Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу і теорії функцій

Збірник задач з математичного аналізу: множини, відображення, границі.

Дніпро

2022

Наведено задачі теоретичного характеру з математичного аналізу за темами дійсні числа, множини, границя послідовності та границя функції. Збірник містить детальні пояснення розв'язань деяких ключових задач. Також наведено велику кількість вправ для самостійного розв'язання, що допоможуть студентам краще засвоїти теоретичний матеріал дисципліни. Для студентів університету денної і заочної форм навчання, що вивчають математичний аналіз.

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету (протокол №10 від 28 червня 2022 року).

Рецензенти:
О. О. Пипка, завідувач кафедри геометрії та алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, доктор фізико-математичних наук, доцент.
В. К. Кірман, завідувач кафедри математичної, природничої та технологічної освіти Дніпровської академії неперервної освіти, кандидат педагогічних наук, доцент.

Збірник задач з математичного аналізу: множини, відображення, границі.

Укладач: кандидат фіз.-мат. наук, О. В. Коваленко

©Коваленко О. В., 2022

Зміст

1 Операції над множинами. Відображення **2**
1.1 Ключові задачі 2
1.2 Задачі для самостійного розв'язання 4

2 Точні нижня і верхня грані **5**
2.1 Ключові задачі 5
2.2 Задачі для самостійного розв'язання 6

3 Границя послідовності **7**
3.1 Ключові задачі 7
3.2 Задачі для самостійного розв'язання 9

4 Границя функції **11**
4.1 Ключові задачі 11
4.2 Задачі для самостійного розв'язання 13

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ **16**

1 Операції над множинами. Відображення

1.1 Ключові задачі

Задача 1 *За означенням* $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *Довести, що*

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Треба довести рівність множин

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Маємо

$$\begin{gathered} x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \implies (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) \\ \implies (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \implies (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) \\ \implies x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{gathered}$$

Таким чином

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \tag{1}$$

З іншого боку маємо

$$\begin{gathered} x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \implies (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \\ \implies (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) \implies x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B), \end{gathered}$$

звідки слідує, що

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \supset (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Разом зі співвідношенням (1), отримаємо необхідну рівність.

Задача 2 *Нехай* $\{A_\alpha\}_\alpha$ *— сім'я множин і* B *– деяка множина. Довести, що*

$$B \cap \left(\bigcup_\alpha A_\alpha \right) \subset \bigcap_\alpha (B \cup A_\alpha). \tag{2}$$

Чи можна замість знаку $\subset$ *поставити знак рівності?*

Маємо

$$x \in B \cap \left(\bigcup_\alpha A_\alpha \right) \implies x \in B \implies x \in B \cup A_\alpha \, \forall \alpha \implies x \in \bigcap_\alpha (B \cup A_\alpha),$$

і має місце включення (2). Якщо $B = \{1\}$, а $A_\alpha = \{2\} \forall \alpha$, то

$$B \cap \left(\bigcup_\alpha A_\alpha \right) = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset \neq \{1, 2\} = \bigcap_\alpha (\{1\} \cup \{2\}),$$

а отже існують такі множини B і A_α, для яких в (2) не має місця рівності.

Задача 3 *Знайти* $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$.

Покажемо, що $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = (-1,1)$. Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$, $\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \subset (-1,1)$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \subset (-1,1)$. З іншого боку, якщо $|x| < 1$, то знайдеться $n \in \mathbb{N}$ таке, що $|x| < 1-\frac{1}{n}$, а тому при такому n маємо $x \in \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$. Тому $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \supset (-1,1)$, звідки випливає анонсована рівність.

Задача 4 *Нехай X, Y — дві множини, $f\colon X \to Y$ — це деяке відображення, $B_\alpha \subset Y\ \forall\alpha$ і $B \subset Y$. Довести, що*

$$f^{-1}\left(B \setminus \bigcap_{\alpha} B_\alpha\right) = f^{-1}(B) \setminus \bigcap_{\alpha} f^{-1}\left(B_\alpha\right).$$

Нехай $x \in f^{-1}\left(B \setminus \bigcap_\alpha B_\alpha\right)$. Тоді

$$f(x) \in B \setminus \bigcap_{\alpha} B_\alpha \implies (f(x) \in B) \wedge \left(f(x) \notin \bigcap_{\alpha} B_\alpha\right)$$
$$\implies (f(x) \in B) \wedge (\exists\alpha\colon f(x) \notin B_\alpha) \implies (x \in f^{-1}(B)) \wedge \left(\exists\alpha\colon x \notin f^{-1}(B_\alpha)\right)$$
$$\implies (x \in f^{-1}(B)) \wedge \left(x \notin \bigcap_{\alpha} f^{-1}\left(B_\alpha\right)\right) \implies x \in f^{-1}(B) \setminus \bigcap_{\alpha} f^{-1}\left(B_\alpha\right).$$

Звідси слідує, що

$$f^{-1}\left(B \setminus \bigcap_{\alpha} B_\alpha\right) \subset f^{-1}(B) \setminus \bigcap_{\alpha} f^{-1}\left(B_\alpha\right). \tag{3}$$

Нехай тепер $x \in f^{-1}(B) \setminus \bigcap_\alpha f^{-1}\left(B_\alpha\right)$. Тоді

$$(x \in f^{-1}(B)) \wedge \left(x \notin \bigcap_{\alpha} f^{-1}\left(B_\alpha\right)\right) \implies (x \in f^{-1}(B)) \wedge \left(\exists\alpha\colon x \notin f^{-1}(B_\alpha)\right)$$
$$\implies (f(x) \in B) \wedge (\exists\alpha\colon f(x) \notin B_\alpha) \implies (f(x) \in B) \wedge \left(f(x) \notin \bigcap_{\alpha} B_\alpha\right)$$
$$\implies f(x) \in B \setminus \bigcap_{\alpha} B_\alpha \implies x \in f^{-1}\left(B \setminus \bigcap_{\alpha} B_\alpha\right).$$

Звідси слідує, що

$$f^{-1}\left(B \setminus \bigcap_{\alpha} B_\alpha\right) \supset f^{-1}(B) \setminus \bigcap_{\alpha} f^{-1}\left(B_\alpha\right). \tag{4}$$

Включення (3) та (4) доводять необхідну рівність.

Задача 5 *Побудувати бієкцію* $f\colon (0,1] \to [0,1]$.

Легко бачити, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ \frac{1}{n-1}, & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \\ x, & x \neq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

є шуканою бієкцією.

1.2 Задачі для самостійного розв'язання

1. Нехай $A_n := \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Довести, що

   (а) $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$;

   (б) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{1\}$.

2. Нехай $A_n := \{n, n+1, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$. Довести, що

   (а) $\bigcup_{n \geq m} A_n = A_m \, \forall m \in \mathbb{N}$.

   (б) $\bigcap_{n \geq m} A_n = \emptyset \, \forall m \in \mathbb{N}$.

   (в) $\bigcap_{n \leq m} A_n = A_m \, \forall m \in \mathbb{N}$.

3. Нехай $A_\alpha \subset M \forall \alpha$. Довести, що

   (а) $C_M \left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) = \bigcup_\alpha C_M A_\alpha$.

   (б) $C_M \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) = \bigcap_\alpha C_M A_\alpha$.

4. Нехай $\{A_\alpha\}_\alpha$ – сім'я множин і B – деяка множина. Довести, що

$$B \cup \left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) \supset \bigcup_\alpha (B \cap A_\alpha).$$

   Чи можна замість знаку $\supset$ поставити знак рівності?

5. Знайти

   (а) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right)$.

   (б) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{n-1}{n}\right)$.

   (в) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$.

   (г) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right]$.

6. Нехай X, Y — дві множини, $f\colon X \to Y$ — це деяке відображення, і $B_\alpha \subset Y \; \forall \alpha$. Довести, що

(а) $f^{-1}\left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}\left(B_\alpha\right)$; (б) $f^{-1}\left(\bigcap_\alpha B_\alpha\right) = \bigcap_\alpha f^{-1}\left(B_\alpha\right)$.

7. Нехай X, Y — дві множини, $f\colon X \to Y$ — це деяке відображення. Довести, що

   (а) $A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$, $A \subset X$. Чи можна замість знаку $\subset$ поставити знак рівності?

   (б) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$, $B \subset Y$.

8. Нехай X, Y — дві множини, $f\colon X \to Y$ — це деяке відображення, і $A_\alpha \subset X$ $\forall \alpha$. Довести, що

   (а) $f\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f\left(A_\alpha\right)$.

   (б) $f\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) \subset \bigcap_\alpha f\left(A_\alpha\right)$. Чи можна замість знаку $\subset$ поставити знак рівності?

9. Побудувати бієктивне відображення $f\colon X \to Y$, якщо:

   (а) $X = (-\infty, \infty)$, $Y = (0, +\infty)$;

   (б) $X = [1, 2]$, $Y = (-\infty, +\infty)$;

   (в) $X = (-\infty, \infty)$, $Y = [-2, 2]$;

   (г) $X = (-\infty, \infty)$, $Y = [0, +\infty)$;

   (д) $X = [0, +\infty)$, $Y = [1, +\infty)$.

   (е) $X = (-\infty, 0]$, $Y = [1, +\infty)$.

10. Нехай X, Y — дві множини, $f\colon X \to Y$ — це деяке відображення. Довести, що

    (а) (f — ін'єкція) $\iff$ $(\forall A, B \subset X, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B))$.

    (б) (f — ін'єкція) $\iff$ $(\forall A \subset X, f^{-1}(f(A)) = A)$.

    (в) (f — ін'єкція) $\iff$ $(\forall A \subset B \subset X, f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B))$.

2 Точні нижня і верхня грані

2.1 Ключові задачі

Задача 6 *Знайти* $\sup\{x \in \mathbb{Q}\colon x > 0, x^2 < 2\}$.

Позначимо $A := \{x \in \mathbb{Q}\colon x > 0, x^2 < 2\}$ і покажемо, що $\sup A = \sqrt{2}$. Якщо $x \in A$, то $x > 0$, а отже $x^2 < 2 \iff x \leq \sqrt{2}$, тобто $\sqrt{2}$ є верхньою гранню множини A. Якщо $\varepsilon > 0$ є довільним фіксованим числом, то існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $\varepsilon > \frac{1}{10^n}$. Тоді число $x_n = \frac{\left[10^n\sqrt{2}\right]}{10^n}$ (де $[y]$ — це ціла частина числа y, тобто найбільше ціле число, що не перевищує y) належить A і $x_n > \sqrt{2} - \varepsilon$. Тому $\sqrt{2}$ є найменшою верхньою гранню, що і треба було довести.

Задача 7 *Нехай $A \subset \mathbb{R}$ є обмеженою множиною. Покладемо $-A = \{x\colon -x \in A\}$. Доведіть, що* $\sup(-A) = -\inf A$.

Нехай $x \in -A$. Тоді $-x \in A$ і $-x \geq \inf A$. Звідси $x \leq -\inf A$, а отже в силу довільності x, число $-\inf A$ є верхньою гранню множини $-A$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує $y_\varepsilon \in A$ таке, що $\inf A + \varepsilon > y_\varepsilon$. Тоді $x_\varepsilon := -y_\varepsilon \in -A$ і $x_\varepsilon + \varepsilon > -\inf A$. Звідси слідує, що $-\inf A$ є найменшою верхньою гранню множини $-A$, що і треба було довести.

Задача 8 *Нехай $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ — це дві обмежені зверху послідовності дійсних чисел. Доведіть, що*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n. \tag{5}$$

Чи може мати місце строга нерівність?

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо $a_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ і $b_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$, а тому $a_n + b_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Звідси слідує нерівність (5). Якщо $\{a_n\} = \{1, 0, 0, \ldots\}$, $\{b_n\} = \{0, 1, 0, 0, \ldots\}$, то $\{a_n + b_n\} = \{1, 1, 0, 0, 0, \ldots\}$ і $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) = 1$, а тому для таких послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ нерівність (5) є строгою.

2.2 Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти

   (а) $\inf\{x \in \mathbb{Q}\colon x > 0, x^2 > 2\}$;

   (б) $\sup\{x \in \mathbb{Q}\colon x > 0, x^2 < 3\}$;

   (в) $\inf\{x \in \mathbb{Q}\colon x > 0, x^2 > 5\}$.

   (г) $\sup\{x \in \mathbb{Q}\colon x > 0, x^2 < 5\}$;

2. Нехай $A \subset \mathbb{R}$ є обмеженою множиною. Покладемо $-A = \{x\colon -x \in A\}$. Доведіть, що $\inf(-A) = -\sup A$.

3. Нехай $A \subset \mathbb{R}$ є множиною додатних чисел. Покладемо $\frac{1}{A} = \left\{x\colon \frac{1}{x} \in A\right\}$. Доведіть, що

   (а) Якщо $\inf A > 0$, то $\sup \frac{1}{A} = \frac{1}{\inf A}$;

   (б) Якщо A обмежена зверху, то $\inf \frac{1}{A} = \frac{1}{\sup A}$;

   (в) Якщо A необмежена зверху, то $\inf \frac{1}{A} = 0$.

4. Нехай $A, B \subset \mathbb{R}$ є обмеженими множинами. Покладемо $A \pm B = \{x \pm y\colon x \in A, y \in B\}$ і $A \cdot B = \{x \cdot y\colon x \in A, y \in B\}$. Доведіть, що

(а) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;

(б) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$;

(в) $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$;

(г) $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$;

(д) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, якщо $A, B \subset [0, \infty)$.

5. Нехай $A, B \subset \mathbb{R}$ є обмеженими множинами. Доведіть, що

   (а) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$;

   (б) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

6. Нехай $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ — це дві обмежені послідовності дійсних чисел. Доведіть, що

   (а) $\inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n + \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$;

   (б) $\inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n - b_n) \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n - \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$;

   (в) $\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n - b_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n - \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

   Чи можуть мати місце строгі нерівності?

3 Границя послідовності

3.1 Ключові задачі

Задача 9 *Про послідовність $\{a_n\}$ ненульових чисел відомо, що*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

Доведіть, що $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Нехай $\varepsilon > 0$ вибрано так, що $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 - 2\varepsilon$. Тоді існує таке число $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geq N$ маємо $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 - \varepsilon$. Звідси для всіх $n \geq N$ маємо

$$0 \leq |a_n| < (1-\varepsilon)|a_{n-1}| < (1-\varepsilon)^2|a_{n-2}| < \ldots < (1-\varepsilon)^{n-N}|a_N|.$$

За теоремою про проміжну послідовність отримаємо $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, звідки слідує необхідне.

Задача 10 *Доведіть, що якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ є збіжними, то послідовність $\{\max(a_n, b_n)\}$ є також збіжною і*

$$\lim_{n\to\infty} \max(a_n, b_n) = \max\left(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

Нехай $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ і $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Припустимо, що $a > b$. Тоді існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $a_n > b_n \forall n > N$, тобто $\max\{a_n, b_n\} = a_n \forall n > N$. Тоді $\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n = a = \max\{a, b\}$, що і треба було довести. Випадок $a < b$ розглядається аналогічно. Нехай, нарешті, $a = b$. Для кожного $\varepsilon > 0$ існують числа $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такі, що

$$|a_n - a| < \varepsilon \, \forall n > N_1 \text{ і } |b_n - b| = |b_n - a| < \varepsilon \, \forall n > N_2.$$

Тоді для всіх $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ маємо $|\max\{a_n, b_n\} - a| < \varepsilon$, звідки слідує, що $\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = a = \max\{a, b\}$.

Задача 11 *Рівно одна з послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ є збіжною. Чи можна щось сказати про збіжність послідовності $\{a_n + b_n\}$?*

Без зменшення загальності можемо вважати, що послідовність $\{a_n\}$ є збіжною, а послідовність $\{b_n\}$ є розбіжною. Припустимо, що послідовність $\{c_n := a_n + b_n\}$ є збіжною. Тоді і послідовність $\{c_n - a_n\}$ є збіжною, що суперечить умові, бо $c_n - a_n = b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, послідовність $\{a_n + b_n\}$ є розбіжною.

Задача 12 *Нехай задано дві обмежені послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ такі, що*

$$a_n \le b_n \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Довести, що $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

Оскільки послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ є обмеженими зверху, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують точні верхні грані $A_n := \sup_{k\ge n} a_k$ та $B_n := \sup_{k\ge n} b_k$. Більше того, з (6) слідує, що $A_n \le B_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і за означенням, послідовності $\{A_n\}$ і $\{B_n\}$ є незростаючими. Послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ є обмеженими знизу, тому обмеженими знизу будуть і послідовності $\{A_n\}$ і $\{B_n\}$. Тому вони є збіжними і

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n \le \lim_{n\to\infty} B_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n,$$

що і треба було довести.

Задача 13 *Довести, що будь-яка перестановка $\{a_{\pi(n)}\}$ збіжної послідовності $\{a_n\}$ є збіжною послідовністю.*

Нехай послідовності $\{a_n\}$ є збіжною і $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є бієкцією. Для довільного $\varepsilon > 0$ за критерієм Коші існує таке число $N \in \mathbb{N}$, що $|a_n - a_m| < \varepsilon$ для всіх $n, m > N$. Оскільки π є бієкцією, то множина $\pi^{-1}(\{1, 2, \ldots, N\})$ містить рівно N елементів, а тому існує її максимум N^*. Для всіх $k > N^*$ маємо $\pi(k) \notin \{1, 2, \ldots, N\}$, тобто $\pi(k) > N$. Тому для всіх $m, n > N^*$, $|a_{\pi(n)} - a_{\pi(m)}| < \varepsilon$. Отже, за критерієм Коші послідовність $\{a_{\pi(n)}\}$ є збіжною.

3.2 Задачі для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, якщо про послідовність $\{a_n\}$ додатних чисел відомо, що

   (а) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$; (б) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$.

2. Чи можна щось сказати про збіжність послідовності $\{a_n\}$, якщо про послідовність $\{a_n\}$ додатних чисел відомо, що

   (а) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$; (б) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

3. Доведіть, що $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, якщо про послідовність $\{a_n\}$ додатних чисел відомо, що

   (а) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; (б) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

4. Доведіть, що якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ є збіжними, то послідовність $\{\min(a_n, b_n)\}$ є також збіжною і

$$\lim_{n\to\infty} \min(a_n, b_n) = \min\left(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

5. Рівно одна з послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ є збіжною. Що можна сказати про збіжність послідовності

   (а) $\{\max(a_n, b_n)\}$; (г) $\{a_n \cdot b_n\}$;
   (б) $\{\min(a_n, b_n)\}$;
   (в) $\{a_n - b_n\}$; (д) $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, $b_n \neq 0 \forall n$?

6. Послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ є розбіжними. Що можна сказати про збіжність послідовності

   (а) $\{\max(a_n, b_n)\}$; (в) $\{a_n - b_n\}$; (д) $\{a_n \cdot b_n\}$;
   (б) $\{\min(a_n, b_n)\}$; (г) $\{a_n + b_n\}$; (е) $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, $b_n \neq 0 \forall n$?

7. Про послідовність $\{a_n\}$ відомо, що її підпослідовності

   (а) $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n+1}\}$ і $\{a_{3n}\}$ є збіжними;
   (б) $\{a_{2n}\}$ і $\{a_{2n+1}\}$ є збіжними;
   (в) $\{a_{2n}\}$ і $\{a_{3n}\}$ є збіжними;

(г) $\{a_{sn}\}$, $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$ є збіжними;

Чи обов'язково послідовність $\{a_n\}$ є збіжною?

8. Що можна стверджувати про послідовність цілих чисел, якщо відомо, що вона збіжна?

9. Із збіжної послідовності викреслили члени, які стоять на парних місцях. Чи буде послідовність, що залишилась, збіжна?

10. Чи можна члени натурального ряду переставити так, щоб одержана послідовність була збіжна?

11. Довести, що якщо послідовність збіжна, то в ній є або найбільший член, або найменший член, або і той і інший.

12. Про обмежену знизу послідовність $\{a_n\}$ відомо, що вона не має мінімального елемента. Доведіть, що $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

13. Про обмежену зверху послідовність $\{a_n\}$ відомо, що вона не має максимального елемента. Доведіть, що $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

14. Послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ мають одну і ту ж границю, чи правильно, що цю границю має і послідовність $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$?

15. Довести, що $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k| = 0$.

16. Довести, що границя послідовності не залежить від довільної зміни довільного скінченного числа членів послідовності.

17. Доведіть, що якщо існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $a_n \leq A$ для всіх $n > N$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq A$.

18. Доведіть, що якщо існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $a_n \geq A$ для всіх $n > N$, то $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq A$.

19. Доведіть, що якщо $\{a_n\}$ — це обмежена знизу послідовність і для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує натуральне $n_k > k$ таке, що $a_{n_k} \leq A$, то $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq A$.

20. Доведіть, що якщо $\{a_n\}$ — це обмежена зверху послідовність і для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує натуральне $n_k > k$ таке, що $a_{n_k} \geq A$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq A$.

21. Нехай задано дві обмежені послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ такі, що $a_n \leq b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Довести, що $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

22. Нехай послідовність $\{a_n\}$ збігається до числа a, а послідовність $\{b_n\}$ є обмеженою. Доведіть, що

    (а) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$;

    (б) $\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

23. Доведіть, що для довільної обмеженої послідовності $\{a_n\}$ має місце нерівність

    (а) $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \le \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$; (б) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \ge \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

    Чи обов'язково має місце рівність?

24. Доведіть, що для довільних обмежених послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ має місце нерівність

    (а) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n)$;

    (б) $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \ge \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n)$.

    Чи може нерівність бути строгою?

25. Довести, що такі послідовності не мають границі:

    (а) $a_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$; (б) $a_n = \cos n$, $n \in \mathbb{N}$; (в) $a_n = \operatorname{tg} n$, $n \in \mathbb{N}$.

4 Границя функції

4.1 Ключові задачі

Задача 14 *В термінах ε-δ записати означення* $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$.

За означенням, для будь-якої бази $\mathcal{B}$ і числа або одного з символів нескінченності A маємо

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A \iff \forall U(A) \exists B \in \mathcal{B}\colon f(B) \subset U(A).$$

В нашому випадку

$$\mathcal{B} = x \to 1 = \{(1-\delta, 1+\delta) \setminus \{1\}\colon \delta > 0\} = \{\{x\colon 0 < |x-1| < \delta\}, \delta > 0\},$$

$$A = \infty, \text{ тому } U(A) = U(\infty) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty) = \{x\colon |x| > \varepsilon\}, \varepsilon > 0.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\ (0 < |x-1| < \delta \implies |f(x)| > \varepsilon). \tag{7}$$

Задача 15 *В термінах ε-δ записати твердження про те, що ∞ не є границею функції f при $x \to 1$.*

Враховуючи (7), отримаємо:

$$\begin{aligned}
!\left(\lim_{x\to 1} f(x) = \infty\right) &\iff !\left(\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0\ (0 < |x-1| < \delta \implies |f(x)| > \varepsilon)\right) \\
&\iff \exists\varepsilon^* > 0\colon !(\exists\delta > 0\ (0 < |x-1| < \delta \implies |f(x)| > \varepsilon^*)) \\
&\iff \exists\varepsilon^* > 0\colon \forall\delta > 0\ !(0 < |x-1| < \delta \implies |f(x)| > \varepsilon^*)) \\
&\iff \exists\varepsilon^* > 0\colon \forall\delta > 0\ \exists 0 < |x^*-1| < \delta\colon !(|f(x^*)| > \varepsilon^*) \\
&\iff \exists\varepsilon^* > 0\colon \forall\delta > 0\ \exists x^* \in (1-\delta, 1+\delta) \setminus \{1\}\colon |f(x^*)| \le \varepsilon^*.
\end{aligned}$$

Задача 16 *Нехай існує $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, а $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ не існує. Що можна сказати про границю $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$?*

Якщо $f(x) = 0$, а $g(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ не існує. При цьому $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ існує і дорівнює 0.

Якщо $f(x) = 1$, а $g(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ не існує. При цьому $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} g(x)$ не існує.

Таким чином, при вказаних умовах границя добутку може існувати, а може не існувати.

Задача 17 *Обчислити $\omega(\sin x, [-1, 1))$.*

Функція sin є монотонно зростаючою на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а отже і на множині $[-1, 1) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тому для будь-яких $x, y \in [-1, 1)$,

$$|\sin x - \sin y| \le \sin 1 - \sin(-1) = 2\sin 1.$$

Звідси випливає, що

$$\omega(\sin x, [-1, 1)) = \sup_{x,y\in[-1,1)} |\sin x - \sin y| \le 2\sin 1.$$

З іншого боку, враховуючи неперервність функції sin,

$$|\sin x - \sin(-x)| = 2|\sin x| \to 2\sin 1, x \to 1.$$

Тому $\omega(\sin x, [-1, 1)) = 2\sin 1$.

Задача 18 *Доведіть, що при даній базі $\mathcal{B}$ $\sin x \cdot o(f) + 5 \cdot o(f) = o(f)$.*

За означенням існують нескінченно малі при базі $\mathcal{B}$ функції α_1 і α_2 і елемент B бази $\mathcal{B}$ такі, що для всіх $x \in B$,

$$\sin x \cdot o(f) + 5 \cdot o(f) = \sin x \cdot f(x) \cdot \alpha_1(x) + 5 \cdot f(x) \cdot \alpha_2(x) = (\alpha_1(x) \sin x + 5\alpha_2(x)) f(x).$$

Залишилось помітити, що функція $\alpha_1(x) \sin x + 5\alpha_2(x)$ є нескінченно малою при базі $\mathcal{B}$, оскільки добуток нескінченно малої на обмежену і сума двох нескінченно малих є нескінченно малою функцією.

Задача 19 *Відомо, що для кожного $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} f(a+n) = 0$. Чи слідує з цього, що $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?*

Ні. Для ірраціонального $\gamma > 0$ розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = n\gamma, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{для інших } x. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ не існує. Покажемо, що для такої функції виконуються умови задачі. Нехай $a \in \mathbb{R}$. З ірраціональності числа γ слідує, що не більше ніж один елемент з послідовності $\{a+n\}$ можна представити у вигляді $m\gamma$, $m \in \mathbb{N}$, а отже не більше ніж один елемент послідовності $\{f(a+n)\}$ є ненульовим. Тому $\lim_{n\to\infty} f(a+n) = 0$.

4.2 Задачі для самостійного розв'язання

1. В термінах ε-δ записати означення

   (а) $\lim\limits_{t\to A} f(t) = C$, $\lim\limits_{t\to A} f(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to A} f(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to A} f(t) = \infty$;

   (б) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = C$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \infty$;

   (в) $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = C$, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \infty$;

   (г) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = C$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$.

2. В термінах ε-δ записати твердження про те, що число C (символи ∞, $-\infty$, $+\infty$) не є границею функції f при

   (а) $t \to A \in \mathbb{R}$;

   (б) $t \to \infty$;

   (в) $t \to +\infty$;

   (г) $t \to -\infty$;

3. Нехай існує $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, а $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ не існує. Що можна сказати про границю

(а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$;

(б) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq 0$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))$;

(г) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-g(x))$;

(д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0 \forall x$;

(е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$, $f(x) \neq 0 \forall x$;

(ж) $\lim\limits_{x\to 0} \min\{f(x), g(x)\}$;

(и) $\lim\limits_{x\to 0} \max\{f(x), g(x)\}$?

4. Нехай границі $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ не існують. Що можна сказати про границю

(а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$;

(б) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-g(x))$;

(г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0 \forall x$;

(д) $\lim\limits_{x\to 0} \min\{f(x), g(x)\}$;

(е) $\lim\limits_{x\to 0} \max\{f(x), g(x)\}$?

5. Доведіть, що якщо існують границі $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, то

(а) $\lim\limits_{x\to 0} \max\{f(x), g(x)\} = \max\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 0} g(x)\right\}$.

(б) $\lim\limits_{x\to 0} \min\{f(x), g(x)\} = \min\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 0} g(x)\right\}$.

6. Обчислити

(а) $\omega(x^2, [-1, 2])$;

(б) $\omega(x^2, [-1, 2))$;

(в) $\omega(\operatorname{sgn} x, [-1, 2])$;

(г) $\omega(\operatorname{sgn} x, [-1, 2))$;

(д) $\omega(\operatorname{sgn} x, [-1, 0))$;

(е) $\omega(\operatorname{sgn} x, [-1, 0])$.

7. Обчислити коливання $\omega(f, E)$, де $E = (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ або $E = (0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$:

(а) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$;

(б) $f(x) = \cos \frac{1}{x}$;

(в) $f(x) = \operatorname{sgn} \frac{1}{x}$;

(г) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Що можна сказати про границі $\lim_{x\to 0} f(x)$ та $\lim_{x\to +0} f(x)$?

8. Доведіть, що при даній базі $\mathcal{B}$

(а) $2 \cdot o(f) + 3 \cdot o(f) = o(f)$;

(б) $o(f) \cdot o(f) = o(f^2)$;

(в) $o(f) \cdot O(f) = o(f^2)$;

(г) $O(f) \cdot O(f) = O(f^2)$.

9. Нехай $f = O(1)$, а $g = o(h)$ при деякій базі $\mathcal{B}$. Доведіть, що $fg = o(h)$ при базі $\mathcal{B}$.

10. Чи існує функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої при всіх $\alpha > 0$, $x^\alpha = o(f)$ при $x \to +\infty$?

11. Чи існує необмежена функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої при всіх $\alpha > 0$, $f = o(x^\alpha)$ при $x \to +\infty$?

12. Відомо, що при $x \to +\infty$

    (а) $f(x) \cdot \sin x = O(1)$; (б) $f(x) \cdot \cos x = O(1)$.

    Чи обов'язково $f = O(1)$ при $x \to +\infty$?

13. Відомо, що $f = O(x)$ при $x \to \infty$. Чи правда, що $f = o(x^2)$ при $x \to \infty$?

14. Відомо, що $f = O(x^2)$ при $x \to 0$. Чи правда, що $f = o(x)$ при $x \to 0$?

15. Відомо, що $f = o(1)$ при $x \to 0$. Чи обов'язково при $x \to 0$

    (а) $f = o(x)$; (б) $f = O(x)$?

16. Відомо, що кожна з функцій f, g є необмеженою в довільному околі $+\infty$. Чи може $fg = O(1)$ при $x \to +\infty$?

17. Відомо, що $f \sim g$ при $x \to +\infty$. Що можна сказати про справедливість асимптотичної при $x \to +\infty$ рівності

    (а) $f + g = o(1)$; (б) $f - g = o(1)$?

18. Нехай задано функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

    (а) Доведіть, що $\lim_{x\to 0} f(x) = A \iff \lim_{x\to 0} f(\sin x) = A$.
    (б) Доведіть, що $\lim_{x\to 0} f(x) = A \implies \lim_{x\to 0} f(|x|) = A$.
    (в) Чи правильно, що $\lim_{x\to 0} f(|x|) = A \implies \lim_{x\to 0} f(x) = A$?

19. Нехай $P(x)$ — це многочлен з додатніми коефіцієнтами. Обчислити

    (а) $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{|P(x)|}$; (б) $\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{|P(x)|}$; (в) $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{|P(x)|}$.

20. Покажіть, що з жодної з рівностей

    (а) $\lim_{x\to 0}(f(x) + f(2x)) = 0$; (б) $\lim_{x\to 0} f(x) \cdot f(2x) = 0$;

    не слідує, що $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу [Текст]: /Г. І. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. – М.: Наука, 2003. – 642 с.

Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст]/ Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1990. – 624 с.

Дороговцев, А. Я. Математичний аналіз [Текст]: в 2 т./ А. Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1993.

Зорич В. А. Математический анализ [Текст]: в 2 т./В.А. Зорич. – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 543 с.

Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа [Текст]/Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1989. – 736 с.

Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическоиу анализу [Текст]/ Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов.– М.: Наука, 1986. –100 с.

Ляшко, І. І. Математичний аналіз [Текст]: в 2 т./І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук. – К.: Вища шк., 1992.– 2 т.

Математический анализ в примерах и задачах [Текст]: в 2 т./ И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. – К.: Вища шк., 1974. – Т. 1: Введение в анализ. Производная. Интеграл. – 768 с.

Рудин, У. Основы математического анализа [Текст]/У. Рудин. – М.: Мир, 1976. – 420 с.

Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды [Текст]: в 2 т./Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1986. – Т. 2. – 528 с.

Фихтенгольц, Г. М. Курс математического анлиза [Текст]: в 2 т./Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1968. – Т. 1. – 440 с.