3.4); б) власні функції  $X_\mu(x)$  в складі частинних розв'язків  $V_\mu(t) X_\mu(x)$  однорідного рівняння теплопроводності задовольняють однорідні граничні умови, ряд (3.11) також задовольняє однорідні граничні умови тієї ж задачі. ■

**Твердження 3.2.** Нехай в замиканні  $\bar{\mathcal{H}} = [0, T] \times [0, l]$  прямокутника  $\mathcal{H} = (0, T] \times (0, l)$  функція  $h(t, x)$ : а) чотири рази неперервно диференційована за  $x$  і б) на бокових сторонах задовольняє умову

$$h(t, 0) = h(t, l) = 0; \quad (3.26)$$

тоді функція  $w(t, x)$ , подана рядом (3.14), є розв'язком допоміжної крайової задачі (3.6) на с. 41. □

**Доведення.** Твердження означає, що функція  $w(t, x)$  (3.14): 1) неперервна в  $\bar{\mathcal{H}}$ ; 2) неперервно-диференційована в  $\mathcal{H}$  один раз за  $t$  і двічі за  $x$ ; 3) справджує неоднорідне рівняння теплопроводності в  $\mathcal{H}$ ; 4) задовольняє однорідні а) початкову і б) граничні умови допоміжної крайової задачі (3.6) на  $\Pi$ .

1) Неперервність функції  $w(t, x)$  в  $\bar{\mathcal{H}}$  означає рівномірну збіжність ряду (3.14), для обґрунтування якої побудуємо числовий ряд, який підсилюватиме ряд (3.14):

а) виконаємо попередню оцінку коефіцієнтів ряду (3.14)

$$\begin{aligned} \max_{(t,x) \in \bar{\mathcal{H}}} |W_\mu(t) X_\mu(x)| &= \max_{(t,x) \in \bar{\mathcal{H}}} \left| \left\{ \int_0^t e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} h_\mu(\tau) d\tau \right\} \sin \frac{\mu\pi x}{l} \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} h_\mu(\tau) d\tau \right| \leq \max_{t \in [0, T]} \int_0^t \left| e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} h_\mu(\tau) \right| d\tau; \end{aligned} \quad (3.27)$$

б) врахуємо, що ряд *Фур'є* (3.12) функції  $h(t, x)$  є збіжний, а також, що функція є обмеженою в замкненні  $\bar{\mathcal{H}}$  (тобто існує додатна стала  $K$ , така що  $|h(t, x)| < K$ ), і виконаємо оцінку коефіцієнтів (3.13) її ряду *Фур'є*

$$|h_\mu(t)| = \left| \frac{2}{l} \int_0^l h(t, \xi) \sin \frac{\mu\pi\xi}{l} d\xi \right| \leq \frac{2}{l} \int_0^l |h(t, \xi) \sin \frac{\mu\pi\xi}{l}| d\xi < \frac{2}{l} K \int_0^l d\xi = 2K; \quad (3.28)$$

в) обчислимо інтеграл

$$\int_0^t e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau = \left\{ \eta = \tau - t \right\} = \int_{-t}^0 e^{+\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 \eta} d\eta = \left( \frac{l}{\mu\pi a} \right)^2 \left( 1 - e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 t} \right); \quad (3.29)$$

г) продовжимо оцінку (3.27) з урахуванням (3.28), (3.29)

$$\max_{(t,x) \in \bar{\mathcal{H}}} |W_\mu(t) X_\mu(x)| \leq \max_{t \in [0, T]} \int_0^t \left| e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} h_\mu(\tau) \right| d\tau \leq 2K \int_0^T e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau < 2K \left( \frac{l}{\mu\pi a} \right)^2; \quad (3.30)$$

д) оскільки числовий ряд, утворений членами  $\mu^{-2}$ , є збіжний, числовий ряд з членами в правій частині нерівності (3.30) підсилює ряд (3.14), внаслідок чого останній є рівномірно збіжний.

Неперервність функції  $w(t, x)$  в  $\bar{\mathcal{H}}$  може бути доведена в інший спосіб. Насправді:

а) врахуємо, що згідно умов твердження такий ряд *Фур'є* є збіжний

$$\frac{\partial^4 h(t, x)}{\partial x^4} = \sum_{\mu=1}^{\infty} H_\mu(t) X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} H_\mu(t) \sin \frac{\mu\pi x}{l}, \quad t \in [0, T], \quad (3.31)$$

причому ряд (3.31) може бути одержаний з ряду *Фур'є* (3.12) функції  $h(t, x)$  послідовним почленним диференціюванням, звідки матимемо

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} H_\mu(t) \sin \frac{\mu\pi x}{l} = \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^2 h_\mu(t) \sin \frac{\mu\pi x}{l} \quad \Rightarrow \quad h_\mu(t) = \left( \frac{l}{\mu\pi} \right)^4 H_\mu(t); \quad (3.32)$$

б) виконаємо попередню оцінку коефіцієнтів ряду (3.14) з урахуванням (3.32) (для скорочення запису візьмемо до уваги (3.27))

$$\max_{(t,x) \in \bar{\mathcal{H}}} |W_\mu(t) X_\mu(x)| \leq \max_{t \in [0, T]} \int_0^t \left| e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} h_\mu(\tau) \right| d\tau < \left( \frac{l}{\mu\pi} \right)^4 \int_0^T |H_\mu(\tau)| d\tau; \quad (3.33)$$

в) врахуємо, що члени ряду *Фур'є* (3.31), як збіжного, сукупно обмежені (існує додатна стала  $M$ , така що  $|H_\mu(t)| < M$ ) і завершимо оцінку (3.33), подібно (3.30).

2) Неперервна диференційованість функції  $w(t, x)$ , поданої рядом (3.14), один раз за  $t$  і двічі за  $x$  в  $\mathcal{H}$  означає рівномірну збіжність таких рядів (почленне диференціювання ряду (3.14) можна виконати або безпосередньо, або врахуванням диференціальних рівнянь, які задовольняють функції  $W_\mu(t)$  та  $X_\mu(x)$ , відповідно: (1.38) на с. 14 та (1.23) на с. 10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = \sum_{\mu=1}^{\infty} W'_\mu(t) X_\mu(x) = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^2 W_\mu(t) X_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t) X_\mu(x) = \\ \qquad \qquad \qquad = a^2 \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + h(t, x), \\ \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} = \sum_{\mu=1}^{\infty} W_\mu(t) X''_\mu(x) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^2 W_\mu(t) X_\mu(x), \end{array} \right. \quad (3.34)$$

для обґрунтування якої побудуємо такі числові ряди, які підсилюватимуть ряди (3.34):

а) виконаємо попередню оцінку коефіцієнтів рядів (3.34) в  $\mathcal{H}$  (без урахування несуттєвих для цього сталих множників попереду відповідних сум, див. також (3.27) – (3.30))

$$\max_{(t,x) \in \mathcal{H}} \left| \mu^2 W_\mu(t) X_\mu(x) \right| \leq \mu^2 \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t e^{-\left(\frac{\mu \pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} h_\mu(\tau) d\tau \right| \leq \mu^2 \int_0^T |h_\mu(\tau)| d\tau; \quad (3.35)$$

б) врахуємо рівність (3.32) і продовжимо оцінку (3.35)

$$\max_{(t,x) \in \mathcal{H}} \left| \mu^2 W_\mu(t) X_\mu(x) \right| \leq \mu^2 \left(\frac{l}{\mu \pi}\right)^4 \int_0^T |H_\mu(\tau)| d\tau = \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{1}{\mu^2} \int_0^T |H_\mu(\tau)| d\tau; \quad (3.36)$$

в) врахуємо, що члени ряду *Фур'є* (3.31), як збіжного, сукупно обмежені (існує додатна стала  $M$ , така що  $|H_\mu(t)| < M$ ), тоді попередня оцінка набуватиме такого виду

$$\max_{(t,x) \in \mathcal{H}} \left| \mu^2 W_\mu(t) X_\mu(x) \right| \leq MT \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{1}{\mu^2}; \quad (3.37)$$

г) оскільки числовий ряд, утворений членами  $\mu^{-2}$ , є збіжний, числовий ряд з членами в правій частині нерівності (3.37) підсилює ряди (3.34) (з урахуванням сталих множників, які передують відповідним суммам і які тимчасово не були взяті до уваги), внаслідок чого останні суть рівномірно збіжні.

3) Оскільки ряд (3.14), утворений частинними розв'язками  $W_\mu(t) X_\mu(x)$  однорідного рівняння теплопроводності, може бути диференційований почленно, він справджує це рівняння (див. також (3.21)).

4) Оскільки: а) коефіцієнти ряду (3.14) при  $t = 0$  перетворюються в нуль (через те, що підінтегральні функції суть обмежені), ряд задовольняє початкову умову допоміжної крайової задачі (3.6); б) власні функції  $X_\mu(x)$  в складі частинних розв'язків  $W_\mu(t) X_\mu(x)$  неоднорідного рівняння теплопроводності задовольняють однорідні граничні умови, тому ряд (3.14) також задовольняє однорідні граничні умови тієї ж задачі. ■

## Бібліографічний опис

1. *Бобик О. І.* Рівняння математичної фізики: навчальний посібник / *О. І. Бобик, І. О. Бобик, В. В. Литвин.* — Львів: Вид-во «Новий Світ–2000», 2024. — 256 с.
2. *Бондаренко В. Г.* Рівняння математичної фізики: навчальний посібник для студентів спеціальності 124 «системний аналіз» / *В. Г. Бондаренко.* — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — 100 с.  
<https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/9ec1c0f4-9651-4cf4-89be-d1089c39fe33/content>
3. *Бугрій О. М.* Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі: навчальний посібник / *О. М. Бугрій, О. М. Процах, Н. В. Бугрій.* — Львів, Видавець І. Е. Чижиков, 2011. — 348 с. — (Університетська бібліотека)
4. *Вайсфельд Н. Д.* Рівняння математичної фізики: навчально-методичний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика» / *Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут.* — Одеса: Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, 2018. — 194 с.  
<https://dspace.onu.edu.ua/bitstreams/9a14005e-36f5-4844-a54b-7ee2833d9a02/download>
5. *Курпа Л. В.* Рівняння математичної фізики: навчальний посібник / *Л. В. Курпа, Г. Б. Лінник.* — Харків: Вид-во «Підручник НТУ ХПІ», 2011. — 312 с.  
[http://web.kpi.kharkov.ua/dpm/wp-content/uploads/sites/123/2024/02/VVP4.1\\_Rivnyannya-matematichnoyi-fiziki.pdf](http://web.kpi.kharkov.ua/dpm/wp-content/uploads/sites/123/2024/02/VVP4.1_Rivnyannya-matematichnoyi-fiziki.pdf)
6. *Лопушанська Г. П.* Диференціальні рівняння та рівня математичної фізики / *Г. П. Лопушанська, О. М. Бугрій, А. О. Лопушанський.* — 2-е вид., випр. і допов. — Львів.: Видавець І. Е. Чижиков, 2017. — 372 с.
7. *Хусаїнов Д. І.* Диференціальні рівняння: Підручник / *Д. І. Хусаїнов, А. В. Шатирко.* — К.: КПЦ «Київський університет», 2023. — 413 с.