

Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет  
імені Олеся Гончара

---

Кафедра математичного аналізу і оптимізації

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З  
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ:  
НЕПЕРЕРВНІСТЬ, ПОХІДНА І  
ІНТЕГРАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Дніпро

2024

УДК 517(076)

3–41

Наведено задачі теоретичного характеру з математичного аналізу за темами неперервність, похідна і інтеграл функції однієї змінної. Збірник містить деякі теоретичні відомості по цим темам і детальні розв'язання деяких ключових задач. Також наведено велику кількість вправ для самостійного розв'язання, що допоможуть студентам краще засвоїти теоретичний матеріал дисципліни. Для студентів університету денної і заочної форм навчання, що вивчають математичний аналіз.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол №6 від 20 лютого 2024 року).

Рецензенти:

**О. О. Пипка**, завідувач кафедри геометрії та алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, доктор фізико-математичних наук, доцент.

**В. К. Кірман**, завідувач кафедри математичної, природничої та технологічної освіти Дніпровської академії неперервної освіти, кандидат педагогічних наук, доцент.

**Збірник задач з математичного аналізу: неперервність,  
похідна і інтеграл функції однієї змінної.**

Укладач: кандидат фіз.-мат. наук, О. В. Коваленко

©Коваленко О. В., 2024

# Зміст

<b>1</b>	<b>Неперервність функції</b>	<b>2</b>
1.1	Теоретичні відомості . . . . .	2
1.2	Ключові задачі . . . . .	4
1.3	Задачі для самостійного розв'язання . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Похідна функції</b>	<b>11</b>
2.1	Теоретичні відомості . . . . .	11
2.2	Ключові задачі . . . . .	14
2.3	Задачі для самостійного розв'язання . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Інтеграл функції</b>	<b>24</b>
3.1	Теоретичні відомості . . . . .	24
3.2	Ключові задачі . . . . .	26
3.3	Задачі для самостійного розв'язання . . . . .	29

# Розділ 1

## Неперервність функції

### 1.1 Теоретичні відомості

Функція  $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , називається *неперервною в точці*  $a \in X$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Зазначимо, що на відміну від поняття границі функції в точці, в означенні неперервності функції вимагається, щоб функція  $f$  була визначена у точці  $a$ .

Також відмітимо що у випадку, коли точка  $a$  є ізольованою точкою множини  $X$  (тобто знайдеться проколотий окіл  $U^\circ(a)$  точки  $a$ , для якого  $U^\circ(a) \cap X = \emptyset$ ), будь-яка функція  $f$  є неперервною в точці  $a$ . У випадку, коли  $a$  є граничною точкою для  $X$ , означення неперервності можна переписати у еквівалентній формі: функція  $f$  є неперервною у точці  $a$  тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{X \ni x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Справедливі такі локальні властивості неперервних функцій.

**Теорема 1** *Нехай функція  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in X$ . Тоді справедливі такі властивості.*

1. Функція  $f$  є обмеженою в деякому околі точки  $a$ .
2. Якщо  $f(a) \neq 0$ , то знайдеться окіл  $U(a)$  такий, що  $f(y) \neq 0$  для всіх  $y \in U(a)$ . При цьому якщо  $f(a) > 0$  ( $f(a) < 0$ ), то  $f(y) > 0$  ( $f(y) < 0$ ) для всіх  $y \in U(a)$ .

**Теорема 2** Нехай задано дві функції  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ , які є неперервними у точці  $a \in X$ . Тоді функції  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  а також  $\frac{f}{g}$  (остання — при умові  $g(a) \neq 0$ ) є неперервними у точці  $a$ .

**Теорема 3** Якщо функція  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$  неперервна у точці  $b \in Y$ , а функція  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервна у точці  $a \in X$  такий, що  $f(a) = b$ , то функція  $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною у точці  $a$ .

Якщо  $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною у кожній точці множини  $X$ , то кажуть, що вона є неперервною на  $X$ . Множину неперервних на множині  $X$  функцій позначають  $C(X)$ .

Справедливі такі глобальні властивості неперервних функцій.

**Теорема 4 (Больцано, Коші)** Неперервна на відрізку функція, яка приймає на його кінцях значень різних знаків, має нуль на цьому відрізку.

**Теорема 5 (Веєрштрасс)** Неперервна функція  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  є обмеженою на відрізку  $[a, b]$ . Крім того, функція  $f$  набуває свого найбільшого і найменшого значення на відрізку  $[a, b]$ , тобто існують такі точки  $m, M \in [a, b]$ , що для кожного  $x \in [a, b]$  виконується нерівність  $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ .

**Теорема 6 (Теорема про обернену функцію)** Строго спадна (зростаюча) функція  $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має обернену функцію

$$f^{-1}: Y := f(X) \rightarrow \mathbb{R},$$

яка є строго спадною (відповідно строго зростаючою) на  $Y$ . Якщо, крім того,  $X$  є відрізком  $[a, b]$ , а  $f$  — неперервна на ньому, то множина  $Y$  є відрізком з кінцями  $f(a)$  і  $f(b)$ , а функція  $f^{-1}$  є неперервною на ньому.

Функцію  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  будемо називати *рівномірно неперервною* на множині  $X \subset \mathbb{R}$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: (x, y \in X, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Якщо у термінах  $\varepsilon$ — $\delta$  записати означення неперервності функції на множині  $X$ :

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: (y \in X, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon),$$

то можна побачити відмінність між поняттями неперервності і рівномірної неперервності на множині. А саме, у означенні неперервності функції на множині число  $\delta$  може залежати як від точки  $x$ , так і від  $\varepsilon$ , а у означенні рівномірної неперервності  $\delta$  може залежати тільки від  $\varepsilon$ . З цього, зокрема, випливає, що кожна рівномірно неперервна на  $X$  функція є неперервною на множині  $X$ . Можна показати, що функції  $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ , та  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$  є неперервними, але не є рівномірно неперервними у своїх областях визначення; тобто, взагалі кажучи, з неперервності не випливає рівномірна неперервність. Але, якщо областю визначення функції є відрізок, то справедлива така теорема.

**Теорема 7 (Кантор)** *Функція, що є неперервною на відрізку, є рівномірно неперервною на цьому відрізку.*

## 1.2 Ключові задачі

**Задача 1** *Знайти усі точки неперервності функції*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ \sin |x|, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Покажемо, що функція  $f$  є неперервною у всіх точках вигляду  $\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  і є розривною у всіх інших точках.

Нехай спочатку  $x \neq \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тоді  $\sin |x| \neq 0$ . Нехай  $\{x_n\}$  — це послідовність раціональних чисел таких, що  $x_n \neq x$  для всіх

$n \in \mathbb{N}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Тоді  $f(x_n) = 0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , а отже  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ .

Нехай тепер  $y_n$  — це послідовність ірраціональних чисел таких, що  $y_n \neq x$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ . Тоді  $f(y_n) = \sin |y_n|$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . З неперервності функції  $\sin$  отримуємо  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \sin |x| \neq 0$ .

Таким чином, згідно з означенням за Гейне границі функції,  $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$  не існує, а отже функція  $f$  не є неперервною у точці  $x$ .

Нехай тепер  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тоді  $f(x) = 0$ . Функція  $y \mapsto \sin |y|$  є неперервною на  $\mathbb{R}$  як композиція двох неперервних функцій  $y \mapsto \sin y$  і  $y \mapsto |y|$ . Тому для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдеться  $\delta > 0$  таке, що  $|y - x| < \delta \implies |\sin |y| - \sin |x|| = |\sin |y|| < \varepsilon$ . Тоді як тільки  $|y - x| < \delta$ , то  $|f(x) - f(y)| = |f(y)| \leq |\sin |y|| < \varepsilon$ . З означення границі функції за Коші отримуємо, що  $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = 0 = f(x)$ , а отже функція  $f$  є неперервною у точці  $x$ .

**Задача 2** Доведіть, що для неперервної спадної функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і обмеженої послідовності  $\{x_n\}$  справедлива рівність

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Нехай  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Тоді існує підпослідовність  $\{x_{n_k}\}$  послідовності  $\{x_n\}$  для якої  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . З неперервності функції  $f$  отримуємо, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a)$ , а тому

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a) = f\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right). \quad (1.1)$$

З іншого боку, зафіксуємо довільне  $\varepsilon > 0$  і в силу неперервності  $f$  в точці  $a$  виберемо  $\delta > 0$  таке, що  $|x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . Нехай також  $\{x_{n_k}\}$  — це довільна збіжна підпослідовність послідовності  $\{x_n\}$ . Тоді  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq a$ , а тому починаючи з деякого номера маємо  $x_{n_k} > a - \delta$ . Беручи до уваги монотонність функції  $f$ , отримаємо, що для всіх достатньо великих  $k$ ,  $f(x_{n_k}) \leq f(a - \delta) <$

$f(a) + \varepsilon$ . Тому  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \leq f(a) + \varepsilon$ . З довільності підпослідовності  $\{x_{n_k}\}$  звідси випливає, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(a) + \varepsilon$ , а з довільності  $\varepsilon$  в свою чергу випливає нерівність  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(a)$ . З цієї нерівності і (1.1) отримуємо необхідне.

**Задача 3** Доведіть, що кожна неперервна періодична функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  досягає свого максимального і мінімального значення.

Нехай функція  $f$  має період  $T > 0$ . З неперервності функції  $f$  на відрізку  $[0, T]$  випливає існування  $M := \max_{x \in [0, T]} f(x)$  і точки  $\xi \in [0, T]$  для якої  $f(\xi) = M$ . З періодичності функції  $f$  маємо, що для кожного числа  $y \in \mathbb{R}$  існує число  $x \in [0, T]$  таке, що  $f(x) = f(y)$ . Тому  $f(y) \leq f(\xi)$ , а отже  $f(\xi) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ .

Існування  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$  доводиться аналогічно.

**Задача 4** Доведіть, що сума двох рівномірно неперервних на інтервалі  $(0, 1)$  функцій є рівномірно неперервною на  $(a, b)$ .

Нехай функції  $f$  і  $g$  є рівномірно неперервними на  $(0, 1)$ . Тоді для кожного  $\varepsilon > 0$  існують  $\delta_1, \delta_2 > 0$  такі, що для точок  $x, y \in (0, 1)$  справедливі імплікації  $|x - y| < \delta_1 \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$  і  $|x - y| < \delta_2 \implies |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Покладемо  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ . Якщо  $|x - y| < \delta$ , то

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Звідси випливає рівномірна неперервність функції  $f + g$ .

**Задача 5** Про функцію  $f \in C[0, 2]$  відомо, що  $f(0) = f(2)$ . Доведіть, що існують  $x, y \in [0, 2]$  такі, що  $f(x) = f(y)$  і  $x - y = 1$ .

Розглянемо функцію  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x + 1) - f(x)$ . Тоді  $g(0) = f(1) - f(0)$ ,  $g(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1) = -g(0)$ . З неперервності  $f$  випливає неперервність функції  $g$ , а з того факту, що  $g(0) = -g(1)$  і теореми Больцано – Коші випливає існування  $\xi \in [0, 1]$  такого, що  $g(\xi) = 0$ . Тоді  $y = \xi$  і  $x = \xi + 1$  є шуканими.

## 1.3 Задачі для самотійного розв'язання

1. Знайти усі точки неперервності функції

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

2. Доведіть, що якщо функція  $f$  є неперервною, то і функція  $|f|$  є також неперервною.
3. Чи обов'язково з неперервності функції  $|f|$  випливає неперервність функції  $f$ ?
4. Доведіть, що кожна неперервна періодична функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є обмеженою.
5. Наведіть приклад обмеженої функції  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не має ані найбільшого, ані найменшого значення.
6. Доведіть, що функція  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N} \text{ — взаємно прості, } m \leq n \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

не набуває найбільшого значення на жодному відрізку  $[a, b] \subset [0, 1]$ .

7. Чи існує неперервна необмежена функція?
8. Чи може неперервна функція не набувати максимального (мінімального) значення?
9. Наведіть приклад неперервної функції  $f$  для якої  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 1$ , і при цьому не існує  $\xi \in (0, 1)$  такого, що  $f(\xi) = 0$ .
10. Відомо, що  $g, h \in C[a, b]$ . Доведіть, що функція  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(a) \ f(x) = \max\{g(x), h(x)\}; \quad (б) \ f(x) = \min\{g(x), h(x)\},$$

теж неперервна на  $[a, b]$ .

11. Нехай  $f, g, h \in C[a, b]$  і для кожного  $x \in [a, b]$  позначимо через  $\varphi(x)$  те з чисел  $f(x), g(x)$  і  $h(x)$ , яке лежить посередині. Доведіть, що функція  $\varphi$  є неперервною на  $[a, b]$ .

12. Нехай  $f \in C[a, b]$  і  $m(x) = \inf_{t \in [a, x]} f(t)$ ,  $M(x) = \sup_{t \in [a, x]} f(t)$ ,  $x \in [a, b]$ . Доведіть, що  $m, M \in C[a, b]$ .

13. Відомо, що функція  $f$  є неперервною на  $[0, \infty)$  і існує скінченна границя  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Доведіть, що  $f$  обмежена на  $[0, \infty)$ .

14. Наведіть приклад неперервної на  $\mathbb{R}$  функції  $\varphi$  і обмеженої послідовності  $\{\alpha_n\}$  такої, що

$$(a) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_n) \neq \varphi \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \right);$$

$$(б) \ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_n) \neq \varphi \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \right).$$

15. Доведіть, що для неперервної зростаючої функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і обмеженої послідовності  $\{x_n\}$

$$(a) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right);$$

$$(б) \ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \right).$$

16. Доведіть, що для неперервної спадної функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і обмеженої послідовності  $\{\alpha_n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_n) = \varphi \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \right).$$

17. Доведіть, що функція Діріхле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (1.2)$$

є періодичною, але не має найменшого періоду.

18. Доведіть, що для функції

$$f(\varphi) = \begin{cases} \sin \frac{1}{\varphi}, & \varphi \in (0, 1] \\ 0, & \varphi = 0 \end{cases}$$

справедливе таке твердження: для всіх  $0 \leq a < b \leq 1$ , існує  $c \in [a, b]$  таке, що значення  $f(c)$  лежить між значеннями  $f(a)$  і  $f(b)$ .

19. Доведіть, що кожна неперервна функція  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  має нерухому точку, тобто таку точку  $x \in [0, 1]$ , що  $f(x) = x$ .

20. Припустимо, що  $f, g \in C[a, b]$ ,  $f(a) < g(a)$  і  $f(b) > g(b)$ . Доведіть, що функція  $f(x) - g(x)$  має хоча б один нуль на відрізку  $[a, b]$ .

21. Доведіть, що для рівномірно неперервної на  $(0, 1]$  функції  $f$  існує скінченна границя  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ .

22. Доведіть, що якщо функція  $f$  є рівномірно неперервною на  $(0, 1)$ , то вона є обмеженою на  $(0, 1)$ .

23. Нехай  $f, g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  — це дві рівномірно неперервні функції. Довести, що  $f \cdot g$  є рівномірно неперервною на  $(0, 1)$ .

24. Наведіть приклад двох рівномірно неперервних на  $(0, \infty)$  функцій, добуток яких не є рівномірно неперервною функцією.

25. Нехай  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ , є рівномірно неперервною на  $A$  і  $\{x_n\} \subset A$  — це фундаментальна послідовність. Доведіть, що  $\{f(x_n)\}$  є також фундаментальною послідовністю.

26. Відомо, що функція  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є рівномірно неперервною на  $[1, \infty)$  і  $f(1) = 0$ . Доведіть, що існує число  $M > 0$  таке, що  $\frac{|f(x)|}{x} \leq M$  для всіх  $x \geq 1$ .

## Розділ 2

# Похідна функції

### 2.1 Теоретичні відомості

Функція  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  називається *диференційовною* у точці  $x \in E$  (що є граничною для множини  $E$ ), якщо

$$f(x+h) - f(x) = A \cdot h + \alpha(x, h), x+h \in E \quad (2.1)$$

де  $A = A(x)$  — деяке число, а  $\alpha(x, h)$  — деяка функція, для якої  $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(x, h) = 0$ . *Диференціалом* диференційовної функції  $f$  в точці  $x$  називається лінійна функція  $h \mapsto A \cdot h$ ; диференціал зазвичай позначають через  $df$  або  $df(x)$ .

Можна показати, що функція  $f$  є диференційовною у точці  $x$  тоді і тільки тоді, коли існує границя

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$

яка називається *похідною* функції  $f$  у точці  $x$ . Відмітимо, що при виконання умови (2.1) число  $A$  визначається однозначно, і при цьому виконується рівність  $A = f'(x)$ .

Крім того, можна довести, що кожна диференційовна в точці функція є неперервною в цій точці. З неперервності, взагалі кажучи, диференційовність не впливає.

Справедливі такі локальні властивості диференційовних функцій.

**Теорема 8** Якщо функції  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовними у точці  $x \in X$ , то функції  $f + g$ ,  $f \cdot g$  і  $\frac{f}{g}$  (остання — у випадку, якщо  $g(x) \neq 0$ ) є диференційовними в  $x$  і

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)},$$

Аналогічні рівності справедливі для диференціалів.

**Теорема 9** Припустимо  $f: X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$  є диференційовною у точці  $x \in X$ , а функція  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною у точці  $y = f(x)$ . Тоді композиція  $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною у точці  $x$  і справедливі рівності

$$d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x),$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x).$$

**Теорема 10** Нехай функції  $f: X \rightarrow Y$  і  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  є взаємно оберненими і неперервними у точках  $x \in X$  і  $y = f(x) \in Y$  відповідно. Якщо функція  $f$  є диференційовною у точці  $x$  і  $f'(x) \neq 0$ , то функція  $f^{-1}$  диференційовна в точці  $y$  і

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ а також } df^{-1}(y) = (df(x))^{-1}.$$

Функція  $f$  називається *диференційовною на множині  $X$* , якщо  $f$  є диференційовною у кожній точці  $x \in X$ . Справедливі такі глобальні властивості диференційовних функцій.

**Теорема 11 (Ролль)** Якщо  $f \in C[a, b]$  і, крім того,  $f$  є диференційовною на інтервалі  $(a, b)$ , причому  $f(a) = f(b)$ , то існує точка  $\xi \in (a, b)$  така, що  $f'(\xi) = 0$ .

**Теорема 12 (Лагранж)** Якщо функція  $f \in C[a, b]$  є диференційовною на інтервалі  $(a, b)$ , то знайдеться така точка  $\xi \in (a, b)$ , що  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ .

Наступне твердження дає зв'язок між монотонністю функції і знаком її похідної.

**Теорема 13** Нехай задано диференційовну на  $(\alpha, \beta)$  функцію  $f$ . Тоді

$$\begin{aligned} f' > 0 &\implies f \text{ зростаюча на } (\alpha, \beta) \implies f' \geq 0; \\ f' \geq 0 &\implies f \text{ неспадна на } (\alpha, \beta) \implies f' \geq 0; \\ f' = 0 &\implies f \equiv \text{const} \implies f' = 0; \\ f' < 0 &\implies f \text{ спадає на } (\alpha, \beta) \implies f' \leq 0; \\ f' \leq 0 &\implies f \text{ незростаюча на } (\alpha, \beta) \implies f' \leq 0. \end{aligned}$$

Точка  $\xi \in E \subset \mathbb{R}$  називається точкою локального максимуму (мінімуму), а значення у ній — локальним максимумом (мінімумом) функції  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо існує окіл  $U_E(\xi)$  точки  $\xi$  у множині  $E$  такий, що  $\forall x \in U_E(\xi)$  маємо  $f(\xi) \geq f(x)$  (відп.  $f(\xi) \leq f(x)$ ). Точки локального максимуму і точки локального мінімуму також називають точками локального екстремуму. Точку  $\xi$  називають точкою внутрішнього екстремуму, якщо вона є точкою екстремуму і є граничною для обох множин  $E \cap (-\infty, \xi)$  та  $E \cap (\xi, +\infty)$ .

**Теорема 14 (Ферма)** Якщо  $\xi$  є точкою внутрішнього локального екстремуму функції  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , і функція  $f$  диференційовна у точці  $\xi$ , то  $f'(\xi) = 0$ .

**Теорема 15 (достатня умова екстремуму)** Нехай у деякому околі  $U(\xi)$  точки  $\xi$  задано функцію  $f: U(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ , що неперервна у точці  $\xi$  і диференційовна у проколотому околі  $U^\circ(\xi)$ . Нехай  $U_-^\circ = U^\circ \cap (-\infty, \xi)$  і  $U_+^\circ = U^\circ \cap (\xi, \infty)$ . Справедливі такі твердження:

1. Якщо  $y \in U_-^\circ \implies f'(y) < 0$  і  $y \in U_+^\circ \implies f'(y) < 0$ , то  $\xi$  не є точкою локального екстремуму функції  $f$ ;

2. Якщо  $y \in U_-^\circ \implies f'(y) < 0$  і  $y \in U_+^\circ \implies f'(y) > 0$ , то  $\xi$  є точкою локального мінімуму функції  $f$ ;
3. Якщо  $y \in U_-^\circ \implies f'(y) > 0$  і  $y \in U_+^\circ \implies f'(y) < 0$ , то  $\xi$  є точкою локального максимуму функції  $f$ ;
4. Якщо  $y \in U_-^\circ \implies f'(y) > 0$  і  $y \in U_+^\circ \implies f'(y) > 0$ , то  $\xi$  не є точкою локального екстремуму функції  $f$ ;

## 2.2 Ключові задачі

**Задача 6** Нехай  $f$  і  $g$  — неперервні функції, які не є диференційовними у точці 0. Чи можна щось сказати про існування похідної  $(f + g)'(0)$ ?

Якщо  $f(x) = g(x) = |x|$ , то функції  $f$ ,  $g$  і  $f + g$  є недиференційовними у точці нуль. Якщо ж  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = -|x|$ , то функції  $f$  і  $g$  є недиференційовними у точці 0, а функція  $f + g \equiv 0$  є диференційовною в точці 0. Таким чином при заданих умовах функція  $f + g$  може бути як диференційовною, так і недиференційовною у точці 0.

**Задача 7** Довести, що похідна диференційовної парної функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є непарною функцією.

Для довільного  $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi'(-\xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(-\xi + h) - \varphi(-\xi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi - h) - \varphi(\xi)}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi - h) - \varphi(\xi)}{-h} = -\varphi'(\xi), \end{aligned}$$

отже функція  $\varphi'$  є непарною.

**Задача 8** Про неперервні функції  $f$  та  $g$  відомо, що функція  $f$  є недиференційовною в точці  $g(0)$ , а функція  $g$  є недиференційовною в точці 0. Чи можна щось сказати про диференційовність функції  $f \circ g$  в точці 0?

Якщо  $f(x) = g(x) = |x|$ , то  $f \circ g = |x|$ , і отже всі три функції  $f$ ,  $g$  і  $f \circ g$  є недиференційовними у точці 0.

Якщо  $f(x) = \max\{0, -x\}$ ,  $g(x) = |x|$ , то  $f \circ g \equiv 0$  є диференційовною функцією.

Таким чином в умовах задачі композиція функцій може бути як диференційовною, так і недиференційовною в точці 0.

**Задача 9** Дослідити на диференційовність функцію

$$f(x) = |\sin x|.$$

Якщо  $x \neq \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , то існує окіл  $U(x)$  точки  $x$ , в якому  $f(y) = \sin y$  для всіх  $y \in U(x)$ , або в якому  $f(y) = -\sin y$  для всіх  $y \in U(x)$ . Тоді  $f$  є диференційовною в точці  $x$  (і  $f'(x) = \cos x$  у першому випадку і  $f'(x) = -\cos x$  у другому).

Покажемо, що  $f(x)$  не є диференційовною у точках  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Нехай для визначеності  $k$  — парне. Тоді  $f(x) = 0$ ,  $f(y) = -\sin y$  при  $y \in (\pi k - \pi, \pi k)$  і  $f(y) = \sin y$  при  $y \in (\pi k, \pi k + \pi)$ . Маємо

$$f'(x-0) = (-\sin y)'|_{y=x} = -1, f'(x+0) = (\sin y)'|_{y=x} = 1,$$

а отже не існує похідної  $f'(x)$ .

**Задача 10** Відомо, що функція  $\varphi$  є диференційовною в точці  $a$  і  $\varphi(a) > 0$ . Обчислити

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{n}\right)}{\varphi(a)} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Оскільки функція  $\varphi$  є диференційовною у точці  $a$ , то вона є неперервною в точці  $a$ , а тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{n}\right)}{\varphi(a)} = 1$ . Використовуючи другу визначну границю і теорему про границю композиції функцій отримаємо

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{n}\right)}{\varphi(a)} \right)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{n}\right) - \varphi(a)}{\varphi(a)} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{n}\right) - \varphi(a)}{\varphi(a)} \right)^{\frac{\frac{\varphi(a)}{\varphi\left(a + \frac{1}{n}\right) - \varphi(a)} \cdot \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{n}\right) - \varphi(a)}{n\varphi(a)}}}{\frac{\varphi(a)}{\varphi\left(a + \frac{1}{n}\right) - \varphi(a)} \cdot \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{n}\right) - \varphi(a)}{n\varphi(a)}}} \\
&= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{n}\right) - \varphi(a)}{n\varphi(a)}} = e^{\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}}
\end{aligned}$$

**Задача 11** Вважаючи число  $\pi$  відомим з необхідною точністю, обчислити число  $\cos 1^\circ$  з точністю  $10^{-4}$ .

Розглянемо многочлен Тейлора  $P_m$  для функції  $\cos x$  в околі точки 0 порядку  $m$  і виберемо  $m$  таким, що для  $\alpha = \frac{\pi}{180}$  виконувалась нерівність  $|\cos \alpha - P_m(\alpha)| < 10^{-4}$ . Для цього запишемо залишковий член у формі Лагранжа ( $\xi \in (0, \alpha)$ ):

$$\begin{aligned}
|r_m(\alpha)| &= \left| \frac{(\cos x)^{(m+1)}|_{x=\xi}}{(m+1)!} \alpha^{m+1} \right| \\
&\leq \left( \frac{\pi}{180} \right)^{m+1} \frac{1}{(m+1)!} \leq \frac{1}{(m+1)! \cdot 45^{m+1}}.
\end{aligned}$$

Легко бачити, що при  $m = 2$  права частина цієї нерівності менша за  $10^{-4}$ , а тому достатньо обчислити многочлен  $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$  в точці  $x = \frac{\pi}{180}$ .

## 2.3 Задачі для самостійного розв'язання

- Нехай  $f$  і  $g$  — неперервні функції такі, що існує  $f'(0)$ , а  $g'(0)$  не існує. Чи можна щось сказати про існування похідної  $h'(0)$ , якщо

(а)  $h = f \cdot g$ ;

(в)  $h = f + g$ ;

(б)  $h = f \cdot g$ , причому  $f'(0) \neq 0$ ;

(г)  $h = f - g$ ;

(д)  $h = \max\{f, g\};$

(е)  $h = \min\{f, g\}.$

2. Нехай  $f$  і  $g$  — неперервні функції, які не є диференційовними у точці 0. Чи можна щось сказати про існування похідної  $h'(0)$ , якщо

(а)  $h = f \cdot g;$

(в)  $h = \max\{f, g\};$

(б)  $h = f - g;$

(г)  $h = \min\{f, g\}.$

3. Чи можна щось сказати про диференційовність композиції  $f \circ g$  в точці 0, якщо  $f$  і  $g$  — неперервні функції такі, що

(а) функція  $f$  є недиференційовною в точці  $g(0)$ , а функція  $g$  є диференційовною в точці 0;

(б) функція  $f$  є диференційовною в точці  $g(0)$ , а функція  $g$  є недиференційовною в точці 0;

4. Доведіть, що похідна диференційовної періодичної функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною функцією.

5. Доведіть, що похідна кожної диференційовної непарної функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є функцією парною.

6. Доведіть, що функція  $f(x) = x^2 \mathcal{D}(x)$ , де  $\mathcal{D}$  — функція Діріхле, є диференційовною рівно в одній точці. Побудувати функцію, яка є диференційовною рівно в двох точках.

7. Побудувати неперервну функцію, яка має похідну в усіх точках, окрім

(а) однієї;

(б) двох;

(в)  $n \in \mathbb{N}$ .

8. Відомо, що функція  $f$  є диференційовною в усіх точках, окрім  $x$  і  $y$ ,  $x \neq y$ . Обчислити суму  $x + y$ , якщо функція  $f$  є

- (а) парною; (б) непарною.

9. Відомо, що функція  $f$  є диференційовною всюди, окрім трьох різних точок  $x$ ,  $y$  і  $z$ . Обчислити суму  $x + y + z$ , якщо функція  $f$  є

- (а) парною; (б) непарною.

10. Відомо, що функція  $g$  є неперервною в точці  $a$ . Для функції  $f(x) = (x - a)g$  довести існування і обчислити значення похідної  $f'(a)$ .

11. Відомо, що функція  $g$  є неперервною в точці  $a$  і  $g(a) \neq 0$ . Довести, що функція  $f(x) = |x - a|g(x)$  не є диференційовною в точці  $a$ .

12. Обчислити похідну функції  $y(x)$  безпосередньо, а також вводячи допоміжну змінну  $u = u(x)$ :

(а)  $y = \ln \left( \sin^2 x + \sqrt{1 + \sin^4 x} \right)$ ,  $u(x) = \sin^2 x$ ;

(б)  $y = (\arccos x)^2 \left( \ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2} \right)$ ,  $u(x) = \arccos x$ ;

(в)  $y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arccotg} a^{-x}$ ,  $u(x) = a^x$ .

13. Знайти похідну функції

(а)  $|t| \cdot \sin t$ ; (в)  $\arcsin \frac{1}{|t|}$ ;

(б)  $|x^2(x - 3)^3|$ ; (г)  $\cos |t|$ .

14. Знайти  $\varphi'(0)$ , якщо  $\varphi(t) = t \cdot (t + 1) \cdot (t + 2) \cdot \dots \cdot (t + 2024)$ .

15. Дослідити на диференційовність функцію

(а) 
$$\begin{cases} (t + 1)(t - 1)^2, & |t| \leq 1; \\ |t| - 1, & |t| > 1. \end{cases}$$

$$(\text{б}) \quad |1 + \cos x|;$$

$$(\text{в}) \quad |4x^2 - \pi^2| \cos^2 x;$$

16. За означенням знайти  $\varphi'(0)$ , якщо

$$(\text{а}) \quad \varphi(t) = \begin{cases} \sin\left(t \sin \frac{3}{t}\right), & t \neq 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

$$(\text{б}) \quad \varphi(t) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + t^2 \sin \frac{1}{t}\right)} - 1, & t \neq 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

$$(\text{в}) \quad \varphi(t) = \begin{cases} t^2 \cos \frac{4}{3t} + \frac{t^2}{2}, & t \neq 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

$$(\text{г}) \quad \varphi(t) = \begin{cases} \sin\left(e^{t^2 \sin \frac{5}{t}} - 1\right) + t, & t \neq 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

17. Знайти значення чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  і  $\delta$ , для яких функція  $\varphi$  є диференційовною

$$(\text{а}) \quad \varphi(t) = \begin{cases} \alpha t + \beta, & t \leq 0, \\ t^2 + 2t + 4, & 0 < t < 1, \\ \gamma t + \delta, & t \geq 1. \end{cases}$$

$$(\text{б}) \quad \varphi(t) = \begin{cases} \alpha t + \beta, & t \leq 0, \\ \gamma t^2 + \delta t, & 0 < t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{t}, & t > 1. \end{cases}$$

$$(\text{в}) \quad \varphi(t) = \begin{cases} \alpha t + \beta, & t \leq 1, \\ \alpha t^2 + \gamma, & 1 < t \leq 2, \\ \frac{\delta t^2 + 1}{t}, & t > 2. \end{cases}$$

18. Відомо, що функція  $f$  диференційовна в точці  $t$ . Знайти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t) \right).$$

Чи обов'язково з існування попередньої границі слідує диференційовність функції  $f$ ?

19. Довести, що функція

$$\varphi(t) = \begin{cases} t \sin\left(\frac{1}{t}\right), & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

не є диференційовною в точці 0.

20. Довести, що похідна функції

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right), & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

існує в кожній точці і є розривною в точці 0.

21. Доведіть, що функція  $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \cap (0, 2), \\ 2x - 1, & x \in (0, 2) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

є диференційовною тільки у точці  $x = 1$ ,  $f'(1) \neq 0$ . Чи є обернена функція диференційовною у точці  $y = 1 = f(1)$ ?

22. Доведіть, що з існування скінченних односторонніх похідних  $f'(x+0)$  і  $f'(x-0)$  випливає неперервність функції  $f$  в точці  $x$ .

23. Відомо, що функція  $f$  є диференційовною в точці  $b$ . Знайти

(а)  $\lim_{t \rightarrow b} \frac{tf(b) - bf(t)}{t-b};$

(б)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t f(t) - f(0)}{f(t) \cos t - f(0)},$  якщо  $f'(0) \neq 0;$

(в)  $\lim_{t \rightarrow b} \frac{b^n f(t) - t^n f(b)}{t-b}, n \in \mathbb{N}.$

24. Відомо, що функції  $f$  і  $g$  є диференційовними в точці  $b$ . Знайти

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{g(b)f(x) - g(x)f(b)}{x - b}.$$

25. Довести, що для всіх  $m \geq 1$

(а)

$$(e^t \sin t)^{(m)} = 2^{\frac{m}{2}} e^t \sin \left( t + \frac{m\pi}{4} \right), t \in \mathbb{R}.$$

(б)

$$(t^m \ln t)^{(m)} = m! \left( \ln t + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right), t > 0.$$

(в)

$$\left( \frac{\ln t}{t} \right)^{(m)} = (-1)^m m! t^{-m-1} \left( \ln t - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{m} \right), t > 0.$$

(г)

$$\left( t^{m-1} e^{\frac{1}{t}} \right)^{(m)} = (-1)^m \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^{m+1}}, t \neq 0.$$

26. Відомо, що функція  $\varphi$  є диференційовною в точці  $b$  і  $\varphi(b) > 0$ . Обчислити

$$\lim_{x \rightarrow b} \left( \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} \right)^{\frac{1}{\ln x - \ln b}}.$$

27. Чи справедливий висновок теореми Роля для функції  $f(x) = 1 - |x|^{\frac{2}{3}}$  на відрізку  $[-1, 1]$ . Чому?

28. Нехай функція  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  має неперервну на  $[0, 1]$  похідну порядку  $n$  і для деяких точок  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1$  мають місце рівності  $f(t_0) = f(t_1) = \dots = f(t_n)$ . Доведіть, що на інтервалі  $(0, 1)$  рівняння  $f^{(n)}(t) = 0$  має принаймні один розв'язок.

29. Чи справедливий висновок теореми Коші для функції  $f(x) = x^2$  і  $g(x) = x^3$  на відрізку  $[-1, 1]$ . Чому?
30. Довести, що якщо функція  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  диференційовна і необмежена на  $(0, 1)$ , то  $f'$  також необмежена на  $(0, 1)$ .
31. Відомо, що функція  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  диференційовна і обмежена на  $(0, 1)$ . Чи обов'язково  $f'$  є обмеженою на  $(0, 1)$ ?
32. Довести, що якщо функція  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  диференційовна на  $(0, 1)$ , а  $f'$  є обмеженою на  $(0, 1)$ , то  $f$  є рівномірно неперервною на  $(0, 1)$ .
33. Чи можна нерівності диференціювати почленно? Тобто чи слідує з нерівності  $f(x) \leq g(x)$  для всіх  $x \in (0, 1)$  нерівність  $f'(x) \leq g'(x)$  (де  $f, g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  — деякі диференційовні функції)?
34. Чи обов'язково похідна монотонної диференційовної функції є монотонною?
35. Нехай функції  $f$  та  $\varphi$  є диференційовними,  $\varphi'(x) > 0$ , і такими, що  $|f'(x)| \leq \varphi'(x)$  для всіх  $x$ . Доведіть, що для всіх  $x < y$  має місце нерівність

$$|f(y) - f(x)| \leq \varphi(y) - \varphi(x).$$

36. Відомо, що  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною функцією, для деякого  $c > 0$  має місце нерівність  $f'(x) > c$  для всіх  $x > 0$ , і  $f(0) < 0$ . Покажіть, що функція  $f$  має єдиний нуль на інтервалі  $\left(0, -\frac{f(0)}{c}\right)$ .
37. Довести тотожність
- (а)  $2 \operatorname{arctg} t + \arcsin \frac{2t}{1+t^2} = \pi, t \geq 1.$
- (б)  $2 \operatorname{arctg} t + \arcsin \frac{2t}{1+t^2} = -\pi, t \leq -1.$

(в)  $3 \arccos t - \arccos(3t - 4t^3) = \pi, |t| \leq \frac{1}{2}.$

38. Обчислити число  $x$  з точністю  $10^{-8}$ :

(а)  $x = e;$                       (б)  $x = e^2;$                       (в)  $x = \sin 1^\circ.$

## Розділ 3

# Інтеграл функції

### 3.1 Теоретичні відомості

Розбиттям  $P$  відрізка  $[a, b]$ ,  $a < b$  називається система точок  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Параметром  $\lambda(P)$  розбиття  $P$  називається величина  $\max_{i=1, \dots, n} x_i - x_{i-1}$ . Якщо для кожного  $i = 1, \dots, n$  на відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$  обрано точку  $\xi_i$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , то кажуть, що задано розбиття  $(P, \xi)$  з обраними точками. У множині розбиттів з обраними точками розглянемо базу  $\mathcal{B} = \{B_d, d > 0\}$ , де  $B_d$  складається з усіх розбиттів з обраними точками  $(P, \xi)$  для яких  $\lambda(P) < d$ . Так визначену базу  $\mathcal{B}$  зручно позначати  $\lambda(P) \rightarrow 0$ .

Для кожного розбиття з обраними точками  $(P, \xi)$  і функції  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  розглянемо величину

$$\sigma(f; P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

яка називається *інтегральною сумою Рімана* функції  $f$  по розбиттю з обраними точками  $(P, \xi)$ . Функцію  $f$  називають *інтегровною* на відрізку  $[a, b]$  (і записують  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ), якщо існує границя

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f; P, \xi) =: \int_a^b f(x) dx,$$

яку (якщо вона існує) називають *інтегралом* функції  $f$  по  $[a, b]$ .

**Теорема 16 (Необхідна умова інтегровності)**  $\exists f \in \mathcal{R}[a, b]$  впливає обмеженість функції  $f$  на відрізку  $[a, b]$ .

Можна довести, що кожна неперервна на  $[a, b]$  (більш загально, кожна обмежена на  $[a, b]$  функція, що має скінченну кількість точок розриву), а також кожна монотонна на  $[a, b]$  функція є інтегровою на  $[a, b]$ .

**Теорема 17** Якщо  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  і  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $f + g, f \cdot g, \alpha \cdot f, |f| \in \mathcal{R}[a, b]$ ; якщо  $[c, d] \subset [a, b]$ , то звуження  $f|_{[c, d]}$  функції  $f$  на відрізок  $[c, d]$  є інтегровним на  $[c, d]$ . Крім того, для будь яких  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Прикладом неінтегрової на жодному відрізку функції є функція Діріхле (1.2). Справедливі такі властивості інтеграла:

1. Якщо  $a \leq \xi \leq b$  і  $f$  інтегровна на  $[a, b]$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^\xi f(t) dt + \int_\xi^b f(x) dt;$$

2. Якщо  $f$  інтегровна на  $[a, b]$ , то

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt;$$

3. Якщо функції  $f$  та  $g$  інтегровні на  $[a, b]$  і  $f(t) \leq g(t)$  для всіх  $t \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

**Теорема 18** Нехай  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  і  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_a^x f(s) ds$ . Тоді в кожній точці  $y \in [a, b]$  неперервності функції  $f$ , функція  $F$  є диференційовною і  $F'(y) = f(y)$ . Зокрема, кожна неперервна

на  $[a, b]$  функція має первісну, і справедлива формула Ньютона–Лейбніца: якщо  $f \in C[a, b]$ , то для довільної первісної  $\mathcal{F}$  функції  $f$  має місце

$$\int_a^b f(t)dt = \mathcal{F}|_a^b =: \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a).$$

**Теорема 19 (Інтегрування за частинами)** Якщо функції  $f, g$  є неперервно диференційовними на відрізку  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b (f \cdot g')(t)dt = (f \cdot g)(t)|_a^b - \int_a^b (f' \cdot g)(t)dt.$$

**Теорема 20 (Заміна змінних в інтегралі)** Нехай  $g: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  — це неперервно диференційовне, строго монотонне відображення таке, що  $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ . Тоді для будь-якої  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $(f \circ g) \cdot g' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$  і виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

## 3.2 Ключові задачі

**Задача 12** Доведіть, що якщо функція  $f$  неперервна невід’ємна на відрізку  $[a, b]$ , і при цьому  $f(\xi) > 0$  для деякого  $\xi \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

З неперервності функції  $f$  у точці  $\xi$  випливає існування деякого відрізка  $[s, t] \subset [a, b]$  такого, що  $f(x) > \frac{1}{2}f(\xi)$  для всіх  $x \in [s, t]$ . Тоді, враховуючи невід’ємність  $f$  на  $[a, b]$ , отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^s f(x)dx + \int_s^t f(x)dx + \int_t^b f(x)dx \geq$$

$$\geq 0 + \frac{1}{2}(t-s)f(\xi) + 0 > 0.$$

**Задача 13** Визначити знак інтеграла  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \\ &- \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+\pi} dx = \int_0^{\pi} \left( \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x}{x+\pi} \right) dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

Враховуючи, що підінтегральна функція в останньому інтегралі неперервна на  $[0, 1]$  (якщо її довізначити значенням 1 у точці 0), невід'ємна і приймає додатних значень, то, враховуючи попередню задачу, отримаємо додатність початкового інтеграла.

**Задача 14** Обчислити  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ .

Покладемо  $f(x) = \cos x \ln \frac{1+x}{1-x}$ . Функція  $f$  є неперервною на відрізку  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  а тому і інтегровна на ньому. Крім того, для кожного  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , враховуючи, що  $\ln \frac{1-x}{1+x} = -\ln \frac{1+x}{1-x}$ , отримаємо

$$f(-x) = \cos(-x) \ln \frac{1-x}{1+x} = -\cos x \ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x),$$

тобто функція  $f$  є непарною. Тому  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 0$ .

**Задача 15** Знайти границю  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ ,  $\alpha > 0$ .

Розглянемо функцію  $f(x) = x^\alpha$ ,  $x \in [0, 1]$ . Ця функція є неперервною на  $[0, 1]$ , а отже і інтегрованою на цьому відрізку. Крім того,

$$\begin{aligned} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} &= \frac{1}{n} \left( \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha + \left(\frac{2}{n}\right)^\alpha + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^\alpha \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Переходячи до границі при  $n \rightarrow \infty$ , згідно з означенням інтеграла Рімана, отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

**Задача 16** Довести, що якщо  $f$  — неперервна на відрізку  $[0, 1]$ , то

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi t f(\sin t) dt = \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t f(\sin t) dt &= \left\{ \begin{array}{ll} y = \pi - t & dy = -dt \\ t = 0 \rightarrow y = \pi & t = \pi \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \\ &= - \int_\pi^0 (\pi - y) f(\sin(\pi - y)) dy = \int_0^\pi (\pi - y) f(\sin y) dy \end{aligned}$$

Додаючи ліву і праву частини рівності, маємо

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\pi t f(\sin t) dt &= \int_0^\pi t f(\sin t) dt + \int_0^\pi (\pi - y) f(\sin y) dy = \\ &= \int_0^\pi t f(\sin t) dt + \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt = \int_0^\pi \pi f(\sin t) dt, \end{aligned}$$

звідки отримуємо необхідне.

### 3.3 Задачі для самостійного розв'язання

1. Відомо, що функції  $f$  і  $g$  не інтегровні на відрізку  $[a, b]$ . Що можна сказати про інтегровність на  $[a, b]$  функції

(а)  $f + g$ ;

(в)  $f - g$ ;

(б)  $f \cdot g$ ;

(г)  $\frac{f}{g}$ ?

2. Відомо, що рівно одна з функцій  $f$  і  $g$  є інтегровою на відрізку  $[a, b]$ . Що можна сказати про інтегровність на  $[a, b]$  функції

(а)  $f + g$ ;

(в)  $f - g$ ;

(б)  $f \cdot g$ ;

(г)  $\frac{f}{g}$ ?

3. Довести, що кожна з первісних непарної функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є парною функцією.

4. Довести, що одна з первісних парної функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є непарною функцією.

5. Відомо, що функція  $|f|$  інтегровна на відрізку  $[a, b]$ . Чи завжди  $f$  інтегровна на відрізку  $[a, b]$ ?

6. Відомо, що функція  $f^2$  інтегровна на відрізку  $[a, b]$ . Чи завжди  $f$  інтегровна на відрізку  $[a, b]$ ?

7. Визначити знак інтеграла

(а)  $\int_{-1}^1 t^3 \cdot 2^t dt$ ;

(б)  $\int_{2^{-1}}^1 t^2 \ln t dt$ .

8. Порівняти числа

(а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx$  і  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ ;

(б)  $\int_0^1 e^{-x} dx$  і  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ;

$$\begin{array}{ll}
(\text{В}) \int_0^1 2^{x^2} dx \text{ i } \int_0^1 2^{x^3} dx; & (\text{Д}) \int_1^2 \ln x dx \text{ i } \int_1^2 (\ln x)^2 dx; \\
(\text{Г}) \int_1^2 2^{x^2} dx \text{ i } \int_1^2 2^{x^3} dx; & (\text{Е}) \int_3^4 \ln x dx \text{ i } \int_3^4 (\ln x)^2 dx; \\
& (\text{Ж}) \int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \text{ i } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.
\end{array}$$

9. Знайти границю

$$\begin{array}{ll}
(\text{а}) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx; & (\text{В}) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos^n x dx. \\
(\text{б}) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin^n x dx; & (\text{Г}) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.
\end{array}$$

10. Довести, що якщо  $f$  — неперервна на відрізку  $[1, 3]$ , то

$$\int_1^3 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(1+2x) dx.$$

11. Довести, що якщо  $f$  — неперервна на відрізку  $[0, 2]$ , то

$$\int_0^2 t^3 f(t^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 t f(t) dt.$$

12. Довести, що якщо  $f$  — неперервна на відрізку  $[0, 1]$ , то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

13. Обчислити

$$\begin{array}{ll}
 \text{(а)} \quad \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{10} \cdot \sin^9 x dx; & \text{(в)} \quad \int_{-1}^1 \sin^2 x \ln \frac{5+x}{5-x} dx; \\
 \text{(б)} \quad \int_{-1}^1 \frac{2x^7 - x^5 + 3x^3 - 4x}{\operatorname{ch}^2 x} dx; & \text{(г)} \quad \int_{-1}^1 \operatorname{tg}^2 x \ln \frac{3+x}{3-x} dx.
 \end{array}$$

14. Нехай  $f(t)$  — неперервна функція, а функції  $u(x)$  і  $v(x)$  — диференційовні. Довести, що

$$\left( \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right)' = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x).$$

15. Знайти точки екстремуму функції

$$f(x) = \int_0^x (s-3)(s+1)e^{-s^2} ds.$$

16. Знайти похідну

$$\begin{array}{ll}
 \text{(а)} \quad \frac{d}{dx} \int_{x^{\frac{1}{2}}}^{x^2} e^{s^2} ds; & \text{(в)} \quad \frac{d}{dx} \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}; \\
 \text{(б)} \quad \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt; & \text{(г)} \quad \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.
 \end{array}$$

17. Знайти границю

$$\begin{array}{ll}
 \text{(а)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos(s^2) dt; & \text{(б)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \int_0^x \operatorname{arctg}^2 t dt.
 \end{array}$$

18. Обчислити

$$\begin{array}{ll}
 \text{(а)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right); & \\
 \text{(б)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right); &
 \end{array}$$

- (в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+4} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2} \right);$
- (г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n} \right);$
- (д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$

19. Покажіть, що якщо  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — періодична, інтегровна на кожному відрізку функція, то функція  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  може бути представленою у вигляді суми лінійної і періодичної функцій.

20. Відомо, що функція  $f$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ . Доведіть, що

$$\lim_{h \rightarrow +0} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$