Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу і теорії функцій

Посібник з дисципліни "Задачі з параметрами"

Дніпро

2020

Даний посібник призначено для студентів спеціальності «Середня освіта (Математика)», що вивчають дисципліну «Задачі з параметрами». Посібник містить короткі теоретичні відомості, що необхідні для розв'язання задач з параметрами різних типів, приклади розв'язання характерних задач кожного типу та набір задач для самостійного розв'язання, що може бути використаний для індивідуальних завдань студентів денної та заочної форм навчання або для проведення практичних занять та контрольних робіт.

Також цей посібник може бути використаний викладачами для формування у школярів навичок розв'язання задач з параметрами та школярами для самостійного отримання практичного досвіду розв'язання задач з параметрами.

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету (протокол № 1 від 17 вересня 2019 р.)

В авторській редакції

Посібник з дисципліни
"Задачі з параметрами"

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. Р. О. Біліченко,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Т.Ю. Лескевич.

Вступ

Задачі з параметрами – це різновид математичного рівняння, нерівності або системи рівнянь та нерівностей (далі просто задачі), які окрім невідомої змінної x (в системах невідомих змінних є декілька, але для спрощення подальшого викладання будемо вважати, що маємо одну невідому x) містять ще одну змінну, яку, як правило, позначають буквою a і називають параметром. Ця змінна має особливу роль: вона може набувати будь-яких значень, але вважається відомою. У зв'язку з цим, як правило, виникає ситуація, де у випадку, коли параметр набуває деяких особливих значень (залежно від конкретної задачі) не може бути використаний загальний підхід до розв'язання (наприклад, якщо виконується ділення на вираз, що дорівнює нулю). Для того, щоб отримати відповідь, в кожному з таких випадків замість довільного значення параметра підставляють це особливе значення і розв'язують задачу, що вже містить тільки невідому змінну. Для тих значень змінної, які не є особливими, розглядають загальне розв'язання, яке дає у якості відповіді значення невідомої змінної, що є функцією від параметра при розв'язанні рівняння, або інтервал, якому належить змінна, і границі якого є функціями від параметра у випадку розв'язання нерівності. В якості відповіді в задачах з параметрами для кожного значення параметра (якщо в умові не вказано інше) подається відповідна форма розв'язку.

Задачі з параметрами можна умовно поділити на два типи. Перші, в яких треба розв'язати задачу деякого типу з тих, що вивчаються в шкільній програмі. Для розв'язання таких задач використовуються ті самі підходи, що і до розв'язання задач, які не містять параметр, за умовою окремого розгляду особливих значень. В даному посібнику наведені всі типи таких задач.

До другого типу задач з параметрами відносяться ті, в яких на невідому змінну накладають певні умови та вимагають знайти ті значення параметра, при яких такі умови виконуються. В цих задачах у відповідь писати значення самої змінної не треба, треба тільки вказати відповідні значення параметра. Як правило, в задачах такого типу не треба знаходити розв'язок, а треба використати деякий метод, який не застосовувався до розв'язання задач без параметра. До задач такого типу в даному посібнику відносяться задачі на застосування теореми Вієта та задачі на застосування властивостей квадратного тричлена. Також часто для таких задач використовується графічний метод, який в даному посібнику не відображений.

Дисципліна «Задачі з параметрами» покликана навчити студентів розв'язувати задачі з параметрами різних типів, звернути увагу на особливості, що при цьому виникають для кожного типу задач та навчити новим прийомам, що при цьому виникають. Також у студентів повинні виробитися методичні підходи до навчання школярів навичкам розв'язання задач з параметрами. Досягненню всі цих цілей сприяє даний навчальний посібник.

1. Лінійні рівняння

Будь-яке лінійне рівняння (алгебраїчне рівняння першого степеня) може бути зведено до найпростішого виду

$$ax = b$$

(1)де x – невідома величина, a та b – задані числа. В залежності від значень a та b можливі наступні випадки розв'язання рівняння (1):

1) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{b}$ – єдиний корінь рівняння;
2) якщо $a = 0$, то рівняння (1) перетвориться на рівняння

$$0 \cdot x = b,$$

для остаточного розв'язання якого треба врахувати можливі значення числа b:

a. якщо $b \neq 0$, то рівняння (1) не має коренів;
b. якщо $b = 0$, то x – будь-яке число.

Лінійним рівнянням з параметром a відносно змінної x будемо називати рівняння виду

$$f(a) \cdot x = g(a), \quad (2)$$

де $f(a)$ та $g(a)$ – функції, що залежать від a, x – невідома величина.

При розв'язання рівняння (8) треба

1) знайти такі значення a, при яких $f(a) \neq 0$, для таких значень параметра $x = \frac{g(a)}{f(a)}$ – єдиний корінь рівняння;
2) знайти такі значення a, при яких $f(a) = 0$ та встановити для цих значень параметра, чому дорівнює $g(a)$:
   1) якщо $g(a) \neq 0$, то рівняння (8) не має коренів;
   2) якщо $g(a) = 0$, то x – будь-яке число.

Зауваження: для тих a, для яких $f(a) \neq 0$ розглядати окремо випадок $g(a) = 0$ не треба, оскільки цей випадок вже враховано в пункті 1).

Приклад 1. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$a^2x - 6a = 2a^2 + 4ax$$

Розв'язання. Шляхом рівносильних перетворень зведемо задане рівняння до виду (8)

$$(a^2 - 4a)x = 2a^2 + 6a,$$

де $f(a) = a^2 - 4a = a(a - 4)$, $g(a) = 2a^2 + 6a$.

Розглянемо випадки, що призводять до різних ситуацій при пошуку розв'язку:

1) $f(a) \neq 0$, це вірно при $a(a - 4) \neq 0$ тобто при $a \neq 0$ та $a \neq 4$. Для таких значень параметра маємо розв'язок $x = \frac{2a^2+6a}{a^2-4a} = \frac{2a(a+6)}{a(a-4)} = \frac{2(a+6)}{a-4}$.

2) $f(a) = 0$, це вірно при $a(a - 4) = 0$ тобто при $a = 0$ або при $a = 4$. В цьому випадку ділити на $f(a)$ не можна, тому кожне з цих значень параметра окремо підставимо в задане рівняння.

a. При $a = 0$ рівняння перетвориться на рівняння $0 \cdot x = 0$, розв'язком якого є будь-яке число.

b. При $a = 4$ рівняння перетвориться на рівняння $0 \cdot x = 56$, яке не має коренів.

Відповідь: якщо $a \neq 0$ та $a \neq 4$, то $x = \frac{2(a+6)}{a-4}$,

якщо $a = 0$, то x – будь-яке число,

якщо $a = 4$, то рівняння немає коренів.

Задачі для самостійної роботи.

1. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

1.1. $(a+1)x = 4$
1.2. $(a^2-4)x = a-2$
1.3. $a^2x + 50 - 35x = 2a^2 - 2ax$
1.4. $a^2x - 6a = 2a^2 + 4ax$
1.5. $(2a+10)x = a^2 + a - 20$
1.6. $ax - 6 = 2a^2x + 3a$
1.7. $(a^2-5a)x = a^2 + 5a$
1.8. $ax + 4 = a^2 - 2x$
1.9. $(a^3+8)x = 6a^2 + 11a - 2$
1.10. $a^2x - 6a = 2a^2 + 4ax$
1.11. $(3a^2+2a)x = a-2$
1.12. $7ax + 2a^2 = a^2x - 4a$
1.13. $27x + 5a^2 + 3 = a^3x + 16a$
1.14. $(a+3)x = a^2 - 9$
1.15. $a^2x - 6a = 2a^2 + 4ax$
1.16. $ax - a^2 = x$
1.17. $(a^2-a-6)x = (a-3)(a+1)$
1.18. $a^2x - 6a = 2a^2 + 4ax$
1.19. $3ax - 4a = 9x + a^2 - 21$
1.20. $1 - x = a - a^2x$

2. Лінійні нерівності

При розв'язанні лінійних нерівностей з параметром виду

$$f(a) \cdot x \leq g(a),\ f(a) \cdot x < g(a),\ f(a) \cdot x \geq g(a),\ f(a) \cdot x > g(a),$$

де $f(a)$ та $g(a)$ – функції, що залежать від параметра a, x – невідома величина, треба додатково розглядати випадки, при яких $f(a)$ має різні знаки, оскільки при діленні на додатне число знак нерівності не змінюється, а при діленні на від'ємне число нерівність змінює знак на протилежний.

Наприклад, для нерівності виду

$$f(a) \cdot x < g(a)$$

Виникають наступні випадки:

1) для тих значень a, для яких $f(a) > 0$, нерівність перетворюється на

$$x < \frac{g(a)}{f(a)};$$

2) для тих значень a, для яких $f(a) < 0$, нерівність перетворюється на

$$x > \frac{g(a)}{f(a)};$$

3) для тих значень a, для яких $f(a) = 0$ отримаємо нерівність $0 < g(a)$, яка може бути або правильною або неправильною числовою нерівністю в залежності від значення $g(a)$, тоді початкова нерівність або буде правильною при будь-якому дійсному значенні x або буде мати пусту множину розв'язків відповідно.

Приклад 2. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

$$(a+3)x \geq a^2+2$$

Розв'язання. Для цього рівняння $f(a) = a+3$, $g(a) = a^2+2$.

Розглянемо випадки, що призводять до різних ситуацій при пошуку розв'язку:

1) $f(a) > 0$, це вірно при $a > -3$. Для таких значень параметра задана нерівність рівносильна нерівності $x \geq \frac{a^2+2}{a+3}$.

2) $f(a) < 0$, це вірно при $a < -3$. В цьому випадку виникає необхідність ділити на вираз, що є від'ємним, тому для таких значень параметра задана нерівність рівносильна нерівності $x \leq \frac{a^2+2}{a+3}$. Зауважимо, що при цьому знак $f(a)$ не змінюється на протилежний.

3) $f(a) = 0$, це вірно при $a = -3$. В цьому випадку задана нерівність перетворюється на $0 \geq 11$, що є хибним незалежно від значення x, тому задана нерівність не має розв'язків.

Відповідь: якщо $a < -3$, то $x \leq \frac{a^2+2}{a+3}$,
якщо $a = -3$, то немає розв'язків,
якщо $a > -3$, то $x \geq \frac{a^2+2}{a+3}$.

Задачі для самостійної роботи.

2. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

2.1. $(a+1)x < a-2$
2.2. $a(a-2)x \leq a-5$
2.3. $(a-1)x > a^2-a$
2.4. $(a^2-4)x \geq a+2$
2.5. $(a-4)(a+3)x \leq a(a+2)$
2.6. $(a-2)x \geq a^2+2a$
2.7. $ax < a^2$
2.8 $(a-3)(a+2)^3x \leq (a+2)^2$
2.9. $(a^2-9)x > a^2+9$
2.10. $(a+3)x < (a-2)(a+4)$
2.11. $(a-3)^2x > a-3$
2.12. $(a^2+7a)x \leq a^2$
2.13. $(a+1)(a-5)x < a^2-5a$
2.14. $(a+4)x \geq (a+4)(a-3)$
2.15. $(a^3+8)x > a-3$
2.16. $a(a^2+4)x \geq a+2$
2.17. $(a-10)x > a+5$
2.18. $(a-2)(a+6)x \leq a^2+1$
2.19. $(a^2-1)x < a-8$
2.20. $(a^2+3a)x \geq a^2-9$

3. Раціональні рівняння

Будь-яке раціональне рівняння шляхом зведення до спільного знаменника може бути зведено до вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \qquad (3)$$

де $P(x)$ та $Q(x)$ – многочлени змінної x, які можуть залежати від параметра.

Рівняння такого виду зручно звести до рівносильної системи

$$\begin{cases} P(x) = 0; \\ Q(x) \neq 0, \end{cases} \qquad (4)$$

яка дозволить отримати одразу залежність змінної x від параметра і необхідні обмеження на значення параметра.

Приклад 3. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$\frac{(x-1)(ax-1)}{(x-a)(x+3)}=0$$

Розв'язання. Зведемо рівняння до системи (4)

$$\begin{cases}(x-1)(ax-1)=0\\ x-a\neq 0\\ x+3\neq 0\end{cases}$$

Оскільки перше рівняння системи має два корені, то замість системи отримаємо сукупність двох систем, яку, з метою полегшення записів, будемо розглядати як два окремі випадки.

1) Перша система матиме вигляд

$$\begin{cases}x-1=0\\ x-a\neq 0\\ x+3\neq 0\end{cases}\begin{cases}x=1\\ x\neq a\\ x\neq -3\end{cases}$$

Очевидно, що при $x=1$ остання нерівність виконується автоматично. Підставивши знайдене значення $x=1$ в другу нерівність, отримаємо обмеження на значення параметра, при яких даний корінь існує.

$$\begin{cases}x=1\\ a\neq 1\end{cases}$$

Трактувати отриману систему треба наступним чином: $x=1$ є коренем при всіх значеннях параметра крім $a=1$.

2) Друга система матиме вигляд

$$\begin{cases}ax-1=0\\ x-a\neq 0\\ x+3\neq 0\end{cases}\qquad(5)$$

При розв'язання першого рівняння, яке є лінійним, ми стикаємось з необхідністю ділити на вираз, що містить параметр. Як було показано в розділі 1 нам треба розглядати два випадки.

a. Якщо $a=0$, то перше рівняння системи (5) перетворюється на $0\cdot x-1=0$, що немає розв'язків.
b. Якщо $a\neq 0$, то перше рівняння системи (5) має розв'язок $x=\frac{1}{a}$. Тоді система (5), з урахуванням умови $a\neq 0$ перетворюється на наступну систему:

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{a}\\ a\neq 0\\ \dfrac{1}{a}-a\neq 0\\ \dfrac{1}{a}+3\neq 0\end{cases}\begin{cases}x=\dfrac{1}{a}\\ a\neq 0\\ \dfrac{1-a}{a}\neq 0\\ \dfrac{1+3a}{a}\neq 0\end{cases}\begin{cases}x=\dfrac{1}{a}\\ a\neq 0\\ a\neq 1\\ a\neq -\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Остаточно ми отримали, що $x = \frac{1}{a}$ є розв'язком заданого рівняння при всіх значеннях параметра, крім $a = 0$, $a = 1$ та $a = -\frac{1}{3}$.

Поєднуючи обидва випадки, бачимо, що при $a = 1$ рівняння не має коренів.

Відповідь: якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$ та $a \neq -\frac{1}{3}$, то $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{a} \end{array}\right.$

якщо $a = 0$ та $a = -\frac{1}{3}$, то $x = 1$,

якщо $a = 1$, то рівняння не має коренів.

Приклад 4. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$\frac{1}{x^2 - ax} - \frac{1}{x^2 + ax} = \frac{a}{x^2 - a^2}$$

Розв'язання. Зведемо рівняння до вигляду (3)

$$\frac{1}{x(x-a)} - \frac{1}{x(x+a)} - \frac{a}{(x-a)(x+a)} = 0$$

$$\frac{a(2-x)}{x(x-a)(x+a)} = 0$$

Для отриманого рівняння система (4) матиме вигляд

$$\begin{cases} a(2-x) = 0 \\ x \neq 0 \\ x - a \neq 0 \\ x + a \neq 0 \end{cases}$$

Перша рівність вірна в двох випадках:

1) $a = 0$, тоді x може приймати будь-яке значення, крім $x = 0$, яке не задовольняє решту нерівностей.
2) $x = 2$, тоді друга нерівність виконується, а решта дає розв'язок разом з наступними обмеженнями на значення параметра, які виникають при підстановці значення $x = 2$ в третю та четверту нерівність

$$\begin{cases} x = 2 \\ a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{cases}$$

Відповідь: якщо $a \neq -2$, $a \neq 2$ та $a \neq 0$, то $x = 2$,

якщо $a = 0$, то x може приймати будь-яке значення, крім $x = 0$,

якщо $a = -2$ та $a = 2$ то рівняння немає коренів.

Задачі для самостійної роботи.

3. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

3.1. $\frac{x+3}{x-a} = 0$

3.2. $\frac{x-a}{x+1} = 0$

3.3. $\frac{a(x-5)}{x-a} = 0$

3.4. $\frac{(x-a)(x-2)}{x+2} = 0$

3.5. $\frac{x-6}{(x-a+1)(x+4)} = 0$

3.6. $\frac{a^2x-4}{x-1} = 0$

3.7. $\frac{x-2}{x+a}=0$

3.8. $\frac{x+a+3}{x-7}=0$

3.9. $\frac{(a-1)(x-a)}{x+4}=0$

3.10. $\frac{x+a}{(x-1)(x+5)}=0$

3.11. $\frac{(x-7)(x-2)}{x+a-1}=0$

3.12. $\frac{(x-a)(x+2)}{(x-1)(x+a)}=0$

3.13. $\frac{x^2-a^2}{x-3}=0$

3.14. $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-a)(x-a+3)}=0$

3.15. $\frac{(x+2a)(x-a)}{(x-6)(x+8)}=0$

3.16. $\frac{ax+2}{(x+4)(x-2)}=0$

3.17. $\frac{ax-9}{(x-a)(x-3)}=0$

3.18. $\frac{(x-2a)(x+4a)}{x-8}=0$

3.19. $\frac{(x-4)(x-1+a)}{a(x+6)}=0$

3.20. $\frac{(x-a)(x-2a)}{(x+a+2)(x-2)}=0$

4. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

4.1. $\frac{3}{x-a}-\frac{1}{x+a}=0$

4.2. $\frac{x+2}{x-4}=\frac{2x+a}{2x-a}$

4.3. $\frac{9x-7}{3x-2a}-\frac{4x-5}{2x-3a}=1$

4.4. $\frac{ax-1}{2x+1}=\frac{ax+1}{2x-1}+\frac{4}{1-4x^2}$

4.5. $\frac{6}{x^2+ax}-\frac{3}{x^2-ax}+\frac{10}{x^2-a^2}=0$

4.6. $\frac{3a}{x-4}-\frac{2}{x+4}=0$

4.7. $\frac{3x-5}{x-1}-\frac{2x-5a}{x-2a}=1$

4.8. $\frac{1}{x^2-6x}+\frac{a+1}{x^2+6x}=\frac{2a}{x^2-36}$

4.9. $\frac{x^2+a}{x^2-1}=\frac{x-2a}{x+1}-\frac{5}{1-x}$

4.10. $\frac{x-2a}{x+a}=\frac{2x-1}{2x+1}$

4.11. $\frac{1}{x-a}+2=\frac{2-ax}{x-a}$

4.12. $\frac{x-1}{x+2a}-\frac{x-7a}{3x+6a}=0$

4.13. $\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{2a-x}{x-2}=0$

4.14. $\frac{x+3a}{x^2+2x}-\frac{x-a}{x^2-4}=0$

4.15. $\frac{3x-a}{x+7}-\frac{3x^2-ax}{x^2-49}=0$

4.16. $\frac{7a}{x^2-9}+\frac{3x-a}{x-3}=3$

4.17. $\frac{4}{(x+a)^2}-\frac{9}{(x-a)^2}=\frac{5}{a^2-x^2}$

4.18. $\frac{4a}{x^2+4x}+\frac{x+3}{2x^2-8x}=\frac{x+10a}{2x^2-32}$

4.19. $\frac{x-6a}{8-x}-\frac{x-4}{x-8}=0$

4.20. $\frac{x+4a}{x^2+x}-\frac{x+2a}{x^2-1}=0$

4. Раціональні нерівності

Будь-яка раціональна нерівність може бути зведена до однієї з нервностей

$$\frac{P(x)}{Q(x)}<0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}\le 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}>0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}\ge 0$$

де $P(x)$ та $Q(x)$ – многочлени змінної x, які можуть залежати також від параметра.

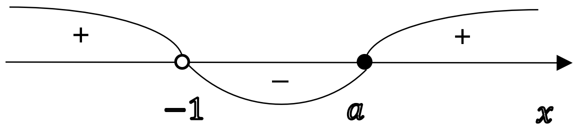
Для розв'язання нерівностей такого виду застосовується ***метод інтервалів***.

Приклад 5. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

$$\frac{x-a}{x+1}\ge 0$$

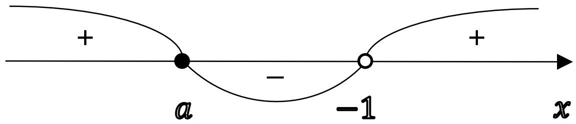
Розв'язання. Застосуємо метод інтервалів. Нуль чисельника $x = a$, нуль знаменника $x = -1$. При нанесенні нулів чисельника та знаменника на числову пряму виникає два випадка в залежності від того, яке з цих значень є більшим, тобто знаходиться правіше на числовій прямій. Розглянемо кожен випадок окремо.

1) $a > -1$, тоді



Оскільки нас цікавлять такі значення x, для яких вираз є додатним, то відповідь в цьому випадку $x \in (-\infty; -1) \cup [a; \infty)$.

2) $a < -1$, тоді



В цьому випадку відповідь буде мати наступний вигляд $x \in (-\infty; a] \cup (-1; \infty)$.

3) $a = -1$, тоді, підставивши замість a значення -1 в ліву частину нерівності, отримаємо нерівність $\frac{x+1}{x+1} \geq 0$ або при $x \neq -1$ числову нерівність $1 \geq 0$, яка є правильною для будь-якого значення змінної, окрім $x = -1$.

Відповідь: якщо $a > -1$, то $x \in (-\infty; -1) \cup [a; \infty)$,
якщо $a < -1$, то $x \in (-\infty; a] \cup (-1; \infty)$,
якщо $a = -1$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

Задачі для самостійної роботи.

5. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

5.1. $\frac{x}{x+2a} > 0$

5.2. $\frac{1}{x+2a} + \frac{1}{x} \leq 0$

5.3. $\frac{a}{x} - \frac{1}{x+1} < 0$

5.4. $\frac{x-a+1}{x+1} \geq 0$

5.5. $\frac{x+3a}{x-a} > 0$

5.6. $\frac{1}{x-2} < a$

5.7. $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} \geq 0$

5.8. $\frac{(x-3)(x+3a)}{x+1} < 0$

5.9. $\frac{x+a}{x+4} \leq \frac{x-a}{x-2}$

5.10. $\frac{x^2(x-a+2)}{x-1} > 0$

5.11. $1 - \frac{x}{x+3a} < \frac{3}{x}$

5.12. $\frac{x-1}{(x+3)(x-5a)} > 0$

5.13. $\frac{x^2-2x}{x+a+3} \geq 0$

5.14. $\frac{x-a}{x-a+1} \leq 4$

5.15. $\frac{x^2-3a}{x-a} > x$

5.16. $\frac{ax}{ax+1} - \frac{1}{ax-1} \geq 1$

5.17. $\frac{(x-5)(x-a)}{(x-a+2)^2} < 0$

5.18. $\frac{x-3a}{x+2a+3} \leq \frac{x}{x+2}$

5.19. $\frac{x^2+a}{x^2-1} > 1$

5.20. $\frac{x}{x-a} < 5$

5. Квадратні рівняння

Квадратним рівнянням є рівняння виду

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (6)$$

де a, b, c – задані числа, причому $a \neq 0$. Для розв'язання такого рівняння спочатку обчислюється дискримінант за формулою

$$D = b^2 - 4ac,$$

а потім, в залежності від отриманого значення D, обирається один з наступних випадків:

1) якщо $D \geq 0$, то рівняння (6) має корені, які обчислюються за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

2) якщо $D < 0$, то рівняння (6) не має коренів.

Зауваження. Замість випадку $D \geq 0$ можна розглядати два окремі випадки: $D > 0$ та $D = 0$, вважаючи в останньому випадку, що рівняння має єдиний корінь $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Якщо припустити, що в рівнянні (6) $a = 0$, то воно перетвориться на лінійне рівняння виду

$$bx + c = 0.$$

Коли мова йде про квадратні рівняння з параметрами, то коефіцієнти a, b, c є функціями, залежними від параметра. Тому будемо вважати, що квадратне рівняння з параметром a відносно змінної x має вигляд

$$f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0, \qquad (7)$$

де коефіцієнти $f(a), g(a), h(a)$ – функції, що залежать від a, x – невідома величина.

В цьому випадку формула для дискримінанта матиме вигляд

$$D(a) = g^2(a) - 4f(a) \cdot g(a)$$

При розв'язання рівняння (7) треба

1) Знайти такі значення a, при яких $f(a) \neq 0$, для таких значень параметра рівняння є квадратним. Для цих значень параметра треба розглянути наступні випадки:

   a. Якщо $D(a) \geq 0$, то рівняння має корені, що знаходяться за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-g(a) \pm \sqrt{D(a)}}{2f(a)}$$

   b. Якщо $D(a) < 0$, то рівняння не має коренів.

2) Знайти такі значення a, при яких $f(a) = 0$, для таких значень параметра рівняння є лінійним. Кожне отримане з цієї умови значення параметра треба підставити в рівняння (7), і розв'язати лінійне рівняння, що вже не буде залежати від параметра.

Приклад 6. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$(3a-11)x^2+(1-a)x+1=0$$

Розв'язання. Розглянемо випадки, що призводять до різних ситуацій при пошуку розв'язку:

1) Якщо $(3a-11)\neq 0$, тобто $a\neq 3\frac{2}{3}$, то рівняння є квадратним, тому для його розв'язку знайдемо вираз для дискримінанта

$$D(a)=(1-a)^2-4(3a-11)=1-2a+a^2-12a+44$$
$$=a^2-14a+45$$

Тепер розглянемо два випадки, що пов'язані з існуванням коренів.

a) Коли $D(a)\geq 0$, тобто $a^2-14a+45\geq 0$, рівняння має корені. Розв'язуючи останню нерівність методом інтервалів отримаємо: $a\in(-\infty;5]\cup[9;\infty)$. Поєднуючи отриману множину значень параметра з умовою $a\neq 3\frac{2}{3}$, остаточно отримаємо, що при $a\in(-\infty;3\frac{2}{3})\cup(3\frac{2}{3};5]\cup[9;\infty)$ рівняння має корені, що задаються формулою

$$x_{1,2}=\frac{a-1\pm\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}$$

b) Коли $D(a)<0$, тобто $a\in(5;9)$, рівняння не має коренів. Всі отримані значення задовольняють умові $a\neq 3\frac{2}{3}$, тому при $a\in(5;9)$ рівняння не має коренів.

2) Якщо $(3a-11)=0$, тобто $a=3\frac{2}{3}$, то підставимо це значення параметра в вихідне рівняння. Отримаємо

$$-\frac{8}{3}x+1=0,$$

звідки $x=\frac{3}{8}$

Відповідь: якщо $a\in(-\infty;3\frac{2}{3})\cup(3\frac{2}{3};5]\cup[9;\infty)$, то

$$x_{1,2}=\frac{a-1\pm\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)},$$

якщо $a\in(5;9)$, то рівняння не має розв'язків,

якщо $a=3\frac{2}{3}$, то $x=\frac{3}{8}$.

Задачі для самостійної роботи.

6. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

6.1. $(9a+1)x^2+(13a+1)x+4a=0$
6.2. $ax^2-(2a+1)x+2=0$
6.3. $(3-2a)x^2+(a+1)x+1=0$
6.4. $(5a-19)x^2+(a-7)x-1=0$
6.5. $a^2x^2-2ax+3=0$
6.6. $(9a+4)x^2+(6a-4)x+(a-5)=0$
6.7. $(a-3)x^2+(a+3)x-2=0$

6.8. $(25a+3)x^2+(20a+5)x+4a+1=0$
6.9. $x^2+3ax+7a^2=0$
6.10. $3ax^2+(15a+1)x+12a+1=0$
6.11. $(a-3)x^2-2ax+a+1=0$
6.12. $4ax^2+(a-4)x-1=0$
6.13. $(9a^2+a)x^2+(10a+1)x+1=0$
6.14. $x^2+(a-5)x-(4a-5)=0$
6.15. $(a+2)x^2-(10a+1)x+25a-3=0$
6.16. $a^2x^2+8ax-3=0$
6.17. $(5a+4)x^2+(a-1)x-1=0$
6.18. $10ax^2-(4a-5)x-2=0$
6.19. $(4-9a)x^2-(12a+7)x-4a-3=0$
6.20. $x^2-5ax+4a^2=0$

6. Квадратні нерівності

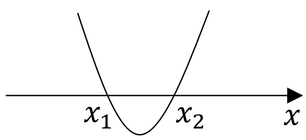
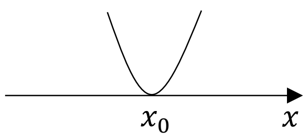
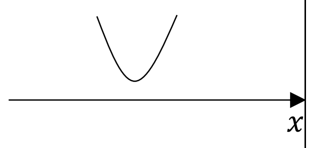
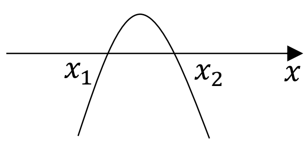
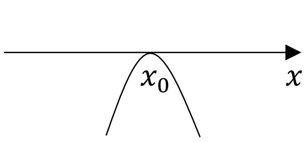
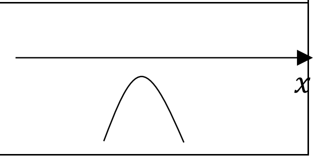
Квадратними нерівностями є нерівності виду

$$ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c\le 0,\ ax^2+bx+c\ge 0,$$

де a, b, c – задані числа, причому $a\neq 0$. Для розв'язання таких нерівностей користуються схематичним зображенням квадратичної функції $y=y(x)$, що задається формулою

$$y=ax^2+bx+c.$$

При побудові такого зображення виникають декілька випадків в залежності від знаків коефіцієнта a та дискримінанта, що обчислюється за формулою $D=b^2-4ac$. Всі можливі випадки наведені в наступній таблиці, де через x_1 та x_2 позначені корені рівняння, що обчислюються за формулою $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, а через x_0 – координата вершини параболи, що обчислюється за формулою $x_0=\frac{-b}{2a}$.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$	**1)** 	**2)** 	**3)** 
$a<0$	**4)** 	**5)** 	**6)** 

Після того, як для заданої нерівності побудовано одне з зображень квадратичної функції, задачу розв'язання квадратичної нерівності можна сформулювати наступним чином: знайти всі значення незалежної змінної x, для яких залежна змінна y має знак, який задано умовою. При цьому враховуємо, що точки графіка, що лежать вище осі Ox, задовольняють умову $y > 0$, точки графіка, що лежать нижче осі Ox, задовольняють умову $y < 0$, а точки графіка, що лежать на осі Ox, задовольняють умову $y = 0$.

Наприклад, якщо в нерівності $ax^2 + bx + c \geq 0$, виявилось, що $a > 0$ та $D > 0$, то ми маємо схематичне зображення графіка як у випадку 1), на якому обираємо всі точки графіка, що лежать не нижче осі Ox, тоді абсциси цих точок утворюють множину розв'язків нерівності $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$.

Якщо в нерівності $ax^2 + bx + c > 0$, виявилось, що $a > 0$ та $D = 0$, то зображення графіка буде як у випадку 2), тоді умова $y > 0$ буде виконуватись для всіх точок, окрім точки з абсцисою x_0, в якій $y = 0$. Отже, розв'язком нерівності буде множина $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$.

А якщо в нерівності $ax^2 + bx + c < 0$ маємо що $a < 0$ та $D < 0$, то отримаємо випадок 6), в якому всі точки графіка знаходяться нижче осі Ox, тобто умова $y < 0$ виконується для всіх значень x, тому розв'язком нерівності є множина $x \in (-\infty; \infty)$.

В квадратних нерівностях з параметром коефіцієнти a, b, c можуть залежати від параметра, тому при деяких значеннях параметра може виникнути кожен з шести випадків схематичного зображення графіка функції. Всі ці випадки треба розглянути окремо. Однак, треба враховувати, що випадки 2), 3) та 5), 6) інколи дають однакові множини розв'язків, тому можуть бути поєднані в один випадок. Наприклад, в нерівності $ax^2 + bx + c \geq 0$ випадки 2) та 3) дають однакову множину розв'язків $x \in (-\infty; \infty)$, тому можуть бути поєднані в один випадок, але для цієї нерівності випадок 5) дає розв'язок $x = x_0$, а випадок 6) дає порожню множину розв'язків, тому ці випадки для даної нерівності не можуть бути поєднані.

Наведемо рекомендовану схему міркувань при розв'язанні нерівностей з параметрами виду

$$f(a)x^2 + g(a)x + h(a) < 0, f(a)x^2 + g(a)x + h(a) > 0,$$
$$f(a)x^2 + g(a)x + h(a) \leq 0, f(a)x^2 + g(a)x + h(a) \geq 0$$

1) Знайти дискримінант $D(a) = g^2(a) - 4f(a) \cdot g(a)$ та корені $x_{1,2} = \frac{-g(a) \pm \sqrt{D(a)}}{2f(a)}$ рівняння $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0$.
2) Знайти такі значення a, при яких $f(a) > 0$, тоді гілки параболи напрямлені вгору. Далі розділити цю множину, якщо це можливо, на три частини, в кожній з яких для всіх значень параметра виконується одна з умов: $D(a) > 0$, $D(a) = 0$ або $D(a) < 0$. Ці випадки будуть відповідати схематичним зображенням графіків 1), 2) та 3) відповідно.
3) Знайти такі значення a, при яких $f(a) < 0$, тоді гілки параболи напрямлені вниз. Далі розділити цю множину, якщо це можливо, на три частини, в кожній з яких для всіх значень параметра виконується одна з умов: $D(a) > 0$, $D(a) = 0$ або $D(a) < 0$. Ці випадки будуть відповідати схематичним зображенням графіків 4), 5) та 6) відповідно.

4) Знайти такі значення a, при яких $f(a) = 0$. Всі такі значення треба підставити в вихідну нерівність і розв'язати лінійну нерівність, яка не буде містити параметра.

Приклад 7. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

$$(3a-11)x^2 + (1-a)x + 1 \le 0$$

Розв'язання. Знайдемо вираз для дискримінанту

$$D(a) = (1-a)^2 - 4(3a-11) = a^2 - 14a + 45$$

та корені $x_1 = \frac{a-1-\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}$ і $x_2 = \frac{a-1+\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}$ квадратного рівняння $(3a-11)x^2 + (1-a)x + 1 = 0$.

Розглянемо випадки, що призводять до різних ситуацій при пошуку розв'язку:

1) Якщо $(3a-11) > 0$, тобто $a > 3\frac{2}{3}$, то гілки параболи будуть напрямлені вгору.
   a. Нехай $D(a) > 0$, тобто $a^2 - 14a + 45 > 0$. Розв'язавши останню нерівність за допомогою методу інтервалів, отримаємо множину значень параметра $a \in (-\infty; 5) \cup (9; \infty)$. Поєднуючи цю множину з умовою $a > 3\frac{2}{3}$, остаточно отримаємо множину $a \in (3\frac{2}{3}; 5) \cup (9; \infty)$, що приводить до випадку 1) схематичного зображення параболи. В цьому випадку множина розв'язків заданої нерівності буде мати вигляд: $x \in (x_1; x_2)$. Треба звернути увагу, на те, що в цьому випадку $x_1 < x_2$, оскільки чисельник x_1 завжди менше чисельника x_2, і при діленні обох частин нерівності на однакове додатне число нерівність не змінюється.
   b. Нехай $D(a) = 0$, тобто $a = 5$ або $a = 9$. Обидва ці значення задовольняють умові $a > 3\frac{2}{3}$. Для кожного з цих значень отримаємо випадок 2) схематичного зображення параболи. В цьому випадку розв'язком нерівності буде єдине значення $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{a-1}{2(3a-11)}$. Підставивши в останній вираз знайдені значення параметра отримаємо, що при $a = 5$ $x = \frac{1}{2}$, а при $a = 9$ маємо $x = \frac{1}{4}$.
   c. Нарешті, нехай $D(a) < 0$, тобто $a \in (5; 9)$. Всі значення параметра з цієї множини задовольняють умові $a > 3\frac{2}{3}$. Для таких значень ми отримаємо випадок 3) схематичного зображення параболи. Розв'язків в цьому випадку нерівність не має.
2) Якщо $(3a-11) < 0$, тобто $a < 3\frac{2}{3}$, то гілки параболи будуть напрямлені вниз.

a. Нехай $D(a) > 0$, тобто $a \in (-\infty; 5) \cup (9; \infty)$. Поєднуючи цю множину з умовою $a < 3\frac{2}{3}$, остаточно отримаємо множину $a \in (-\infty; 3\frac{2}{3})$, що приводить до випадку 4) схематичного зображення параболи. В цьому випадку множина розв'язків заданої нерівності буде мати вигляд: $x \in (-\infty; x_2) \cup (x_1; \infty)$. В цьому випадку $x_1 > x_2$, оскільки чисельник x_1 менше чисельника x_2, а при діленні лівої та правої частини нерівності на однакове від'ємне число знак нерівності змінюється на протилежний.

b. Нехай $D(a) = 0$, тобто $a = 5$ або $a = 9$. Ці значення не задовольняють умові $a < 3\frac{2}{3}$, тому не існує значень параметра, при яких буде можливе зображення параболи як у випадку 5).

c. Нехай $D(a) < 0$, тобто $a \in (5; 9)$. Знову ці значення не задовольняють умові $a < 3\frac{2}{3}$, тому випадок 6) для даної нерівності також є неможливим.

3) Якщо $(3a - 11) = 0$, тобто $a = 3\frac{2}{3}$, то задана нерівність перетвориться на лінійну нерівність виду $-\frac{8}{3}x + 1 \leq 0$, розв'язком якої є множина $x \in \left[\frac{3}{8}; \infty\right)$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 3\frac{2}{3})$, то

$$x \in \left(-\infty; \frac{a-1+\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}\right) \cup \left(\frac{a-1-\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}; \infty\right),$$

якщо $a = 3\frac{2}{3}$, то $x \in \left[\frac{3}{8}; \infty\right)$,

якщо $a \in (3\frac{2}{3}; 5) \cup (9; \infty)$, то

$$x \in \left(\frac{a-1-\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}; \frac{a-1+\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}\right),$$

якщо $a = 5$, то $x = \frac{1}{2}$,

якщо $a \in (5; 9)$, то немає розв'язків,

якщо $a = 9$, то $x = \frac{1}{4}$.

Приклад 8. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність виконується для всіх значень x

$$ax^2 + (3a - 1)x + 1 - a \geq 0$$

Розв'язання. Задача знову містить квадратну нерівність, але в цьому випадку розв'язувати її не треба. Треба лише знайти ті значення параметра, що приводять до одного чи декількох випадків схематичного зображення параболи. Інші випадки при цьому розглядати не треба.

Задана нерівність буде виконуватись для всіх значень x у випадках 2) та 3) схематичного зображення параболи. Для цього необхідне одночасне виконання двох умов, які утворюють наступну систему

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ D(a) \leq 0 \end{cases}$$

Знайдемо вираз для дискримінанту

$$D(a) = (3a-1)^2 - 4a(1-a) = 9a^2 - 6a + 1 - 4a + 4a^2 = 13a^2 - 10a + 1$$

Тоді система перетворюється на

$$\begin{cases} a > 0 \\ 13a^2 - 10a + 1 \leq 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи останню квадратну нерівність за наведеною раніше схемою, отримаємо множину $a \in \left[\frac{5-2\sqrt{3}}{13}; \frac{5+2\sqrt{3}}{13}\right]$. Оскільки всі отримані значення задовольняють першу нерівність системи, то отримана множина є також і розв'язком системи.

Відповідь: $a \in \left[\frac{5-2\sqrt{3}}{13}; \frac{5+2\sqrt{3}}{13}\right]$.

Задачі для самостійної роботи.

7. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

7.1. $(5a-19)x^2 + (a-7)x - 1 \leq 0$
7.2. $(25a+3)x^2 + (20a+5)x + 4a + 1 < 0$
7.3. $(5a+1)x^2 + (a+5)x + 1 \geq 0$
7.4. $(9a+4)x^2 + (6a-4)x + (a-5) \leq 0$
7.5. $(7a+5)x^2 - (14a+3)x + 7a - 3 > 0$
7.6. $(3-2a)x^2 + (a+1)x + 1 < 0$
7.7. $(2a+9)x^2 + (a+3)x - 1 > 0$
7.8. $(a-3)x^2 + (a+3)x - 2 \geq 0$
7.9. $(2-3a)x^2 + (6a-1)x - (3a+5) \leq 0$
7.10. $(5a+4)x^2 + (a-1)x - 1 < 0$
7.11. $(a+9)x^2 + (a+1)x + a + 9 > 0$
7.12. $(2a+5)x^2 - (8a+7)x + 8a - 1 \leq 0$
7.13. $(7a+13)x^2 + (a-5)x - 1 \geq 0$
7.14. $(a-3)x^2 - 2ax + a + 1 < 0$
7.15. $(2a+1)x^2 + (4a+2)x + 2a - 3 > 0$
7.16. $(4a-5)x^2 + (a-5)x - 1 < 0$
7.17. $(3a-10)x^2 + (a-1)x - 1 \geq 0$
7.18. $(4-9a)x^2 - (12a+7)x - 4a - 3 \leq 0$
7.19. $(4a+2)x^2 - (16a-3)x + 16a > 0$
7.20. $(a+2)x^2 - (10a+1)x + 25a - 3 < 0$

8. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність виконується для всіх значень x

8.1. $(a+1)x^2 + 2ax - 3a + 2 \leq 0$

8.2. $2ax^2 - x + 5a + 1 \leq 0$
8.3. $(3a + 1)x^2 + (a - 1)x - 2a + 3 \leq 0$
8.4. $(2 - a)x^2 + (a - 2)x + a + 4 \leq 0$
8.5. $(a + 3)x^2 + (a - 2)x + 2a + 3 \leq 0$
8.6. $(2a - 1)x^2 + (2 - a)x + a - 4 \leq 0$
8.7. $(a - 3)x^2 + ax + a - 2 \leq 0$
8.8. $(3 - 2a)x^2 + (2a - 1)x + 2a \geq 0$
8.9. $(3 - 2a)x^2 + (2a - 1)x + 2a \leq 0$
8.10. $(a + 1)x^2 + (2 - a)x + a - 3 \leq 0$

8. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність не має розв'язків

8.11. $(a - 1)x^2 + (2 - a)x + a + 1 \leq 0$
8.12. $(2a + 3)x^2 + 4ax - a \leq 0$
8.13. $(1 - 2a)x^2 - (a + 2)x + 3 - a \leq 0$
8.14. $(3a + 1)x^2 - (a + 2)x - (a + 1) \leq 0$
8.15. $(a - 4)x^2 - (a + 1)x + a - 1 \leq 0$
8.16. $(a + 1)x^2 + (2a + 1)x + 3a \leq 0$
8.17. $(a - 4)x^2 + 3ax + a - 2 \leq 0$
8.18. $(a + 3)x^2 - 5x + 2a - 1 \leq 0$
8.19. $(2a + 3)x^2 + (a + 2)x - a \leq 0$
8.20. $(a - 4)x^2 - ax + 2a - 1 \leq 0$

7.Застосування теореми Вієта до розв'язання задач з параметрами

Теорема Вієта: якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені x_1 та x_2, то виконуються наступні співвідношення:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases} \quad (8)$$

Зауваження 1: теорема Вієта не гарантує існування коренів, тому перед її застосуванням в задачах з параметрами треба забезпечити виконання умови $D \geq 0$.

Зауваження 2: теорема Вієта застосовується тільки до зведеного рівняння, тобто такого, в якому коефіцієнт при x^2 дорівнює 1. Якщо це не так, треба поділити на цей коефіцієнт ліву та праву частину рівняння, для тих значень параметра, для яких цей коефіцієнт не дорівнює нулю. Окремо розглянути задачу для тих значень параметра, коли коефіцієнт при x^2 дорівнює нулю.

Зауваження 3: у випадку, коли $D = 0$ будемо вважати, що рівняння має два рівні корені.

Теорема Вієта в задачах з параметрами використовується тоді, коли треба шукати значення параметра, при яких корені задовольняють деяким умовам.

Хоча в цьому випадку можна було б знаходити корені і накладати на них додаткові умови, однак такий спосіб буде вимагати набагато більше зусиль.

Одна з тих умов на корені, при якій максимально зручно використовувати теорему Вієта, це умова на знаки коренів. Наведемо всі можливі випадки.

1) Обидва корені мають додатні знаки, якщо виконуються наступні умови
$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} D \geq 0 \\ -p > 0 \\ q > 0 \end{cases}$$
2) Обидва корені мають від'ємні знаки, якщо виконуються наступні умови
$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} D \geq 0 \\ -p < 0 \\ q > 0 \end{cases}$$
3) Корені мають різні знаки, якщо виконуються умови
$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} D \geq 0 \\ p < 0 \end{cases}$$

Приклад 9. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння додатні
$$(a-1)x^2 + (2a+3)x + 3a - 2 = 0$$
Розв'язання. Для того, щоб мати змогу застосувати теорему Вієта, треба розглянути переконатися, що рівняння є квадратним.

1) Нехай $a - 1 \neq 0$, тобто $a \neq 1$. В цьому випадку рівняння є квадратним, тому можна обчислити його дискримінант і зробити його зведеним.
$$D(a) = (2a+3)^2 - 4(a-1)(3a-2) = -8a^2 + 32a + 1$$
Зведене рівняння матиме вигляд
$$x^2 + \frac{2a+3}{a-1}x + \frac{3a-2}{a-1} = 0$$
Для того, щоб виконувалася умова задачі, потрібне виконання системи
$$\begin{cases} a \neq 1 \\ D \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} a \neq 1 \\ -8a^2 + 32a + 1 \geq 0 \\ -\frac{2a+3}{a-1} > 0 \\ \frac{3a-2}{a-1} > 0 \end{cases}$$
Кожну нерівність системи будемо розв'язувати методом інтервалів і отримаємо наступну систему множин
$$\begin{cases} a \neq 1 \\ a \in \left(\frac{8-\sqrt{66}}{4}; \frac{8+\sqrt{66}}{4}\right) \\ a \in \left(-\frac{3}{2}; 1\right) \\ a \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; \infty) \end{cases}$$

Результатом перетину отриманих множин буде множина $a \in \left(\frac{8-\sqrt{66}}{4}; \frac{2}{3}\right)$.

2) Нехай $a-1=0$, тобто $a=1$. В цьому випадку задане рівняння перетвориться на рівняння $5x+1=0$, розв'язок якого $x=-\frac{1}{5}$ не є додатним, тому $a=1$ не задовольняє умову задачі.

Відповідь: $a \in \left(\frac{8-\sqrt{66}}{4}; \frac{2}{3}\right)$.

Розглянемо ще дві характерні задачі, в яких зручно застосовувати теорему Вієта.

Приклад 10.1. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2+ax+a+2=0$$

дорівнює 4.

Розв'язання. Оскільки рівняння в даному випадку є зведеним, одразу можна застосовувати теорему Вієта. Крім того, за умовою ми знаємо, що $x_1^2+x_2^2=4$. Отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} D(a) \geq 0 \\ x_1+x_2=-a \\ x_1 \cdot x_2=a+2 \\ x_1^2+x_2^2=4 \end{cases}$$

При розв'язанні системи важливим є те, що знаходити корені x_1 та x_2 не потрібно. З цієї системи треба знайти тільки значення параметра. Для цього слід перетворити останнє рівняння так, щоб в нього можна було підставити замість суми та добутку коренів відповідні значення, залежні від параметра. Перетворимо суму квадратів на квадрат суми

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

Тепер система перетвориться на

$$\begin{cases} a^2-4a-8 \geq 0 \\ x_1+x_2=-a \\ x_1 \cdot x_2=a+2 \\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4 \end{cases}$$

Підставимо праві частини другого та третього рівняння в останнє і отримаємо наступну систему відносно параметра

$$\begin{cases} a^2-4a-8 \geq 0 \\ (-a)^2-2(a+2)=4 \end{cases} \text{або} \begin{cases} a^2-4a-8 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Першу нерівність системи можна розв'язати методом інтервалів, але можна просто підставити отримані значення параметра в нерівність. Якщо отримана числова нерівність виявиться правильною, то таке значення параметра є розв'язком системи. В нашому випадку розв'язком системи є тільки значення $a=-2$.

Відповідь: $a=-2$.

Приклад 10.2. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2+(a-1)x+2a^2=0$$

в два рази більше ніж інший.

Розв'язання. Оскільки рівняння в даному випадку є зведеним, одразу можна застосовувати теорему Вієта. Крім того, за умовою ми знаємо, що $x_1=2x_2$. Отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} D(a)\geq 0 \\ x_1+x_2=-(a-1) \\ x_1\cdot x_2=2a^2 \\ x_1=2x_2 \end{cases}$$

Знову з цієї системи треба знайти тільки значення параметра, тому спочатку звільнимся від x_1 за допомогою останньої рівності, а потім виразимо x_2 з другої рівності. Отримаємо

$$\begin{cases} a^2-6a-1\geq 0 \\ 3x_2=-(a-1) \\ 2x_2^2=2a^2 \\ x_1=2x_2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a^2-6a-1\geq 0 \\ x_2=\frac{1-a}{3} \\ 2\left(\frac{1-a}{3}\right)^2=2a^2 \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} a^2-6a-1\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a=\frac{1}{4} \\ a=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

З двох отриманих значень параметра тільки друге задовольняє нерівність системи, тому остаточнім розв'язком системи буде $a=-\frac{1}{2}$.

Відповідь: $a=-\frac{1}{2}$.

Задачі для самостійної роботи.

9. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння додатні

9.1. $(a+3)x^2+ax-a-2=0$

9.2. $(a+2)x^2-(2a-1)x+a-4=0$

9.3. $(2a-3)x^2+2ax-1=0$

9.4. $(a^2-3a+2)x^2+(a-1)x-2=0$

9.5. $(a+1)x^2+(a+3)x+a+1=0$

9.6. $(a-3)x^2+(3a+1)x+a-3=0$

9.7. $(a-17)x^2+(3a+5)x+a-2=0$

9.8. $(a-2)x^2+(4a+2)x+a-2=0$

9. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння мають різні знаки

9.9. $(a-3)x^2+2ax-a-2=0$

9.10. $x^2-2(a-1)x+a-3=0$

9.11. $(a-5)x^2+(a-5)x+1=0$

9.12. $-x^2+(a+5)x+a^2+a-4=0$

9.13. $(a-2)x^2+(3a+1)x+a-5=0$

9.14. $(a-1)x^2+(4a+3)x+a-13=0$

9. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння від'ємні

9.15. $(a^2-1)x^2+2(a-2)x+1=0$

9.16. $(2a+3)x^2+4(a+4)x+2a-3=0$

9.17. $(a-3)x^2-4x-a-2=0$

9.18. $(a-1)x^2+3ax+5a=0$

9.19. $(a+3)x^2+(a+3)x+a=0$

9.20. $(a-2)x^2+(a+3)x+a-5=0$

10.1. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2-(2a-1)x+a-2=0$$

дорівнює 1.

10.2. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2+(3a-1)x+8(a+4)^2=0$$

в два рази більше ніж інший.

10.3. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$(a-1)x^2-2ax-4=0$$

дорівнює 4.

10.4. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2+(5-4a)x+3(3a+1)^2=0$$

в три рази більше ніж інший.

10.5. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2+(a+3)x+5a-2=0$$

дорівнює 10.

10.6. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2+(3a-7)x+(12a+4)^2=0$$

в чотири рази більше ніж інший.

10.7. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$(2-a)x^2-(3a-2)x-4=0$$

дорівнює 9.

10.8. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2+(7a+9)x+2(a-5)^2=0$$

в два рази більше ніж інший.

10.9. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2-(3-a)x-(4a+3)=0$$

дорівнює 12.

10.10. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$(a-1)^2x^2-(a-1)x+2(4a-7)^2=0$$

в два рази більше ніж інший.

10.11. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2-(2a-5)x+2a^2+3=0$$

дорівнює 5.

10.12. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2-(11a-8)x+12(5a+2)^2=0$$

в три рази більше ніж інший.

10.13. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$(a-4)x^2-3ax+2a^2+5=0$$

дорівнює 9.

10.14. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2+(2a+3)x+18(4-3a)^2=0$$

в два рази більше ніж інший.

10.15. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2+(11-7a)x+4a-3=0$$

дорівнює 14.

10.16. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2-2(a-5)x+3(7a-4)^2=0$$

в три рази більше ніж інший.

10.17. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$(2a-5)x^2-2(a-3)x+10=0$$

дорівнює 1.

10.18. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2+(3-11a)x+4(a+9)^2=0$$

в чотири рази більше ніж інший.

10.19. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2+(4a-7)x+2-5a=0$$

дорівнює 15.

10.20. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2-(5a+8)x+2(2a-9)^2=0$$

в два рази більше ніж інший.

8. Застосування властивостей квадратного тричлена до розв'язання задач з параметрами

В даному розділі будемо розглядати задачі, в яких треба знайти всі значення параметра, при яких розв'язки x_1, x_2 квадратного рівняння

$$m(a)x^2+n(a)x+p(a)=0$$

задовольняють деяку умову. Серед найбільш поширених умов, яким можуть задовольняти корені, наведемо наступні:

а) $x_1 \in (a, b), x_2 \in (a, b)$
б) $x_1 > a, x_2 > a$
в) $x_1 < a, x_2 < a$
г) $x_1 < a, x_2 > a$.

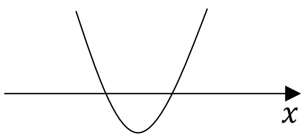
Особливість задач даного виду в тому, що для пошуку необхідних значень параметра **не треба знаходити розв'язки квадратного рівняння**. В цьому випадку використовується **графічний метод**, що заснований на тому, що кожна парабола має проміжок зростання та спадання, кожний з яких містить рівно один корінь рівняння (у випадку існування двох різних коренів). Наведемо етапи застосування графічного методу:

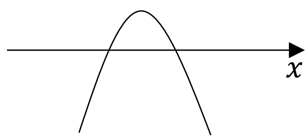
1) Розглянемо випадок $m(a) = 0$. Для кожного зі значень параметра, що задовольняє цю умову, знайдемо розв'язок рівняння. Якщо цей розв'язок задовольняє умові задачі, то відповідне значення параметра є частиною відповіді.
2) Для випадку $m(a) \neq 0$ визначимо функцію

$$f(x) = m(a)x^2 + n(a)x + p(a),$$

що задається лівою частиною рівняння.

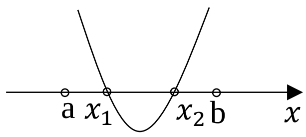
3) Схематично зобразимо графік параболи $y = f(x)$, що має корені

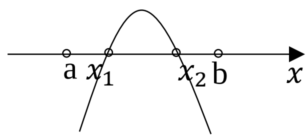




якщо $m(a) > 0$ або якщо $m(a) < 0$

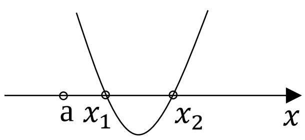
4) На осі Ox треба зобразити корені рівняння x_1, x_2 (точки перетину графіку параболи $y = f(x)$ з віссю Ox) та кінці інтервалу (a, b) або значення a, з яким порівнюються корені з урахуванням їх взаємного розташування відповідно до умови задачі
   а) якщо $x_1 \in (a, b), x_2 \in (a, b)$, то

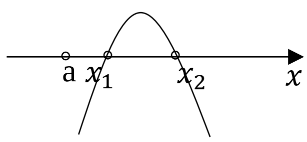




якщо $m(a) > 0$ або якщо $m(a) < 0$

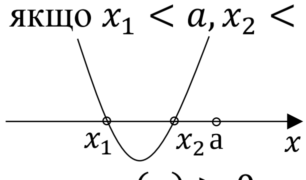
   б) якщо $x_1 > a, x_2 > a$, то

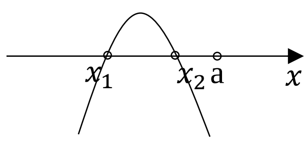




якщо $m(a) > 0$ або якщо $m(a) < 0$

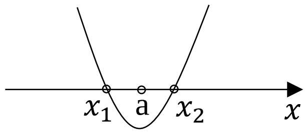
   в) якщо $x_1 < a, x_2 < a$, то

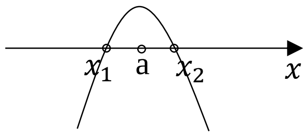




якщо $m(a) > 0$ або якщо $m(a) < 0$

г) якщо $x_1 < a, x_2 > a$, то





якщо $m(a) > 0$ або якщо $m(a) < 0$

5) Треба скласти систему умов, яким повинні задовольняти параметри параболи
$$f(x) = m(a)x^2 + n(a)x + p(a),$$
щоб вона відповідала побудованому схематичному зображенню. Далі будуть наведені всі можливі типи умов, що утворюють таку систему.
   а) Умова на напрям гілок параболи. Якщо коефіцієнт $m(a)$ залежить від параметра і може змінювати знак, то парабола схематично може бути зображена з гілками вгору або вниз. Для кожного з цих зображень треба складати свою систему умов, і у відповідь брати сукупність розв'язків кожної системи. Перша з цих умов буде $m(a) > 0$, якщо гілки параболи напрямлені вгору або $m(a) < 0$, якщо гілки параболи напрямлені вниз.
   б) Умови на знак функції в кінцях інтервалу (a, b) або в точці значення a, з якою порівнюються корені. Відповідно до схематичного зображення визначаємо знак виразів $f(a)$ та $f(b)$. Якщо точка на параболі, що відповідає значенню аргумента a або b лежить вище осі Ox, то відповідне значення $f(a)$ та $f(b)$ є додатнім, і навпаки, якщо точка на параболі, що відповідає значенню аргумента a або b лежить нижче осі Ox, то відповідне значення $f(a)$ та $f(b)$ є від'ємним.
   в) Умова на наявність коренів: $D(a) > 0$, де $D(a) = n^2(a) - 4m(a) \cdot p(a)$.
   г) Умова на розміщення вершини параболи. Цей пункт є необхідним лише у випадках умов на корені пунктів а),б) та в), коли корені задовольняють умову одного типу, що призводить до того, що абсциса вершини параболи також задовольняє відповідну умову, оскільки знаходиться між коренями. Абсциса вершини параболи знаходиться за формулою $x_в = -\frac{n(a)}{2m(a)}$, отже вираз $-\frac{n(a)}{2m(a)}$ повинен задовольняти ту ж саму умову, що і корені.
6) Розв'язуємо систему нерівностей, що складається з усіх умов пункту 5). Розв'язок системи або сукупності відповідних систем і буде відповіддю задачі.

Зауваження 1: при схематичній побудові параболи $y = f(x)$ на координатній площині Oxy вісь Oy не зображується, оскільки немає необхідності слідкувати за знаками аргументів функції $y = f(x)$, але наявність осі Oy мається на увазі, тобто ордината всіх точок графіку, що лежать вище осі Ox є додатною, а нижче – від'ємною.

Зауваження 2: при складанні системи в пункті 5) не обов'язково використовувати всі типи умов. Для деяких схематичних зображень умов може бути менше, оскільки деякі з них виконуватимуться автоматично.

Зауваження 3: умова $D(a) > 0$ може бути замінена на умову $D(a) \geq 0$, якщо в умові задачі на сказано, що корені є різними, та якщо корені задовольняють умову одного типу.

Зауваження 4: при виконанні системи умов

$$\begin{cases} m(a) > 0 \\ f(\tilde{x}) < 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} m(a) < 0 \\ f(\tilde{x}) > 0 \end{cases}$$

де $\tilde{x}$ – довільне значення аргументу, рівняння $m(a)x^2 + n(a)x + p(a) = 0$ має корені, тому умова $D(a) > 0$ виконується автоматично і вимагати виконання цієї умови окремо немає потреби.

Зауваження 5: знехтувати умовою г) на розміщення вершини параболи у випадку, коли корені рівняння задовольняють умову одного типу не можна, оскільки обмеження пунктів а)-в) є однаковими для всіх типів умов а), б) та в), тому не дають змогу обрати один з цих випадків, але обмеження пункту г) буде різним для кожного випадку.

Приклад 11.1. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

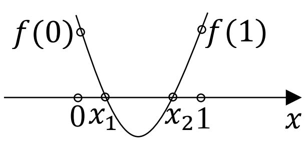
$$(a-1)x^2 + (a-2)x + a + 3 = 0$$

належать проміжку $(0; 1)$.

Розв'язання. 1) Розглянемо випадок, коли коефіцієнт при x^2 дорівнює нулю: $a - 1 = 0$. Підставимо в рівняння $a = 1$ і отримаємо розв'язок $x = 4$, що не належить проміжку $(0; 1)$. Отже значення параметра $a = 1$ не входить до множини розв'язків.

2) При $a \neq 1$ означимо функцію $f(x) = (a-1)x^2 + (a-2)x + a + 3$. Оскільки коефіцієнт при x^2 може змінювати знак при різних значеннях параметра, то розглянемо два випадки.

а) Гілки параболи напрямлені вгору, тоді схематичний графік функції $y = f(x)$ з урахуванням умови на корені має наступний вигляд



Система умов, що описує необхідне зображення параболи має вигляд

$$\begin{cases} a - 1 > 0, \text{умова на напрям гілок параболи} \\ f(0) > 0, \text{умова на знак функції в кінцях інтервалу} \\ f(1) > 0, \text{умова на знак функції в кінцях інтервалу} \\ D(a) \geq 0, \text{умова на наявність коренів} \\ 0 < x_в < 1, \text{умова на розміщення вершини параболи} \end{cases}$$

Підставимо замість кожної з умов відповідні вирази, залежні від параметра

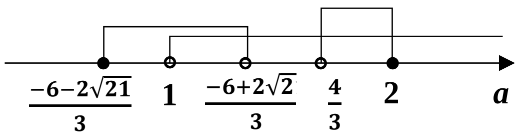
$$\begin{cases} a-1>0 \\ a+3>0 \\ 3a>0 \\ -3a^2-12a+16\geq 0 \\ 0<-\dfrac{(a-2)}{2(a-1)}<1 \end{cases}$$

Розв’язок системи перших трьох нерівностей системи дає множину $a \in (1;\infty)$. Четверта нерівність має розв’язок $a \in \left[\frac{-6-2\sqrt{21}}{3};\frac{-6+2\sqrt{21}}{3}\right]$. Остання подвійна нерівність зводиться до системи

$$\begin{cases} -\frac{a-2}{2(a-1)}>0 \\ -\frac{a-2}{2(a-1)}<1 \end{cases} \text{або} \begin{cases} \frac{a-2}{a-1}<0 \\ \frac{3a-4}{a-1}>0 \end{cases}$$

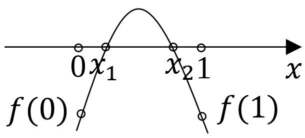
Розв’язуючи кожну нерівність методом інтервалів, отримаємо відповідно дві множини $a \in (1;2)$ та $a \in (-\infty;1) \cup \left(\frac{4}{3};\infty\right)$, звідки остаточний розв’язок подвійної нерівності матиме вигляд $a \in \left(\frac{4}{3};2\right)$.

Залишилось знайти спільну частину для трьох отриманих множин. Зобразимо їх на числовій прямій.



Оскільки зображені множини не мають спільної частини, то не існує значень параметра, які задовольняють отриману систему.

б) Гілки параболи направлені вниз, тоді схематичний графік функції $y = f(x)$ з урахуванням умови на корені має наступний вигляд



Система умов, що описує необхідне зображення параболи має вигляд

$$\begin{cases} a-1<0, \text{умова на напрям гілок параболи} \\ f(0)<0, \text{умова на знак функції в кінцях інтервалу} \\ f(1)<0, \text{умова на знак функції в кінцях інтервалу} \\ D(a)\geq 0, \text{умова на наявність коренів} \\ 0<x_{\text{в}}<1, \text{умова на розміщення вершини параболи} \end{cases}$$

Підставимо замість кожної з умов відповідні вирази, залежні від параметра

$$\begin{cases} a-1<0 \\ a+3<0 \\ 3a<0 \\ -3a^2-12a+16\geq 0 \\ 0<-\dfrac{(a-2)}{2(a-1)}<1 \end{cases}$$

Розв’язок системи перших трьох нерівностей системи дає множину $a\in(-\infty;-3)$. Четверта та п’ята нерівності не змінилися порівняно з попереднім випадком, тому дають ту ж саму множину розв’язків. Очевидно, що отримана система не має розв’язків, оскільки множини $a\in(-\infty;-3)$ та $a\in\left(\frac{4}{3};2\right)$ не мають спільної частини.

Відповідь: немає розв’язків.

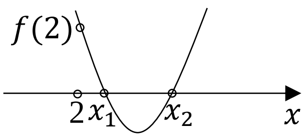
Приклад 11.2. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$a^2x^2+(2a-1)x+3=0$$

більше 2.

Розв’язання. 1) Розглянемо випадок, коли коефіцієнт при x^2 дорівнює нулю: $a^2=0$. Підставимо в рівняння $a=0$ і отримаємо розв’язок $x=3$, що задовольняє умову задачі. Отже значення параметра $a=0$ входить до множини розв’язків.

2) При $a\neq 0$ означимо функцію $f(x)=a^2x^2+(2a-1)x+3$. Оскільки коефіцієнт при x^2 не може змінювати знак при різних значеннях параметра, то маємо єдиний випадок схематичного зображення функції $y=f(x)$.



Система умов, що описує необхідне зображення параболи має вигляд

$$\begin{cases} f(2)>0, \text{умова на знак функції в кінцях інтервалу} \\ D(a)\geq 0, \text{умова на наявність коренів} \\ x_{в}>2, \text{умова на розміщення вершини параболи} \end{cases}$$

Підставимо замість кожної з умов відповідні вирази, залежні від параметра

$$\begin{cases} 4a^2+4a+1>0 \\ -8a^2-4a+1\geq 0 \\ -\frac{2a-1}{2a^2}>2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} (2a+1)^2>0 \\ -8a^2-4a+1\geq 0 \\ \frac{4a^2+2a-1}{a^2}<0 \end{cases}$$

Розв’язавши окремо кожну нерівність, отримаємо систему множин відповідних розв’язків

$$\begin{cases} a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \infty\right) \\ a \in \left[\frac{-1-\sqrt{3}}{4}; \frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right] \\ a \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}; 0\right) \cup \left(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) \end{cases}$$

Множина, що є розв'язком останньої системи має вигляд $a \in \left[\frac{-1-\sqrt{3}}{4}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right]$. Додавши до отриманої множини значення $a = 0$, отримане раніше, маємо остаточну відповідь.

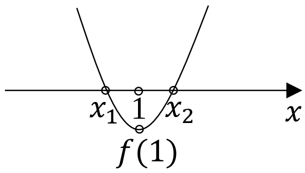
Відповідь: $a \in \left[\frac{-1-\sqrt{3}}{4}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right]$.

Приклад 11.3. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння

$$x^2 + (a+5)x - 4 = 0$$

менше 1, а інший більше 1.

Розв'язання. Означимо функцію $f(x) = x^2 + (a+5)x - 4$. Це парабола, гілки якої напрямлені вгору.



При складанні системи умов, що описує отримане зображення параболи, умову на гілки параболи накладати не треба, умова на знак функції в кінцях інтервалу матиме вигляд $f(1) < 0$, умову на наявність коренів можна не накладати (дивись зауваження 4), умова на вершину параболи також не потрібна (корені задовольняють умови різного типу). Отже, в даному випадку система умов перетворюється на одну нерівність

$$f(1) < 0 \text{ або } a < -2.$$

Відповідь: $a < -2$.

Задачі для самостійної роботи.

11.1. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння

$$(a-2)x^2 + 2(3a+7)x - 5a = 0$$

менше 2, а інший більше 2.

11.2. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$x^2 + (a-2)x + a + 3 = 0$$

належать проміжку $(0; 1)$.

11.3. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$a^2x^2 + (2a-1)x + 3 = 0$$

більше 2.
11.4. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння
$$x^2-(2a-13)x+4a-6=0$$
менше -1, а інший більше 0.
11.5.Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння
$$(a-1)x^2+(a-2)x+a+3=0$$
належать проміжку $(0;1)$.

11.7. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння
$$(3-2a)x^2-(11a+4)x+3a-2=0$$
менше 3, а інший більше 3.
11.8. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння
$$(a-1)x^2+(a-2)x+a+3=0$$
належать проміжку $(0;1)$.

11.10. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння
$$x^2+(5a-6)x-7+4a=0$$
менше -2, а інший більше 2.
11.11. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння
$$(a-1)x^2+(a-2)x+a+3=0$$
належать проміжку $(0;1)$.

11.13. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння
$$x^2-2(a+4)x+5a+2=0$$
менше 1, а інший більше 3.
11.14. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння
$$(a-1)x^2+(a-2)x+a+3=0$$
належать проміжку $(0;1)$.

11.16. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння
$$(a-4)x^2+(8a-5)x-3a-7=0$$
менше -2, а інший більше -2.
11.17. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння
$$(a-1)x^2+(a-2)x+a+3=0$$
належать проміжку $(0;1)$.

11.19. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння
$$(5-a)x^2-5(2a-7)x+a-2=0$$
менше 1, а інший більше 1.
11.20. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння
$$(a-1)x^2+(a-2)x+a+3=0$$
належать проміжку $(0;1)$.

9. Рівняння, що містять знак модуля

Розглянемо рівняння виду

$$|f(x)| = g(x).$$

При розв'язанні рівняння такого виду треба перейти до еквівалентної сукупності двох систем. Існує два способи це зробити.

Спосіб 1:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}\end{array}\right.$$

Спосіб 2:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}\end{array}\right.$$

При виборі способу розв'язання конкретного рівняння треба звертати увагу на те, яку з нерівностей легше розв'язувати: $f(x) \geq 0$ або $g(x) \geq 0$.

Приклад 12. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$|x + a| = ax + 4$$

Розв'язання. Скористаємось способом 1 переходу до еквівалентної сукупності систем, але для зручності запису будемо розглядати кожну систему як окремий випадок, а до відповіді включимо об'єднання отриманих в кожному випадку множин.

1) Перша система матиме наступний вигляд

$$\begin{cases} x + a \geq 0 \\ x + a = ax + 4 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x + a \geq 0 \\ (a - 1)x = a - 4 \end{cases}$$

Друге рівняння системи при $a = 1$ не має розв'язків, а при $a \neq 1$ маємо $x = \frac{a-4}{a-1}$. Тоді перша нерівність системи при підстановці замість змінної виразу, залежного від параметра, дає наступну умову на параметр

$$\frac{a-4}{a-1} + a \geq 0 \text{ або } \frac{(a-2)(a+2)}{a-1} \geq 0$$

звідки методом інтервалів $a \in [-2; 1) \cup [2; \infty)$. Отже при $a \in [-2; 1) \cup [2; \infty)$ маємо розв'язок $x = \frac{a-4}{a-1}$. При інших значеннях параметра перший випадок не дає розв'язку.

2) Друга система матиме наступний вигляд

$$\begin{cases} x + a < 0 \\ -x - a = ax + 4 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x + a < 0 \\ (a + 1)x = -a - 4 \end{cases}$$

Друге рівняння системи при $a = -1$ не має розв'язків, а при $a \neq -1$ маємо $x = \frac{-a-4}{a+1}$. Тоді перша нерівність системи при підстановці замість змінної виразу, залежного від параметра, дає наступну умову на параметр

$$\frac{-a-4}{a+1} + a < 0 \text{ або } \frac{(a-2)(a+2)}{a+1} < 0$$

звідки по методу інтервалів $a \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$. Отже при $a \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$ маємо розв'язок $x = \frac{-a-4}{a+1}$. При інших значеннях параметра другий випадок не дає розв'язку.

Поєднуючи результати обох випадків, при різних значеннях параметра отримаємо три можливості: маємо лише перший корінь, маємо лише другий корінь та маємо обидва корені одночасно.

Відповідь: якщо $a \in [-2; -1] \cup [2; \infty)$, то $x = \frac{a-4}{a-1}$,

якщо $a \in (-\infty; -2) \cup [1; 2)$, то $x = \frac{-a-4}{a+1}$,

якщо $a \in (-1; 1)$, то $\left[\begin{array}{l} x = \frac{a-4}{a-1} \\ x = \frac{-a-4}{a+1} \end{array}\right.$.

Розглянемо рівняння, в якому наявні декілька виразів під знаком модуля. В цьому випадку використовують метод інтервалів, що дозволяє швидко визначити умови, за яких знак кожного виразу під знаком модуля є сталим і відомим.

Приклад 13. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$|x-1| + |x-a| = x$$

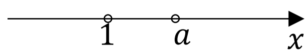
Розв'язання. Вирази під знаками модуля змінюють знак при $x = 1$ та $x = a$, розглянемо три можливих випадки співвідношення цих значень.

1) $a = 1$. Підставимо відповідне значення параметра і отримаємо рівняння

$$2|x-1| = x,$$

розв'язками якого будуть $x = 2$ та $x = \frac{2}{3}$.

2) $a > 1$. В цьому випадку, розміщуючи значення $x = 1$ та $x = a$ на числовій прямій, отримаємо наступне зображення



Таким чином числова пряма виявляється розбитою на три множини: $(-\infty; 1)$, $(1; a)$ та $(a; \infty)$, на кожній з яких обидва модулі рівняння мають фіксований знак. Наведемо таблицю, в який вказані відповідні знаки.

	$(-\infty; 1)$	$(1; a)$	$(a; \infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-a$	$-$	$-$	$+$

Отже, для того, щоб розкрити модулі в рівнянні, треба розглянути три випадки.

а) $x \in (-\infty; 1)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$-(x-1) - (x-a) = x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a > 1 \\ x < 1 \\ -2x + a + 1 = x \end{cases} \text{або} \begin{cases} a > 1 \\ x < 1 \\ x = \frac{a+1}{3} \end{cases}$$

Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a > 1 \\ \frac{a+1}{3} < 1 \\ x = \frac{a+1}{3} \end{cases} \text{або} \begin{cases} a > 1 \\ a < 2 \\ x = \frac{a+1}{3} \end{cases}$$

Тобто при $a \in (1; 2)$ маємо розв'язок $x = \frac{a+1}{3}$.

б) $x \in [1; a)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$(x-1) - (x-a) = x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a > 1 \\ 1 \le x < a \\ x = a - 1 \end{cases}$$

Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a > 1 \\ 1 \le a - 1 < a \\ x = a - 1 \end{cases} \text{або} \begin{cases} a \ge 2 \\ x = a - 1 \end{cases}$$

Тобто при $a \in [2; \infty)$ маємо розв'язок $x = a - 1$.

в) $x \in [a; \infty)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$(x-1) + (x-a) = x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a > 1 \\ x \ge a \\ 2x - a - 1 = x \end{cases} \text{або} \begin{cases} a > 1 \\ x \ge a \\ x = a + 1 \end{cases}$$

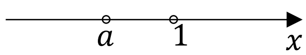
Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a > 1 \\ a + 1 \ge a \\ x = a + 1 \end{cases} \text{або} \begin{cases} a > 1 \\ x = a + 1 \end{cases}$$

Тобто при $a \in (1; \infty)$ маємо розв'язок $x = a + 1$.

Зауважимо, що при формуванні відповіді з отриманих результатів для кожного значення параметра треба буде вказати всі отримані значення змінної. Так, при $a \in (1; 2)$ з пункту а) отримано розв'язок $x = \frac{a+1}{3}$, але в пункті в) серед всіх можливих значень параметра також присутня множина $(1; 2)$, але в цьому випадку розв'язок має інший вигляд $x = a + 1$. Отже, для таких значень параметра рівняння має два розв'язки. Аналогічна ситуація можлива і для інших значень параметра.

3) $a < 1$. В цьому випадку, розміщуючи значення $x = 1$ та $x = a$ на числовій прямій, отримаємо наступне зображення



Таким чином числова пряма виявляється розбитою на три множини: $(-\infty; a)$, $(a; 1)$ та $(1; \infty)$, на кожній з яких обидва модулі рівняння мають фіксований знак. Наведемо таблицю, в якій вказані відповідні знаки.

	$(-\infty; a)$	$(a; 1)$	$(1; \infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x-a$	$-$	$+$	$+$

Отже, для того, щоб розкрити модулі в рівнянні, треба розглянути три випадки.

а) $x \in (-\infty; a)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$-(x-1)-(x-a)=x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a<1 \\ x<a \\ -2x+a+1=x \end{cases} \text{або} \begin{cases} a<1 \\ x<a \\ x=\frac{a+1}{3} \end{cases}$$

Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a<1 \\ \frac{a+1}{3}<a \\ x=\frac{a+1}{3} \end{cases} \text{або} \begin{cases} a<1 \\ a>\frac{1}{2} \\ x=\frac{a+1}{3} \end{cases}$$

Тобто при $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ маємо розв'язок $x=\frac{a+1}{3}$.

б) $x \in [a; 1)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$-(x-1)+(x-a)=x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a<1 \\ a \le x<1 \\ x=1-a \end{cases}$$

Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a<1 \\ a \le 1-a<1 \\ x=1-a \end{cases} \text{або} \begin{cases} a<1 \\ 0<a \le \frac{1}{2} \\ x=1-a \end{cases}$$

Тобто при $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ маємо розв'язок $x=1-a$.

в) $x \in [1; \infty)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$(x-1)+(x-a)=x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a<1 \\ x \ge 1 \\ 2x-a-1=x \end{cases} \text{або} \begin{cases} a<1 \\ x \ge 1 \\ x=a+1 \end{cases}$$

Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a < 1 \\ a + 1 \geq 1 \\ x = a + 1 \end{cases} \text{або} \begin{cases} a < 1 \\ a \geq 0 \\ x = a + 1 \end{cases}$$

Тобто при $a \in [0; 1)$ маємо розв'язок $x = a + 1$.

Поєднуючи всі отримані результати, маємо:

1) якщо $a = 1$, то $x = 2$ та $x = \frac{2}{3}$,
2) якщо $a \in (1; 2)$, то $x = \frac{a+1}{3}$ та $x = a + 1$,
3) якщо $a \in [2; \infty)$, то $x = a - 1$ та $x = a + 1$,
4) якщо $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, то $x = \frac{a+1}{3}$ та $x = a + 1$,
5) якщо $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$, то $x = 1 - a$ та $x = a + 1$,
6) якщо $a = 0$, то $x = 1$.

Зауважимо, що випадки 2) та 4) дають однакові розв'язки, отже у відповідь ці множини значень параметрів можна об'єднати. Більш того, якщо в вирази для розв'язків підставити значення $a = 1$, то отримаємо розв'язки з пункту 1), отже значення $a = 1$ також можна приєднати до цього випадку. Також значення $a = 0$ можна приєднати до випадку 5).

Також зауважимо, що жоден з випадків не містить значення параметра з множини $(-\infty; 0)$, отже, для цих значень рівняння розв'язків не має. Цей випадок також треба додати до загальної відповіді.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0)$, то розв'язків немає,

якщо $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, то $x = 1 - a$ та $x = a + 1$,

якщо $a \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$, то $x = \frac{a+1}{3}$ та $x = a + 1$,

якщо $a \in [2; \infty)$, то $x = a - 1$ та $x = a + 1$.

Задачі для самостійної роботи.

12. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

12.1. $|x - 3a| = ax + 1$
12.2. $|x - a| - 1 = a$
12.3. $3x + |x - a| = 7$
12.4. $|x + a| - 9 = x - a$
12.5. $2x + |x + a| = a$
12.6. $|a - 3x| - 3x = 1 - a$
12.7. $|x - a| = 4a - x$
12.8. $|x - a| - 4 = x - a$
12.9. $|x + a - 1| = a + x - 3$
12.10. $|x + 2a| = x - a + 3$
12.11. $|5x + a| - ax = 2$
12.12. $|3x + a| = 11a - x$
12.13. $|x - a| = x + 4a$
12.14. $|x + a| = 2ax - 1$
12.15. $|x - 2a| = 5ax$
12.16. $3|x - a| + (a - 1)x + 2 = 0$
12.17. $8|x + a| - x + 1 = ax$
12.18. $|a - 3x| = 2ax + 1$
12.19. $4|x - a| = x + a$
12.20. $a(x + 1) = |x - 3a|$

13. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

13.1. $|x| + |x - 2a| = x - 4$
13.2. $5|x - 3| = 9 + 2|x - a|$

13.3. $|4x-a|+|x|=-2x$
13.4. $|x+a|+|4x-1|=3$
13.5. $|2x+5|-|x-a|=4$
13.6. $|x+2|+|x-a|=6x$
13.7. $|4x+2|-|x-a|=1$
13.8. $|2x-1|+|x-a|=1$
13.9. $|x+2|-|x-a|=x$
13.10. $|x-2a|+|x-4|=a+6$
13.11. $|2a-x|=|x+3|+a$
13.12. $|x+a|+2|x-1|=x$
13.13. $|2x-1|-|x-a|=2$
13.14. $|2x+3|+|x+a|=a$
13.15. $|x-a|-|2x+3|=10x$
13.16. $|x-5|+|x-a|=5a$
13.17. $|x-3|-|x+2a|=4$
13.18. $|x|+|x+a+1|=2x$
13.19. $|x-2|+|x-a|=5a-10$
13.20. $2|x-a|+2|x+1|=x$.

10. Ірраціональні рівняння

Будемо розглядати рівняння виду

$$\sqrt{f(x)}=g(x).$$

Для того, щоб звільнитися від ірраціональності, перейдемо до еквівалентної системи

$$\begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$$

Зауваження. Вихідне рівняння має обмеження на допустимі значення змінної, тому може виникнути потреба розглянути умову $f(x)\geq 0$, але виконання цієї умови є наслідком з другого рівняння системи, тому окремо розглядати цю умову не треба.

Приклад 14. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+a}=x-1$$

Розв'язання. Перейдемо до еквівалентної системи

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x+a=(x-1)^2 \end{cases}$$

Після спрощення рівняння системи матиме вигляд

$$x^2-3x+1-a=0.$$

Дискримінант рівняння має вигляд $D(a)=4a+5$, отже, при $a\geq-\frac{5}{4}$ рівняння має розв'язки $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{4a+5}}{2}$. Далі кожен з отриманих розв'язків підставимо в нерівність системи, для того, щоб отримати додаткові обмеження на параметр в кожному випадку окремо.

1) Якщо $x=\frac{3+\sqrt{4a+5}}{2}$, то нерівність системи перетворюється на $\frac{3+\sqrt{4a+5}}{2}-1\geq 0$ або $\sqrt{4a+5}\geq -1$, що виконується для всіх значень параметра, що задовольняють умову $a\geq-\frac{5}{4}$.

2) Якщо $x=\frac{3-\sqrt{4a+5}}{2}$, то нерівність системи перетворюється на $\frac{3-\sqrt{4a+5}}{2}-1\geq 0$ або $\sqrt{4a+5}\leq 1$, розв'язком якої є множина $a\in\left[-\frac{5}{4};1\right]$.

При формуванні загальної відповіді для кожного значення параметра поєднаємо в один випадок всі отримані результати. Якщо деякі значення параметра не є допустимими в жодному з випадків, то у відповіді треба зазначити, що при цих значеннях розв'язку немає.

Відповідь: якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$, то розв'язків немає,

якщо $a \in \left[-\frac{5}{4}; -1\right]$, то $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{4a+5}}{2}$,

якщо $a \in (-1; \infty)$, то $x = \frac{3+\sqrt{4a+5}}{2}$.

Задачі для самостійної роботи.

14. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

14.1. $\sqrt{2x-a} = 3-x$
14.2. $\sqrt{5-x} = 3x-2a$
14.3. $\sqrt{3x+2a} = 2x+3$
14.4. $\sqrt{x-4a} = 2x-1$
14.5. $\sqrt{7-2x} = 2a-3x$
14.6. $\sqrt{x+6a} = 4x+5$
14.7. $\sqrt{6-5x} = 5x-4a$
14.8. $\sqrt{x+9a} = x+4$
14.9. $\sqrt{3x+8a} = 2x-4$
14.10. $\sqrt{x-8} = 3a-5x$
14.11. $\sqrt{4a-3x} = 2x+6$
14.12. $\sqrt{7x+1} = x+2a$
14.13. $\sqrt{5x-a} = 2x-6$
14.14. $\sqrt{x+8a} = 10-3x$
14.15. $\sqrt{12-5x} = 3x+a$
14.16. $\sqrt{4x+5a} = 3x+5$
14.17. $\sqrt{x+3} = x-2a$
14.18. $\sqrt{9x-7a} = 4x+3$
14.19. $\sqrt{6-8x} = 6a+4x$
14.20. $\sqrt{x+2a} = x-7$

11. Ірраціональні нерівності

Будемо розглядати нерівності виду

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \text{ або } \sqrt{f(x)} \leq g(x)$$

або до відповідних строгих нерівностей.

Кожна з цих нерівностей може бути зведена до еквівалентної системи або сукупності двох систем. Так, для нерівності

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$$

еквівалентною буде наступна сукупність

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Якщо ж вихідна нерівність була строгою $\sqrt{f(x)} > g(x)$, то у відповідній сукупності строгою стане тільки нерівність $f(x) > g^2(x)$, інші умови залишаться незмінними.

У випадку нерівності

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$$

еквівалентна система матиме вигляд

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

Якщо нерівність є строгою $\sqrt{f(x)} < g(x)$, то в системі треба змінити останню нерівність на $f(x) < g^2(x)$.

Приклад 15. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

$$\sqrt{x+1} \geq x - a$$

Розв'язання. Перейдемо до еквівалентної сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - a \geq 0 \\ x + 1 \geq (x-a)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x - a < 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Розглянемо спочатку першу систему, яка після спрощення перетвориться на

$$\begin{cases} x \geq a \\ x^2 - (2a+1)x + a^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо другу нерівність системи. Дискримінант квадратного тричлена після спрощення має вигляд $D(a) = 4a + 5$. Коли $D(a) < 0$ друга нерівність, а отже і сама система, розв'язків не мають. Тому розглянемо два випадки.

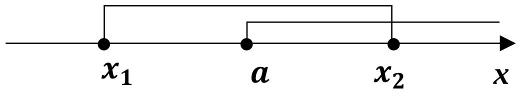
1) $D(a) = 0$, звідки $a = -\frac{5}{4}$. В цьому випадку друга нерівність дає єдиний розв'язок $x = a + \frac{1}{2}$, або, якщо підставити значення параметра, то $x = -\frac{3}{4}$. Якщо отримані значення параметра і змінної підставити в першу нерівність, то отримаємо правильну числову нерівність $-\frac{3}{4} \geq -\frac{5}{4}$, отже отриманий розв'язок є розв'язком системи.

2) $D(a) > 0$, звідки $a > -\frac{5}{4}$. В цьому випадку друга нерівність дає множину розв'язків $x \in [x_1; x_2]$, де $x_1 = \frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2}$ та $x_2 = \frac{2a+1+\sqrt{4a+5}}{2}$.

Для того, щоб знайти множину розв'язків системи, треба визначити, як розмістити на числовій прямій вирази a та x_1 і x_2. Очевидно, що $x_2 > a$ при будь-якому значенні параметра, оскільки вираз в чисельнику більший за $2a$, а після ділення на 2 дріб виявляється більшим за a.

Залишилось порівняти вирази a та x_1. Розглянемо два випадки.

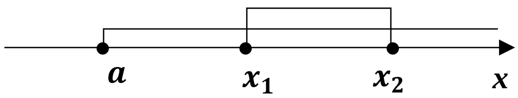
а) Нехай $x_1 < a$, тобто $\frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2} < a$. Після спрощення остання нерівність перетворюється на $\sqrt{4a+5} > 1$, звідки $a > -1$. Всі отримані значення задовольняють попередню умову на параметр $a > -\frac{5}{4}$, а отже при $a > -1$ маємо наступне зображення множин, що є роз'вязками нерівностей системи



Отже, множина розв’язків першої системи при $a > -1$ має вид $x \in [a; x_2]$.

б) Нехай $x_1 \geq a$, тобто $\frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2} \geq a$. Цей випадок для більшої наочності можна було б розбити на два випадки $x_1 > a$ та $x_1 = a$. Але, щоб зменшити кількість випадків, цього можна не робити, оскільки множина розв’язків у випадку $x_1 = a$ може бути отримана з множини розв’язків загального випадку $x_1 \geq a$.

Множина значень параметра, що задовольняє умову $\frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2} \geq a$ має вигляд $a \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right]$, а зображення множини розв’язків нерівностей системи на числовій прямій має наступний вигляд



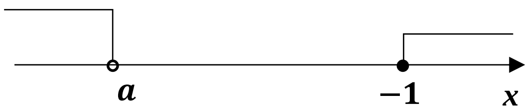
Отже, множина розв’язків першої системи при $a \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right]$ має вид $x \in [x_1; x_2]$.

Розглянемо другу систему, яка після спрощення перетвориться на

$$\begin{cases} x < a \\ x \geq -1 \end{cases}$$

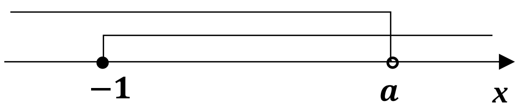
Знову, для того, щоб знайти множину розв’язків системи, треба розглянути два випадки.

1) $a \leq -1$, тоді зображення множини розв’язків нерівностей має вигляд



На рисунку видно, що множини розв’язків нерівностей не мають спільної частини, тому система в цьому випадку розв’язків немає.

2) $a > -1$, тоді зображення множини розв’язків нерівностей має вигляд



Отже, при $a > -1$ друга система має розв’язок $x \in [-1; a)$. Зауважимо, що при тих самих значеннях параметра перша система теж мала розв’язки, а оскільки ми розглядаємо сукупність, то у відповіді треба об’єднати отримані множини.

Відповідь: якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$, то розв’язків немає,

якщо $a = -\frac{5}{4}$, то $x = -\frac{3}{4}$,

якщо $a \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right]$, то $x \in \left[\frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2}; \frac{2a+1+\sqrt{4a+5}}{2}\right]$,

якщо $a \in (-1; \infty)$, то $x \in \left[-1; \frac{2a+1+\sqrt{4a+5}}{2}\right]$.

Задачі для самостійної роботи.

15. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

15.1. $\sqrt{x-2a} \geq 3-x$
15.2. $\sqrt{7-x} \leq 4x+5a$
15.3. $\sqrt{5x+8a} > x+3$
15.4. $\sqrt{x+5a} < 2x-a$
15.5. $\sqrt{4x+11} \leq 5x+2a$
15.6. $\sqrt{9a-2x} > 6-7x$
15.7. $\sqrt{5x-11} \geq 3x+1$
15.8. $\sqrt{3x-a} < x-4$
15.9. $\sqrt{6x-2Z} \leq 4x+3$
15.10. $\sqrt{a-8x} \geq 7x-5$
15.11. $\sqrt{2x+7a} > 2x-1$
15.12. $\sqrt{3x+18} > x+5$
15.13. $\sqrt{4a-3x} < 3x+1$
15.14. $\sqrt{12x+a} \geq 5-2x$
15.15. $\sqrt{7x-9a} \leq 3x+4$
15.16. $\sqrt{5x-2} > 3a-x$
15.17. $\sqrt{13x+5a} < 4x-2$
15.18. $\sqrt{3x+4} \geq 3x+2a$
15.19. $\sqrt{9x-7a} \leq x-2$
15.20. $\sqrt{14x+11} < a-2x$

12. Тригонометричні рівняння

В даному розділі будемо розглядати найпростіші тригонометричні рівняння виду

$$\sin x = f(a) \text{ та } \cos x = f(a)$$

та рівняння, що зводяться до них.

Головним фактом, на який слід звернути увагу в рівняннях такого виду, є обмеження

$$-1 \leq f(a) \leq 1$$

для того, щоб відповідні рівняння мали розв'язок. Для тих значень параметра, для яких відповідна система умов не виконується, вказані рівняння не матимуть розв'язку.

Для прикладу розглянемо тригонометричне рівняння, що зводиться заміною до квадратного рівняння.

Приклад 16. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$\sin^2 x + 2a\sin x + a + 2 = 0$$

Розв'язання. Зробимо заміну $\sin x = t$, за умови, що $-1 \leq t \leq 1$, і отримаємо квадратне рівняння

$$t^2 + 2at + a + 2 = 0.$$

Розв'язками отриманого рівняння при $a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$ є

$$\left[\begin{array}{l} t_+ = -a + \sqrt{a^2 - a - 2} \\ t_- = -a - \sqrt{a^2 - a - 2} \end{array}\right.$$

Для інших значень параметра квадратне рівняння на має розв'язків, а отже, і початкове рівняння теж не має розв'язків.

Залишилось зрозуміти, для яких значень параметра кожен з розв'язків окремо задовольняє умову $-1 \leq t \leq 1$.

1) Розглянемо значення t_+. З урахуванням вже отриманих обмежень на параметр отримаємо систему, розв'язки якої і будуть остаточною множиною значень параметра, при яких рівняння $\sin x = t_+$ матиме сенс.

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty) \\ -a + \sqrt{a^2 - a - 2} \le 1 \\ -a + \sqrt{a^2 - a - 2} \ge -1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty) \\ \sqrt{a^2 - a - 2} \le 1 + a \\ \sqrt{a^2 - a - 2} \ge a - 1 \end{cases}$$

Друга нерівність зводиться до наступної еквівалентної системи

$$\begin{cases} 1 + a \ge 0 \\ a^2 - a - 2 \ge 0 \\ a^2 - a - 2 \le (1 + a)^2 \end{cases}$$

розв'язком якої є множина $a \in \{-1\} \cup [2; \infty)$.

Третя нерівність зводиться до еквівалентної сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 1 \ge 0 \\ a^2 - a - 2 \ge (a - 1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a - 1 < 0 \\ a^2 - a - 2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

розв'язком якої є множина $a \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$.

Спільною частиною отриманих множин є множина $a \in \{-1\} \cup [3; \infty)$, при якій маємо остаточний розв'язок рівняння $\sin x = t_+$

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-a + \sqrt{a^2 - a - 2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Якщо записати випадок $a = -1$ окремо, отримаємо рівняння $\sin x = 1$, розв'язок якого зручно записати у вигляді $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) Розглянемо значення t_-. Система умов в цьому випадку матиме вигляд

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty) \\ -a - \sqrt{a^2 - a - 2} \le 1 \\ -a - \sqrt{a^2 - a - 2} \ge -1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty) \\ \sqrt{a^2 - a - 2} \ge -a - 1 \\ \sqrt{a^2 - a - 2} \le -a + 1 \end{cases}$$

Розв'язання другої та третьої нерівності, як і в попередньому випадку, зводиться до еквівалентної сукупності та системи. Розв'язком другої нерівності буде множина $a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$, а третьої – множина $a \in (-\infty; -1]$. Остаточним розв'язком системи буде множина $a \in (-\infty; -1]$. При цих значеннях параметра розв'язок вихідного рівняння матиме вигляд

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-a - \sqrt{a^2 - a - 2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

У випадку $a = -1$ знову отримаємо рівняння $\sin x = 1$, розв'язок якого вже врахований в першому випадку.

Поєднуючи результати обох випадків, отримаємо остаточну відповідь.

Відповідь: якщо $a \in (-1; 3)$, то розв'язків немає,

якщо $a = -1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$,

якщо $a \in (-\infty; -1)$, то

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-a - \sqrt{a^2 - a - 2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

якщо $a \in [3; \infty)$, то

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-a + \sqrt{a^2 - a - 2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Задачі для самостійної роботи.

16. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

16.1. $(a+2)\sin^2 x + (6a+2)\sin x - a + 3 = 0$

16.2. $\cos^4 x - (7a+5)\sin^2 x + a + 2 = 0$

16.3. $\cos^2 x + (1-a)\sin x - 4a - 6 = 0$

16.4. $\sin x + \sin 3x = 2(a^2+2a)\cos x$

16.5. $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 7 - a^2$

16.6. $\cos^2 2x - (3a+5)\cos 2x + 2a + 3 = 0$

16.7. $\cos 5x + \cos 3x = (2-a^2)\cos x$

16.8. $(a+3)\sin^2 x + (a-7)\cos x + 2a - 8 = 0$

16.9. $\sin^2 3x - \frac{3-7a}{4a-1}\sin 3x - \frac{5}{4a-1} = 0$

16.10. $\cos 2x - (5a+9)\cos x - a + 2 = 0$

16.11. $\cos 7x - \cos 3x = (-a^2+3a+6)\sin 2x$

16.12. $\sin^4 x + (3a-1)\cos^2 x + 2a + 6 = 0$

16.13. $(a-3)\cos^2 2x - (5a-11)\sin 2x - 5a + 15 = 0$

16.14. $(a+5)\cos^2 5x + (3a-9)\cos 5x - 4a + 5 = 0$

16.15. $2\cos 2x + 2(a-1)\cos x - 5a - 8 = 0$

16.16.$\sin 6x - \sin 2x = (a^2+2a+6)\sin 2x$

16.17. $(a+7)\cos^4 2x - (4a-8)\cos^2 2x - 3a + 3 = 0$

16.18. $(6-3a)\sin^2 3x - 2(2a-1)\sin 3x + 3a + 4 = 0$

16.19. $\cos 2x + (3a+7)\cos x + 4a + 7 = 0$

16.20. $\sin 2x + \sin 4x = \frac{a-1}{2a+3}\sin 3x$

13. Показникові рівняння

Будемо розглядати рівняння виду

$$a^x = b, a > 0, a \neq 1$$

та рівняння, що до нього зводяться.

У випадку $b \leq 0$ таке рівняння не має розв'язків, а при $b > 0$ маємо розв'язок $x = \log_a b$.

В якості прикладу розглянемо показникове рівняння, що зводиться заміною змінної до квадратного рівняння.

Приклад 17. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$4^x + 2(a-1)2^x + a + 5 = 0$$

Розв'язання. Зробимо заміну $2^x = t$, за умови, що $t > 0$, і отримаємо квадратне рівняння

$$t^2 + 2(a-1)t + a + 5 = 0.$$

Дискримінант отриманого рівняння після перетворення має вигляд $D(a) = 4(a^2-3a-4)$, тому за умови $4(a^2-3a-4) \geq 0$, звідки $a \in (-\infty; -1] \cup [4; \infty)$, маємо розв'язки рівняння

$$t_+ = 1 - a + \sqrt{a^2-3a-4} \text{ та } t_- = 1 - a - \sqrt{a^2-3a-4}.$$

Залишилось визначити, при яких значеннях параметра кожен розв'язок окремо задовольняє умову $t > 0$.

1) Для значення t_+ умова $t > 0$ має вигляд

$$1 - a + \sqrt{a^2 - 3a - 4} > 0 \text{ або } \sqrt{a^2 - 3a - 4} > a - 1.$$

Остання нерівність зводиться до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 1 \geq 0 \\ a^2 - 3a - 4 \geq (a-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a - 1 < 0 \\ a^2 - 3a - 4 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \text{ або } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 1 \\ a < -5 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 1 \\ a \in (-\infty; -1] \cup [4; \infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

Перша система нерівностей не має розв'язків, друга дає множину розв'язків $a \in (-\infty; -1]$, що і утворюють розв'язок сукупності. Для таких значень параметра рівняння

$$2^x = 1 - a + \sqrt{a^2 - 3a - 4}$$

має розв'язок $x = \log_2(1 - a + \sqrt{a^2 - 3a - 4})$.

2) Для значення $t_- = 1 - a - \sqrt{a^2 - 3a - 4}$ умова $t > 0$ перетвориться на

$$1 - a - \sqrt{a^2 - 3a - 4} > 0 \text{ або } \sqrt{a^2 - 3a - 4} < 1 - a.$$

Розв'язуючи останню нерівність перейдемо до системи

$$\begin{cases} 1 - a \geq 0 \\ a^2 - 3a - 4 \geq 0 \\ a^2 - 3a - 4 < (1-a)^2 \end{cases}$$

яка має розв'язком множиину $a \in (-5; 1]$. Отже, для таких значень параметра рівняння має розв'язок $x = \log_2(1 - a - \sqrt{a^2 - 3a - 4})$.

Відповідь: якщо $a \in (-1; \infty)$, то розв'язків немає,

якщо $a \in (-\infty; -5]$, то $x = \log_2(1 - a + \sqrt{a^2 - 3a - 4})$,

якщо $a \in (-5; -1]$, то $x = \log_2(1 - a + \sqrt{a^2 - 3a - 4})$

та $x = \log_2(1 - a - \sqrt{a^2 - 3a - 4})$.

Задачі для самостійної роботи.

17. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

17.1.$(a + 3)9^x + 4 \cdot 3^x + a + 3 = 0$

17.2. $36^x + 2a \cdot 6^x + 2a + 3 = 0$

17.3. $5^{2x} - (3a + 1)5^x + a + 2 = 0$

17.4. $4^x + 4a \cdot 2^x + a + 5 = 0$

17.5. $9^x + 2(a - 1)3^x - a + 3 = 0$

17.6. $7^{2x} + (a - 3)7^x + a + 2 = 0$

17.7. $4^x - 8 \cdot 2^x - 8a + 8 = 0$

17.8. $25^x + 2a \cdot 5^x + a + 2 = 0$

17.9. $36^x - 2a \cdot 6^x - 63 = 0$

17.10. $7^{2x} + 3a \cdot 7^x - 4 = 0$

17.11.$5^{2x} + 2 \cdot (5a - 3)5^x + 4a - 3 = 0$

17.12. $49^x + (a - 1)7^x + 1 - 2a = 0$

17.13. $4^x - 3 \cdot 2^x + 5a - 4 = 0$

17.14. $(a - 2)4^x - (4 - 2a)2^x + 3 = 0$

17.15. $9^x - (5 - a)3^x + 6 - 2a = 0$

17.16. $a \cdot 7^{2x} - (a - 7)7^x + 9 = 0$

17.17. $4^x - (2a - 2)2^x + a + 5 = 0$

17.18. $25^x - 2a \cdot 5^x - 3a^2 + 4a = 0$

17.19. $36^x + a \cdot 6^x + a^2 - 1 = 0$

17.20. $9^x - (7a + 1)3^x - 7a + 2 = 0$

14. Показникові нерівності

Розглянемо найпростіші показникові нерівності, для кожної з яких $a > 0, a \neq 1$

$$a^x \leq b \text{ або } a^x \geq b.$$

При розв’язанні таких нерівностей виникають два випадки:

1) якщо $b > 0$, то розв’язок найпростіших нерівностей залежить від значення a
   а. якщо $a > 1$, то нерівність $a^x \leq b$ має розв’язок $x \leq \log_a b$, а нерівність $a^x \geq b$ має розв’язок $x \geq \log_a b$;
   б. якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^x \leq b$ має розв’язок $x \geq \log_a b$, а нерівність $a^x \geq b$ має розв’язок $x \leq \log_a b$.
2) якщо $b \leq 0$, то нерівність $a^x \leq b$ не має розв’язків, а множиною розв’яків нерівності $a^x \geq b$ є всі дійсні числа.

Зауваження. Якщо в нерівностях $a^x \leq b$ та $a^x \geq b$ замінити знак нерівності на строгий, тобто розглянути відповідно нерівності $a^x < b$ та $a^x > b$, то у відповіді, де присутня нерівність, теж треба замінити відповідний знак нерівності на строгий.

Приклад 18. Для всіх значень параметра a розв’язати нерівність

$$9^x - 2a3^x + 2a + 3 \geq 0$$

Розв’язання. Зробимо заміну $3^x = t$ за умови $t > 0$, тобто отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

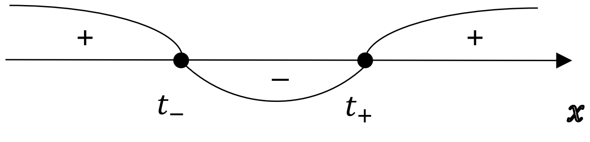
Знайдемо спочатку корені рівняння $t^2 - 2at + 2a + 3 = 0$. Дискримінант цього рівняння дорівнює $D(a) = 4(a^2 - 2a - 3)$. За умови $4(a^2 - 2a - 3) \geq 0$ або $a \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$, рівняння має корені

$$t_+ = a + \sqrt{a^2 - 2a - 3} \text{ та } t_- = a - \sqrt{a^2 - 2a - 3}.$$

Зауважимо, що в даному прикладі при будь якому значенні параметра $t_+ \geq t_-$, але якщо вираз для коренів містить значення параметра в знаменнику, то треба розглядати два випадки $t_+ \geq t_-$ та $t_+ \leq t_-$.

Отримавши корені, повернемось до розв’язання системи нерівностей.

1) У випадку, коли $a \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, до нерівності $t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0$ застосуємо метод інтервалів



Тобто множина розв’язків нерівності має вигляд $t \in (-\infty; t_-] \cup [t_+; \infty)$. Для того, щоб знайти розв’язок системи треба розглянути три випадки.

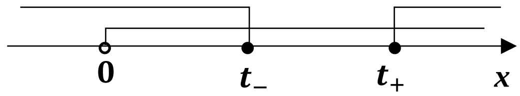
   а. $t_- > 0$ або $a - \sqrt{a^2 - 2a - 3} > 0$, звідки $\sqrt{a^2 - 2a - 3} < a$, що призводить до наступної системи умов щодо параметра

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty) \\ a^2 - 2a - 3 < a^2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} a > 0 \\ a \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty) \\ a > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

розв'язком якої є множина $a \in (3; \infty)$. В цьому випадку множина розв'язків системи

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

буде спільною частиною множин на наступному рисунку



Отже, розв'язком системи відносно змінної t буде множина $t \in (0; t_-] \cup [t_+; \infty)$, яку можна записати у вигляді сукупності двох умов

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t \leq t_- \\ t \geq t_+ \end{array}\right.$$

Повертаючись до змінної x отримаємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 3^x \leq a - \sqrt{a^2 - 2a - 3} \\ 3^x \geq a + \sqrt{a^2 - 2a - 3} \end{array}\right.$$

Кожна з отриманих нерівностей є найпростішою, тому для її розв'язання можна скористатися правилами, наведеними на початку розділу. Тоді при $a \in (3; \infty)$ остаточним ров'язком буде множина

$$x \in \left(-\infty; \log_3\left(a - \sqrt{a^2 - 2a - 3}\right)\right] \cup [\log_3\left(a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}\right); \infty).$$

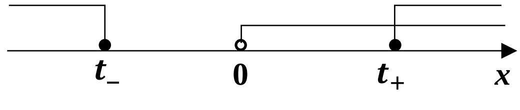
б. $t_- \leq 0 < t_+$, що приводить до системи нерівностей

$$\begin{cases} a - \sqrt{a^2 - 2a - 3} \leq 0 \\ a + \sqrt{a^2 - 2a - 3} > 0 \end{cases}$$

Множина розв'язків першої нерівності системи $a \in (-\infty; -1)$, а множина розв'язків другої нерівності $a \in (-\infty; -1{,}5) \cup (3; \infty)$, отже множина розв'язків системи матиме вигляд $a \in (-\infty; -1{,}5)$. В цьому випадку множина розв'язків системи

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

буде спільною частиною множин на наступному рисунку



Отже, розв'язком системи відносно змінної t буде множина $t \in (t_+; \infty)$, яку можна записати у вигляді умови $t \geq t_+$. Повертаючись до змінної x, отримаємо нерівність

$$3^x \geq a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}$$

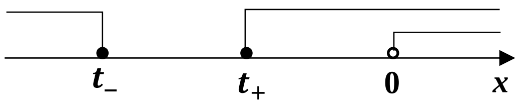
з якої остаточна множина розв'язків при $a \in (-\infty; -1{,}5)$ має вигляд

$$x \in [\log_3(a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}); \infty).$$

в. $t_+ \leq 0$, звідки випливає неірвність $a + \sqrt{a^2 - 2a - 3} \leq 0$, що виконується для всіх $a \in [-1{,}5; -1)$. В цьому випадку множина розв'язків системи

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

буде спільною частиною множин на наступному рисунку



Отже, розв'язком системи відносно змінної t буде множина $t \in (0; \infty)$ або $t > 0$, але вираз 3^x задовольняє умову $3^x > 0$ при будь-якому значенні змінної. Тобто при $a \in [-1{,}5; -1)$ x – будь-яке число.

2) У випадку, коли $a \in [-1; 3]$, будь-яке значення t є розв'язком нерівності $t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0$, оскільки $D(a) \leq 0$ та гілки параболи напрямлені вгору. А отже, множина розв'язків системи

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

задовольняє тільки умову $t > 0$ або $3^x > 0$, що вірно для будь-якого значення змінної x. Тобто при $a \in [-1; 3]$ x – будь-яке число.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -1{,}5)$, то $x \in [\log_3(a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}); \infty)$
якщо $a \in [-1{,}5; 3]$, то x – будь-яке число,
якщо $a \in (3; \infty)$,то

$$x \in \left(-\infty; \log_3(a - \sqrt{a^2 - 2a - 3})\right] \cup [\log_3(a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}); \infty).$$

Задачі для самостійної роботи.

18. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

18.1. $4^x + 2(2a + 1)2^x + a + 2 \geq 0$
18.2. $(3a + 4)9^x - 2a \cdot 3^x + 8a + 9 \leq 0$
18.3. $25^x - 4a \cdot 5^x + a + 5 < 0$
18.4. $(0{,}01)^x - (a + 9)(0{,}1)^x + a + 16 \geq 0$
18.5. $8 \cdot 49^x - 8a \cdot 7^x + a + 3 < 0$
18.6. $2a \cdot (0{,}04)^x + (3a - 1)(0{,}2)^x + 2a \geq 0$
18.7. $2^x + 2a(\sqrt{2})^x + a + 2 \geq 0$
18.8. $9^{x+1} - (2a + 8)3^x + a + 2 > 0$
18.9. $(0{,}5a + 1)36^x + (3a + 5)6^x - a + 1 \geq 0$

18.10. $3a\left(\frac{4}{9}\right)^x - 6\left(\frac{2}{3}\right)^x + 5a + 2 < 0$
18.11. $(a+3)9^x - 4 \cdot 3^x + a + 3 \geq 0$
18.12. $100^x - (7a+1)10^x - 5a + 4 \geq 0$
18.13. $(0{,}49)^x + 2a(0{,}7)^x + 1 \geq 0$
18.14. $3 \cdot 9^x - 6a \cdot 3^x - 4a - 1 \geq 0$
18.15. $5^{2x} - 8 \cdot 5^x - 8a + 8 < 0$
18.16. $9^x - (2a-2)3^x + a + 5 > 0$
18.17. $a \cdot 9^x + 4a3^x + 5a + 1 < 0$
18.18. $25^x + (a-4)5^x + \frac{25}{4} < 0$
18.19. $(4a-5)\left(\frac{4}{9}\right)^x + 12\left(\frac{2}{3}\right)^x - a - 5 \geq 0$
18.20. $6^{2x} + (a-3)6^x + a + 2 < 0$.

15. Логарифмічні рівняння

Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд

$$\log_a x = b, a > 0, a \neq 1.$$

При будь-якому значенні b розв'язком цього рівняння є значення

$$x = a^b.$$

Розглянемо логарифмічне рівняння, що зводиться заміною змінної до квадратного рівняння.

Приклад 19. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$a\log_2^2 x + 2a\log_2 x + 2 = 0$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінної $\log_2 x = t$ та отримаємо рівняння

$$at^2 + 2at + 2 = 0.$$

У випадку $a = 0$ це рівняння не є квадратним, тому розглянемо цей випадок окремо. Підставивши відповідне значення в рівняння, отримаємо числову рівність $2 = 0$, що не є правильною, отже в цьому випадку рівняння не має розв'язків.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння є квадратним і його дискримінант має вигляд $D(a) = 4a^2 - 8a = 4a(a-2)$.

Квадратне рівняння має розв'язки у випадку, коли $\mathrm{D}(a) > 0$ або $\mathrm{D}(a) = 0$.

Якщо $\mathrm{D}(a) > 0$, то отримаємо нерівність відносно параметра

$$4a(a-2) > 0,$$

множина розв'язків якої за методом інтервалів $a \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$. Для отриманих значень параметра корені квадратного рівняння мають вигляд

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 2a}}{a} \\ t = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 2a}}{a} \end{array}\right.$$

Оскільки ми не мали жодних обмежень щодо значень параметра, то повертаючись до змінної x, отримаємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x = \frac{-a+\sqrt{a^2-2a}}{a} \\ \log_2 x = \frac{-a-\sqrt{a^2-2a}}{a}\end{array}\right., \text{ звідки } \left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{-a+\sqrt{a^2-2a}}{a}} \\ x = 2^{\frac{-a-\sqrt{a^2-2a}}{a}}\end{array}\right.$$

Якщо $\mathrm{D}(a) = 0$ і при цьому $a \neq 0$, то отримаємо значення параметра $a = 2$, яке можна підставити в вихідне рівняння. Тоді квадратне рівняння має єдиний корінь $t = -1$, звідки отрмаємо логарифмічне рівняння $\log_2 x = -1$, що має розв'язок $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Відповідь: якщо $a \in [0; 2)$, то розв'язків немає,

якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$,то $x = 2^{\frac{-a+\sqrt{a^2-2a}}{a}}$ та $x = 2^{\frac{-a-\sqrt{a^2-2a}}{a}}$,

якщо $a = 2$, то $x = \frac{1}{2}$.

Задачі для самостійної роботи.

19. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

19.1. $\log_4(x+a) + \log_4(x-5a) = 3$
19.2. $5a\log_{0,7}^2 x - 8a\log_{0,7} x - 85 = 0$
19.3. $3a\lg^2 x + 8a\lg x - 3 = 0$
19.4. $a\log_2^2 x - 2a\log_2 x - 63 = 0$
19.5. $\log_5 x + \log_5(x-a) = 1$
19.6. $3a\log_3^2 x - 2a\log_3 x - 3 = 0$
19.7. $\log_a^2 x - \log_a x = 0$
19.8. $a\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 3a\log_{\frac{1}{3}} x - 40 = 0$
19.9. $a\log_2^2 x - a\log_{\frac{1}{2}} x^4 - 21 = 0$
19.10. $\log_2(x+14) + \log_2(x+a) = 6$
19.11. $2a\log_6^2 x + 9a\log_6 x - 5 = 0$
19.12. $a\log_{0,1}^2 x + a\log_{0,1} x - 12 = 0$
19.13. $\lg(x-a) - \lg(x+2a) = 0$
19.14. $a\log_4^2 x + 3a\log_4 x - 4 = 0$
19.15. $9a\log_{\sqrt{3}}^2 x - 28a\log_{\sqrt{3}} x + 3 = 0$
19.16. $3a\log_2^2 x - a\log_2 x - 2 = 0$
19.17. $2a\log_6^2 x + 9a\log_6 x - 5 = 0$
19.18. $a\log_5^2 x + 5a\log_5 x - 6 = 0$
19.19. $\log_a^2 x - 8\log_a x + 7 = 0$
19.20. $\log_2(x+5a) + \log_2(x-4a) = 5$

16. Логарифмічні нерівності

Розглянемо найпростіші логарифмічні нерівності, для кожної з яких $a > 0, a \neq 1$:

$$\log_a x \leq b \text{ та } \log_a x \geq b.$$

При розв'язанні таких нерівностей виникають два випадки:

1) якщо $a > 1$, то
   а. нерівність $\log_a x \leq b$ зводиться до $0 < x \leq a^b$;
   б. нерівність $\log_a x \geq b$ зводиться до $x \geq a^b$.
2) якщо $0 < a < 1$, то
   а. нерівність $\log_a x \leq b$ зводиться до $x \geq a^b$;
   б. нерівність $\log_a x \geq b$ зводиться до $0 < x \leq a^b$.

Зауваження. Якщо в нерівностях $\log_a x \le b$ або $\log_a x \ge b$ замінити знак нерівності на строгий, тобто розглянути відповідно нерівності $\log_a x < b$ та $\log_a x > b$, то у нерівностях, які з них випливають теж треба замінити відповідний знак нерівності на строгий.

Приклад 20. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

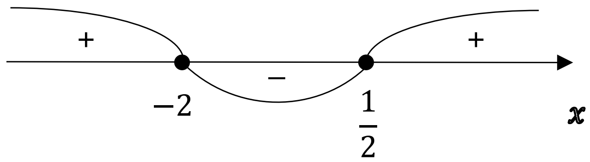
$$2\log_a^2 x + 3\log_a x - 2 \le 0$$

Розв'язання. Зауважимо, що при $a \le 0$ та $a = 1$ вираз $\log_a x$ не визначений, а отже в цьому випадку нерівність не має розв'язків.

У випадку $a > 0, a \ne 1$ зробимо заміну $\log_a x = t$, і отримаємо квадратну нерівність

$$2t^2 + 3t - 2 \le 0.$$

Коренями відповідного квадратного рівняння $2t^2 + 3t - 2 = 0$ є $t = \frac{1}{2}$ та $t = -2$, тому, користуючись методом інтервалів, за допомогою наступного рисунка



знайдемо множину розв'язків квадратної нерівності $t \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]$, яку можна записати у вигляді системи умов

$$\begin{cases} t \le \dfrac{1}{2} \\ t \ge -2 \end{cases}$$

Повертаючись до змінної x, отримаємо систему найпростіших логарифмічних нерівностей

$$\begin{cases} \log_a x \le \dfrac{1}{2} \\ \log_a x \ge -2 \end{cases}$$

При розв'язанні отриманої системи треба розглянути два випадки, оскільки основа логарифмів залежить від значення параметра.

1) $a > 1$, тоді отримана логарифмічна система зводиться до наступної системи

$$\begin{cases} 0 < x \le a^{\frac{1}{2}} \\ x \ge a^{-2} \end{cases} \text{або} \begin{cases} x \le \sqrt{a} \\ x \ge \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

розв'язком якої є множина $x \in \left[\frac{1}{a^2}; \sqrt{a}\right]$.

2) $0 < a < 1$, тоді отримана логарифмічна система зводиться до наступної системи

$$\begin{cases} x \ge a^{\frac{1}{2}} \\ 0 < x \le a^{-2} \end{cases} \text{або} \begin{cases} x \ge \sqrt{a} \\ x \le \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

розв'язком якої є множина $x \in \left[\sqrt{a}; \frac{1}{a^2}\right]$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$, то розв'язків немає,
якщо $a \in (0; 1)$, то $x \in \left[\sqrt{a}; \frac{1}{a^2}\right]$,
якщо $a \in (1; \infty)$, то $x \in \left[\frac{1}{a^2}; \sqrt{a}\right]$.

Задачі для самостійної роботи.

20. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

20.1. $2\log_a^2 x + 5\log_a x - 2 \geq 0$
20.2. $\log_a^2 x + 6\log_a x + 5 \leq 0$
20.3. $\log_a^2 x - 4\log_a x + 3 \geq 0$
20.4. $\log_a^2 x - 2\log_a x < 0$
20.5. $\log_a^2 x + 2\log_a x - 3 \geq 0$
20.6. $\log_a^2 x - \log_a x - 3 \leq 0$
20.7. $9\log_a^2 x - 10\log_a x + 1 > 0$
20.8. $\log_a^2 (x-1) \geq 4$
20.9. $\log_a^2 x - 3\log_a x - 4 \leq 0$
20.10. $\log_a^2 x - 2\log_a x - 8 < 0$
20.11. $2\log_a^2 x + 3\log_a x - 2 \geq 0$
20.12. $7\log_a^2 x - 8\log_a x + 1 \leq 0$
20.13. $3\log_a^2 x - 10\log_a x + 3 > 0$
20.14. $\log_a^2 x + \log_a x \leq 2$
20.15. $\log_a^2 (2x-1) > 9$
20.16. $\log_a^2 x - \log_a x - 6 < 0$
20.17. $2\log_a^2 x - \log_a x - 3 \geq 0$
20.18. $\log_a^2 (x-1) + 6 > 5\log_a (x-1)$
20.19. $\log_a^2 (2-x) \geq 1$
20.20. $2\log_a^2 x + 9\log_a x - 5 < 0$

Зміст

Вступ
1. Лінійні рівняння 4
2. Лінійні нерівності 5
3. Раціональні рівняння 6
4. Раціональні нерівності 9
5. Квадратні рівняння 11
6. Квадратні нерівності 13
7. Застосування теореми Вієта до розв’язання задач з параметрами 18
8. Застосування властивостей квадратного тричлена до розв’язання задач з параметрами 23
9. Рівняння, що містять знак модуля 31
10. Ірраціональні рівняння 35
11. Ірраціональні нерівності 37
12. Тригонометричні рівняння 40
13. Показникові рівняння 42
14. Показникові нерівності 44
15. Логарифмічні рівняння 46
16. Логарифмічні нерівності 48

Посібник з дисципліни
"Задачі з параметрами"

Укладачі:

Біліченко Роман Олегович
Лескевич Тетяна Юріївна

Підписано до друку 2020 р. Формат 60×84/16. Папір
Друк . Ум. друк. арк. Ум. фарбовідб.
Обл.-вид. арк. Тираж 30 пр. Зам. №