

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу та оптимізації

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИЧНОГО
АНАЛІЗУ: НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛ,
ЧИСЛОВІ РЯДИ І ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ
ЗМІННИХ.

Дніпро
2024

УДК 517(076)

3–41

Збірник містить задачі теоретичного характеру з математичного аналізу за темами невластний інтеграл, числові ряди і границя та неперервність функцій багатьох змінних. Наведено деякі теоретичні відомості по цим темам і детальні розв'язання ключових задач. Крім того, збірник містить велику кількість задач для самостійного розв'язання, які можуть бути корисними для кращого засвоєння теоретичного матеріалу курсу математичного аналізу для студентів математичних спеціальностей.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол 10 від 25.06.2024 року).

Рецензенти:

О. О. Пипка, завідувач кафедри геометрії та алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, доктор фізико-математичних наук, доцент.

В. К. Кірман, завідувач кафедри математичної, природничої та технологічної освіти Дніпровської академії неперервної освіти, кандидат педагогічних наук, доцент.

Збірник задач з математичного аналізу: невластний інтеграл, числові ряди і функції багатьох змінних.

Укладач: кандидат фіз.-мат. наук, О. В. Коваленко

©Коваленко О. В., 2024

Зміст

1	Невласний інтеграл	3
1.1	Теоретичні відомості	3
1.2	Приклади розв’язання задач	6
1.3	Задачі для самостійного розв’язання	10
2	Числові ряди	14
2.1	Теоретичні відомості	14
2.2	Приклади розв’язання задач	18
2.3	Задачі для самостійного розв’язання	20
3	Границя і неперервність функцій багатьох змінних	23
3.1	Теоретичні відомості	23
3.2	Приклади розв’язання задач	27
3.3	Задачі для самостійного розв’язання	29

Розділ 1

Невласний інтеграл

1.1 Теоретичні відомості

Нехай $a \in \mathbb{R}$, $\omega > a$ або $\omega = +\infty$ і задано функцію $f: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ таку, що для кожного $b \in [a, \omega)$ функція f інтегровна на відрізку $[a, b]$. Якщо існує $\lim_{b \rightarrow \omega-0} \int_a^b f(x)dx$, то кажуть, що невластний інтеграл

$$\int_a^\omega f(x)dx \quad (1.1)$$

функції f по проміжку $[a, \omega)$ є *збіжним*, а сама функція f є *інтегровою у невластному сенсі* по проміжку $[a, \omega)$. В протилежному випадку кажуть, що цей інтеграл є *розбіжним*.

Іноді у випадку $\omega = +\infty$ інтеграл (1.1) називають невластним інтегралом *першого роду*, а у випадку $\omega \in \mathbb{R}$ — невластним інтегралом *другого роду*.

Справедливе таке твердження.

Теорема 1 *Нехай $\omega \in \mathbb{R}$ або $\omega = +\infty$, функції $f, g: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровними на кожному відрізку $[a, b] \subset [a, \omega)$ і інтеграли*

$$\int_a^\omega f(x)dx, \int_a^\omega g(x)dx$$

є збіжними. Тоді

1. Якщо $\omega \in \mathbb{R}$ і функція f інтегровна на відрізку $[a, \omega]$, то значення інтеграла $\int_a^\omega f(x)dx$ у невластному сенсі співпадає з його значенням, яке розуміється у власному сенсі.

2. Якщо $c \in [a, \omega)$, то

$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\omega f(x)dx.$$

3. Якщо $\varphi: [\alpha, \gamma) \rightarrow [a, \omega)$ є неперервно диференційовним строго монотонним відображенням таким, що $\lim_{\beta \rightarrow \gamma-0} \varphi(\beta) = \omega$, то невластний інтеграл функції $t \mapsto (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)$ на $[\alpha, \gamma)$ існує, і справедлива рівність

$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_\alpha^\gamma (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)dt.$$

4. Для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функція $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ є інтегровою у невластному сенсі на проміжку $[a, \omega)$ і справедлива рівність

$$\int_a^\omega (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x)dx = \alpha \int_a^\omega f(x)dx + \beta \int_a^\omega g(x)dx.$$

5. Нехай додатково f і g є неперервно диференційовними на $[a, \omega)$ та існує границя $\lim_{x \rightarrow \omega-0} (f \cdot g)(x)$. Тоді функції $f \cdot g'$ та $f' \cdot g$ одночасно інтегровні, або неінтегровні у невластному сенсі на $[a, \omega)$. У випадку інтегровності справедлива рівність

$$\int_a^\omega (f \cdot g')(x)dx = (f \cdot g)(x)|_a^\omega - \int_a^\omega (f' \cdot g)(x)dx,$$

де

$$(f \cdot g)(x)|_a^\omega = \lim_{x \rightarrow \omega-0} (f \cdot g)(x) - f(a) \cdot g(a).$$

Справедливий такий критерій інтегровності у невластному сенсі.

Теорема 2 (критерій Коші) Нехай функція $f: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на кожному відрізку $[a, b] \subset [a, \omega)$. Невласний інтеграл (1.1) є збіжним тоді і тільки тоді коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $B \in [a, \omega)$ таке, що

$$b, c > B \implies \left| \int_b^c f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Якщо збігається невластний інтеграл

$$\int_a^\omega |f(x)| dx, \tag{1.2}$$

то кажуть, що інтеграл (1.1) збігається *абсолютно*. Якщо ж збігається інтеграл (1.1), а інтеграл (1.2) —розбігається, то кажуть, що інтеграл (1.2) збігається *умовно*. З абсолютної збіжності випливає збіжність невластного інтеграла. Крім того, існують умовно збіжні інтеграли.

Важливим інструментом для доведення збіжності невластних інтегралів є така теорема.

Теорема 3 (теорема порівняння) Нехай $f, g: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровними на кожному відрізку $[a, b] \subset [a, \omega)$. Якщо для всіх $x \in [a, \omega)$ має місце нерівність

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

то зі збіжності невластного інтеграла $\int_a^\omega g(x) dx$ випливає збіжність невластного інтеграла (1.1) і нерівність

$$\int_a^\omega f(x) dx \leq \int_a^\omega g(x) dx,$$

а з розбіжності інтеграла (1.1) випливає розбіжність інтеграла $\int_a^\omega g(x) dx$.

Найчастіше теорема порівняння може бути використаною тільки для дослідження питання абсолютної збіжності інтегралів. Іноді для дослідження умовної збіжності інтегралів є корисними такі ознаки.

Теорема 4 (ознаки Абеля і Діріхле) Нехай $f, g: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровними на кожному відрізку $[a, b] \subset [a, \omega)$, при чому функція g є монотонною. Для збіжності невластного інтеграла

$$\int_a^\omega (f \cdot g)(x) dx$$

достатньо, щоб виконувалась одна з двох наступних пар умов:

1. Інтеграл (1.1) збігається;
2. Функція g є обмеженою на $[a, \omega)$.

Або

1. Функція $x \mapsto \int_a^x f(x) dx$ є обмеженою на $[a, \omega)$;
2. $\lim_{x \rightarrow \omega-0} g(x) = 0$.

1.2 Приклади розв'язання задач

Задача 1 Функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є такими, що інтеграл

$$\int_1^\infty f(x) dx \tag{1.3}$$

є збіжним і

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{1.4}$$

Що можна сказати про збіжність інтеграла

$$\int_1^\infty g(x) dx? \tag{1.5}$$

Очевидно, що при $g = f$ умова (1.4) виконується (вважаючи, що $f(x) \neq 0 \forall x$), а інтеграл (1.5) збігається. Покажемо, що цей інтеграл може також розбігатись.

Розглянемо функції

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in [2n-1, 2n], n \in \mathbb{N} \\ -\frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (2n, 2n+1), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

і $g(x) = f(x) + \frac{1}{x}$, $x \geq 1$. Спочатку покажемо, що виконується умова (1.4). Якщо $x \in [2n-1, 2n]$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \rightarrow 1, x \rightarrow +\infty;$$

якщо ж $x \in (2n, 2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \rightarrow 1, x \rightarrow +\infty,$$

а отже умова (1.4) дійсно виконується.

Далі покажемо, що інтеграл (1.3) збігається. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо $A > 0$ так, щоб $\int_A^{A+2} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \varepsilon$. Нехай B, C , $A < B < C$ — це довільні числа. Виберемо натуральні числа n, m так, щоб відрізок $[2n-1, 2m+1]$ був найбільшим відрізком з непарними кінцями, що міститься у $[B, C]$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_B^C f(x)dx &= \int_B^{2n-1} f(x)dx + \int_{2n-1}^{2m-1} f(x)dx + \int_{2m-1}^C f(x)dx \\ &\geq -\varepsilon + \sum_{k=n}^{m-1} \int_{2k-1}^{2k+1} f(x)dx - \varepsilon; \end{aligned}$$

для оцінок знизу ми використали вибір точки A і монотонність функції $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Для кожного $k = n, \dots, m-1$, знову використовуючи монотонність функції $\frac{1}{\sqrt{x}}$, отримаємо

$$\int_{2k-1}^{2k+1} f(x)dx = \int_{2k-1}^{2k} \frac{1}{\sqrt{x}}dx - \int_{2k}^{2k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \geq 0.$$

Об'єднуючи отримані оцінки, отримаємо оцінку $\int_B^C f(x)dx \geq -2\varepsilon$. Аналогічно, розглядаючи найбільший відрізок виду $[2n, 2m]$, що міститься у $[B, C]$ і проводячи аналогічні міркування, отримаємо, що $\int_B^C f(x)dx \leq 2\varepsilon$. Тому $\left| \int_B^C f(x)dx \right| \leq 2\varepsilon$, а отже за критерієм Коші, інтеграл (1.3) є збіжним.

Нарешті, покажемо, що інтеграл (1.5) є розбіжним. Якщо припустити, що цей інтеграл є збіжним, то і інтеграл

$$\int_1^\infty (g(x) - f(x))dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$

був би збіжним, що неможливо. Таким чином інтеграл (1.5) є розбіжним.

Задача 2 Про неперервно диференційовну функцію $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збігається абсолютно і похідна f' є обмеженою функцією. Доведіть, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Розглянемо інтеграл $\int_1^\infty f(x)f'(x)dx$. Якщо $C > 0$ є такою, що $|f'(x)| < C$ для всіх $x > 1$, то

$$\int_1^\infty |f(x)f'(x)|dx \leq C \int_1^\infty |f(x)|dx < \infty,$$

а отже $\int_1^\infty f(x)f'(x)dx$ збігається абсолютно (тому і просто збігається). Тому існує границя

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f(x)f'(x)dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f(x)df(x) \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x)}{2} \Big|_1^A = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} (f^2(A) - f^2(1)). \end{aligned}$$

Тому існує границя $\lim_{A \rightarrow +\infty} f^2(A)$, а отже, в силу неперервності функції f , і границя $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A)$. З вправи 11 буде впливати, що $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A) = 0$.

Можливе і менш штучне, але дещо більш громіздке доведення цього твердження.

Припустимо, що 0 не є границею функції f при $x \rightarrow +\infty$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що для будь-якого $A > 1$ існує $x_A > A$ для якого $|f(x_A)| > \varepsilon$.

Нехай $C > 0$ є такою, що $|f'(x)| < C$ для всіх $x > 1$. Виберемо $\delta = \frac{\varepsilon}{2C}$. Тоді для всіх $x \in (x_A, x_A + \delta)$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x_A) - f(x)| &= \left| \int_{x_A}^x f'(t) dt \right| \leq \int_{x_A}^x |f'(t)| dt \\ &\leq C \cdot |x_A - x| \leq C \cdot \delta = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

а тому $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ для таких x , при чому функція f приймає значення одного знаку на всьому інтервалі $(x_A, x_A + \delta)$. Але тоді

$$\left| \int_{x_A}^{x_A + \delta} f(x) dx \right| = \int_{x_A}^{x_A + \delta} |f(x)| dx \geq \delta \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon^2}{4C},$$

і оскільки при фіксованому ε число x_A може бути вибраним скільки завгодно великим, ця нерівність суперечить критерію Коші збіжності невластного інтеграла $\int_1^\infty f(x) dx$.

Задача 3 Про незростаючу функцію $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що інтеграл

$$\int_1^\infty f(x) dx \tag{1.6}$$

збігається. Доведіть, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$.

Покажемо, що функція f є невід'ємною на $[1, \infty)$. Якщо для деякого $x > 1$ маємо $f(x) < 0$, то в силу монотонності f отримаємо, що для будь-якого $y > x$

$$\left| \int_y^{y+1} f(u) du \right| = \int_y^{y+1} |f(u)| du \geq |f(y)| \geq |f(x)| > 0,$$

що, враховуючи критерій Коші, суперечить збіжності невластного інтеграла (1.6).

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і в силу збіжності невластного інтеграла (1.6) виберемо точку $x_0 > 1$ таку, що

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx < \varepsilon.$$

Для довільного $x > x_0$ в силу монотонності і невід'ємності f маємо

$$(x - x_0)f(x) \leq \int_{x_0}^x f(y)dy \leq \int_{x_0}^{\infty} f(y)dy < \varepsilon.$$

Тому $xf(x) \leq \frac{x}{x-x_0}\varepsilon$ для всіх $x > x_0$, а отже $xf(x) < 2\varepsilon$ як тільки $x > 2x_0$. З цього випливає, що $xf(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

1.3 Задачі для самостійного розв'язання

1. Функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємними і такими, що інтеграли $\int_1^{\infty} f(x)dx$ та $\int_1^{\infty} g(x)dx$ є розбіжними. Що можна сказати про збіжність інтеграла

$$\begin{array}{ll} \text{(а)} \int_1^{\infty} (f(x) + g(x))dx; & \text{(в)} \int_1^{\infty} \max\{f(x), g(x)\}dx; \\ \text{(б)} \int_1^{\infty} (f(x) - g(x))dx; & \text{(г)} \int_1^{\infty} \min\{f(x), g(x)\}dx? \end{array}$$

2. Функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є такими, що інтеграли $\int_1^{\infty} f(x)dx$ та $\int_1^{\infty} g(x)dx$ є розбіжними. Що можна сказати про збіжність інтеграла

$$\begin{array}{ll} \text{(а)} \int_1^{\infty} (f(x) + g(x))dx; & \text{(в)} \int_1^{\infty} \max\{f(x), g(x)\}dx; \\ \text{(б)} \int_1^{\infty} (f(x) - g(x))dx; & \text{(г)} \int_1^{\infty} \min\{f(x), g(x)\}dx? \end{array}$$

3. Функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємними і такими, що інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ є збіжним, а інтеграл $\int_1^{\infty} g(x)dx$ є розбіжним. Що можна сказати про збіжність інтеграла

- (а) $\int_1^\infty (f(x) + g(x))dx$; (в) $\int_1^\infty \max\{f(x), g(x)\}dx$;
 (б) $\int_1^\infty (f(x) - g(x))dx$; (г) $\int_1^\infty \min\{f(x), g(x)\}dx$?

4. Функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є такими, що інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ є збіжним, а інтеграл $\int_1^\infty g(x)dx$ є розбіжним. Що можна сказати про збіжність інтеграла

- (а) $\int_1^\infty (f(x) + g(x))dx$; (в) $\int_1^\infty \max\{f(x), g(x)\}dx$;
 (б) $\int_1^\infty (f(x) - g(x))dx$; (г) $\int_1^\infty \min\{f(x), g(x)\}dx$?

5. Функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є такими, що інтеграли $\int_1^\infty f^2(x)dx$ та $\int_1^\infty g^2(x)dx$ є збіжними. Що можна сказати про абсолютну збіжність інтеграла $\int_1^\infty f(x)g(x)dx$?

6. Функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є такими, що інтеграли $\int_1^\infty f^2(x)dx$ та $\int_1^\infty g^2(x)dx$ є збіжними. Довести, що $\int_1^\infty (f(x) + g(x))^2 dx$ є також збіжним.

7. Про функцію $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збігається.

- (а) Чи обов'язково функція f є обмеженою?
 (б) Чи обов'язково $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

8. Про додатну функцію $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збігається.

- (а) Чи обов'язково функція f є обмеженою?
 (б) Чи обов'язково $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

9. Про додатну неперервну функцію $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збігається.

- (а) Чи обов'язково функція f є обмеженою?
 (б) Чи обов'язково $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

10. Про незростаючу функцію $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0.$$

Чи обов'язково інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ є збіжним?

11. Про функцію $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збігається і існує границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Доведіть, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

12. Відомо, що функція f є рівномірно неперервною на $[1, \infty)$ і інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збігається. Доведіть, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

13. Про функцію $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що вона інтегровна на кожному відрізку $[0, a]$, $a > 0$, і існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =: A$. Доведіть, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(y)dy$ існує і дорівнює A .

14. Про невід'ємну незростаючу функцію $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що інтеграл $\int_0^1 x^\alpha f(x)dx$ збігається для деякого $\alpha \geq 0$. Доведіть, що $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\alpha+1} f(x) = 0$.

15. Про функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збігається, а функція g є обмеженою. Чи можна щось сказати про збіжність інтеграла $\int_1^\infty f(x)g(x)dx$?

16. Про функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збігається абсолютно, а функція g є обмеженою. Чи можна щось сказати про збіжність інтеграла $\int_1^\infty f(x)g(x)dx$?

17. Про додатні функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ є розбіжним. Доведіть, що хоча б один з інтегралів $\int_1^\infty f(x)g(x)dx$ або $\int_1^\infty \frac{f(x)}{g(x)}dx$ є також розбіжним.

18. Про функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що $f(x) \leq g(x)$ для всіх $x \geq 1$ і інтеграл $\int_1^\infty g(x)dx$ є збіжним. Чи можна щось сказати про збіжність інтеграла $\int_1^\infty f(x)dx$?
19. Про функції $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що $f(x) \leq g(x)$ для всіх $x \geq 1$ і інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ є розбіжним. Чи можна щось сказати про збіжність інтеграла $\int_1^\infty g(x)dx$?
20. Доведіть, що інтеграли $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ та $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$
- (а) Збігаються тільки при $\alpha > 0$.
 - (б) Збігаються абсолютно тільки при $\alpha > 1$.
21. Знайти множину значень α , для яких збігається інтеграл
- (а) $\int_1^\infty e^{-\alpha x} dx$;
 - (б) $\int_{-\infty}^1 e^{\alpha x} dx$;
 - (в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} dx$;
 - (г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x dx$.

Розділ 2

Числові ряди

2.1 Теоретичні відомості

Нехай задано послідовність дійсних чисел $\{a_n\}$. Вираз

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (2.1)$$

називають *рядом*, а число $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ — n -ю частковою сумою ряду (2.1), $n \in \mathbb{N}$ (або просто *частковою сумою ряду*). Якщо існує границя $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд (2.1) називають *збіжним*, а число S — його *сумою*. В протилежному випадку ряд (2.1) називають *розбіжним*.

Справедливий такий критерій збіжності ряду.

Теорема 5 (критерій Коші) Для того, щоб збігався ряд (2.1) необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ знайшлося $N \in \mathbb{N}$ таке, що

$$n \geq m \geq N \implies \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon.$$

Безпосередньо з критерія Коші випливає проста, але важлива необхідна умова збіжності рядів.

Теорема 6 (необхідна умова збіжності ряду) Якщо ряд (2.1) збігається, то границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ існує і дорівнює 0.

Відмітимо, що необхідна умова збіжності, взагалі кажучи, не є достатньою умовою. Прикладом розбіжного ряду (2.1) для якого виконується необхідна умова є гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Ряд (2.1) називається *абсолютно збіжним*, якщо є збіжним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Якщо ряд (2.1) є збіжним, але не абсолютно збіжним, то кажуть, що ряд (2.1) є *умовно збіжним*.

Перевірка на абсолютну збіжність ряду зводиться до питання збіжності ряду з невід'ємними членами. Для рядів з невід'ємними членами справедливі такі теореми.

Теорема 7 Якщо члени послідовності $\{a_n\}$ є невід'ємними, то ряд (2.1) збігається тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум є обмеженою зверху.

Теорема 8 (теорема порівняння) Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряди з невід'ємними членами. Якщо починаючи з деякого $N \in \mathbb{N}$ справедливі нерівності $a_n \leq b_n$, $n \geq N$, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Відмітимо, що невід'ємність членів обох рядів є суттєвою у цій теоремі.

Як наслідок з теореми порівняння можна отримати декілька достатніх умов абсолютної збіжності рядів.

Теорема 9 (мажорантна ознака Вейерштрасса) Якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ є такими, що починаючи з деякого $N \in \mathbb{N}$ справедливі нерівності $|a_n| \leq b_n$, $n \geq N$, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає абсолютна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 10 (ознака Коші) Нехай задано ряд (2.1) і

$$\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Справедливі такі твердження:

1. Якщо $\alpha < 1$, то ряд (2.1) збігається абсолютно.
2. Якщо $\alpha > 1$, то ряд (2.1) розбігається.
3. Існують як збіжні, так і розбіжні ряди, для яких $\alpha = 1$.

Теорема 11 (ознака Даламбера) Нехай задано ряд (2.1), для якого існує границя

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Справедливі такі твердження:

1. Якщо $\beta < 1$, то ряд (2.1) збігається абсолютно.
2. Якщо $\beta > 1$, то ряд (2.1) розбігається.
3. Існують як збіжні, так і розбіжні ряди, для яких $\beta = 1$.

Відмітимо, що дві останні теореми по суті використовують порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, який абсолютно збігається, якщо $|q| < 1$ і розбігається для інших $q \in \mathbb{R}$. Також зазначимо, що усі попередні ознаки збіжності давали достатні умови для абсолютної збіжності, а отже не можуть бути застосованими до умовно збіжних рядів.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad (2.2)$$

де $\{a_n\}$ — це послідовність невід’ємних чисел, називається *знако-альтернуючим*.

Теорема 12 (ознака Лейбніца) Якщо послідовність $\{a_n\}$ монотонно прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, то ряд (2.2) є збіжним. Крім того, якщо S — це сума цього ряду, а $\{S_n\}$ — це послідовність його часткових сум, то

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

Числові ряди тісно пов'язані з невластими інтегралами. Наприклад, якщо $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є константою на кожному з напівінтервалів $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, то невластий інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ перетворюється на ряд $\sum_{n=1}^\infty f(n)$. Справедлива така теорема, яка дає зв'язок між збіжністю невластного інтеграла і відповідного ряду.

Теорема 13 (Коші, Маклорен) *Якщо функція $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і незростаючою, то ряд $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігається невластий інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$.*

Безпосередньо з цієї теореми випливає той факт, що ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$. Ряди такого виду часто зручно використовувати при застосуванні теорем порівняння.

Для дослідження умовної збіжності рядів інколи корисний такий дискретний аналог ознак Абеля і Діріхле.

Теорема 14 (ознаки Абеля і Діріхле) *Нехай задано послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, причому послідовність $\{a_n\}$ є монотонною. Для збіжності ряду $\sum_{n=1}^\infty a_n \cdot b_n$ достатньо, щоб виконувалась одна з двох наступних пар умов:*

1. Ряд $\sum_{n=1}^\infty b_n$ збігається;
2. Послідовність a_n є обмеженою.

Або

1. Послідовність $B_n := \sum_{k=1}^n b_k$ є обмеженою;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Відмітимо, що ознака Лейбніца є частинним випадком ознаки Абеля – Діріхле.

2.2 Приклади розв'язання задач

Задача 4 *Незростаючі послідовності додатних чисел $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ є такими, що ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ є розбіжними. Чи можна щось сказати про збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, де $c_k = \min\{a_k, b_k\}$, $k \in \mathbb{N}$?*

Очевидно, що якщо $a_n = b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то $c_k = a_k = b_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ є розбіжним.

Покажемо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ може бути і збіжним.

Почнемо з послідовностей $a_k = b_k = \frac{1}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}$ і поміняємо деякі їх члени так, щоб $\min\{a_k, b_k\} = \frac{1}{k^2}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, послідовності залишились монотонними і невід'ємними, але при цьому щоб ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ стали розбіжними. Для цього перевизначимо $a_2 = a_3 = \dots = a_{2^2+1} = \frac{1}{2^2}$ (так, що $a_2 + \dots + a_5 = 1$), $b_{2^2+2} = \dots = b_{2^2+1+6^2} = \frac{1}{6^2}$, (так, що $b_6 + \dots + b_{41} = 1$); $a_{42} = \dots = a_{41+42^2} = \frac{1}{42^2}$, і так далі. Для цих послідовностей виконуються вказані вище властивості, і кожна з них містить нескінченну кількість блоків елементів, сума яких дорівнює 1. Тому ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ є розбіжними.

Задача 5 *Про ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з додатними членами відомо, що $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ для всіх достатньо великих $n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Покладемо $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. Тоді для всіх достатньо великих n маємо $c_{n+1} \leq c_n$. Тому послідовність c_n є обмеженою, а отже існує $C > 0$ таке, що $0 \leq c_n \leq C$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \leq C \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Задача 6 *Відомо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ містить невід'ємні члени і розбігається. Що можна сказати про збіжність рядів*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n + 1}, \quad (2.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{na_n + 1} ? \quad (2.4)$$

Покажемо, що ряд (2.3) є розбіжним.

Якщо послідовність $\{a_n\}$ є необмеженою, то знайдеться підпослідовність $\{a_{n_k}\}$, яка прямує до $+\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Тоді

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k}}{a_{n_k} + 1} = 1,$$

а отже не виконується необхідна умова збіжності рядів.

Якщо ж послідовність $\{a_n\}$ є обмеженою, то існує число $C > 0$ таке, що $0 \leq a_n \leq C$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_n}{a_n + 1} \geq \frac{a_n}{C + 1} \geq 0,$$

а тому з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і теореми порівняння отримуємо розбіжність ряду (2.3).

Тепер покажемо, що ряд (2.4) може бути як збіжним, так і розбіжним.

Якщо $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, то обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{na_n + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ є розбіжними.

Розглянемо послідовність

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = m^2, m \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{n^2}, & n \text{ не є квадратом натурального числа.} \end{cases}$$

Тоді a_n є послідовністю додатних чисел, що не прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, а отже ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним.

Для довільного $N \in \mathbb{N}$ маємо

$$0 \leq \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{na_n + 1} \leq \sum_{n=1}^N \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} + \sum_{m: m^2 \leq N} \frac{1}{1 + m^2 \cdot 1} \leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 + 1},$$

а тому ряд (2.4) є збіжним.

2.3 Задачі для самостійного розв'язання

1. Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є розбіжними. Що можна сказати про збіжність ряду

(а) $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$;
(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$; (г) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$?

2. Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є розбіжними і $a_n, b_n \geq 0$ для всіх $n \geq 1$. Що можна сказати про збіжність ряду

(а) $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$;
(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$; (г) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$?

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є розбіжними. Що можна сказати про збіжність ряду

(а) $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$;
(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$; (г) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$?

4. Відомо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є розбіжними, і $a_n, b_n \geq 0$ для всіх $n \geq 1$. Що можна сказати про збіжність ряду

(а) $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$;
(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$; (г) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$?

5. Довести, що ряд з чисел, обернених до членів арифметичної прогресії, розбігається.

6. Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є збіжними і $a_n \leq c_n \leq b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається

7. Довести, що якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з невід'ємними членами збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ також збігається.

8. Чи впливає зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2?$$

9. Відомо, що $a_n \geq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, і що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ збігається. Чи обов'язково ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збігається?

10. Довести, що якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ збігаються, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

збігається абсолютно.

11. Довести, що якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ збігаються, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$$

також збігається.

12. Відомо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Чи можна стверджувати, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є збіжним?

13. Відомо, що $a_n \geq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Доведіть, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ також збігається.

14. Наведіть приклад послідовності невід'ємних чисел $\{a_n\}$ такої, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — розбігається.

15. Доведіть, що якщо послідовність невід'ємних чисел $\{a_n\}$ є незростаючою, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ впливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

16. Відомо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ містить невід'ємні члени і розбігається. Що можна сказати про збіжність ряду

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2 a_k + 1}; \quad (б) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_k^2 + 1}?$$

17. Чи можна узяти вимогу монотонності послідовності $\{a_n\}$ у

(а) ознаці Лейбніца;

(б) ознаці Абеля;

(в) ознаці Діріхле?

18. Навести приклад послідовності $\{a_n\}$ такої, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним, і для кожного $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n=1} (a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}) = 0.$$

19. Навести приклад послідовності $\{a_n\}$, для якої

(а) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ є збіжним;

(б) Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ є розбіжними;

(в) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ є розбіжним;

(г) Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ є збіжними.

20. Навести приклад розбіжного ряду з обмеженою послідовністю часткових сум.

Розділ 3

Границя і неперервність функцій багатьох змінних

3.1 Теоретичні відомості

Для $n \in \mathbb{N}$ через \mathbb{R}^n позначаємо множину впорядкованих наборів (x_1, \dots, x_n) , де $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Для двох точок $x = (x_1, \dots, x_n)$ та $y = (y_1, \dots, y_n)$ через $d(x, y)$ позначимо *відстань* між точками x та y , яка визначається формулою

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Функція d задовольняє таким властивостям:

1. $d(x, y) \geq 0$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}^n$ і $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Для фіксованих $a \in \mathbb{R}^n$ і $\delta > 0$ множину

$$B(a, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \delta\}$$

називають відкритою *кулею* простору \mathbb{R}^n з центром в точці a і радіусом δ . Множина $A \subset \mathbb{R}^n$ називається *відкритою*, якщо для кожної точки $a \in A$ знайдеться $\delta = \delta(a) > 0$ таке, що $B(a; \delta) \subset A$. Множина $B \subset \mathbb{R}^n$ називається *замкненою*, якщо множина $\mathbb{R}^n \setminus B$ є відкритою.

Можна довести, що об'єднання будь-якої сім'ї і перетин скінченної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною, а також що об'єднання скінченної сім'ї і перетин будь-якої сім'ї замкнених множин є замкненою множиною.

Множина $K \subset \mathbb{R}^n$ називається *компактною*, якщо у будь-якому її покритті відкритими множинами існує скінченне підпокриття, тобто якщо

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} K_{\alpha},$$

де A — деяка множина індексів і $K_{\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ є відкритою множиною для кожного $\alpha \in A$, то знайдуться $n \in \mathbb{N}$ і $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ такі, що

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n K_{\alpha_i}.$$

Множина $A \subset \mathbb{R}^n$ називається *обмеженою*, якщо знайдеться деяка куля, що містить множину A . Можна довести, що множина $K \subset \mathbb{R}^n$ є компактною тоді і тільки тоді, коли вона є замкненою і обмеженою.

Околом точки $a \in \mathbb{R}^n$ називається будь-яка відкрита множина $A \subset \mathbb{R}^n$, що містить точку a ; зокрема, куля $B(a, \delta)$, $\delta > 0$ є околом точки a . Якщо $U(a)$ — це деякий окіл точки a , то множину $U^{\circ}(a) = U(a) \setminus \{a\}$ будемо називати *проколотим околом* точки a .

Якщо \mathcal{B} — це деяка база у деякій множині X , то, як і у випадку дійснозначних функцій, будемо казати, що $\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A \in \mathbb{R}^n$, якщо для будь-якого околу $V(A)$ точки A існує елемент бази $B \in \mathcal{B}$ такий, що $f(B) \subset V(A)$. Зокрема, якщо $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$, база \mathcal{B} складається з усіх проколотих околів $U^{\circ}(a) \subset X$ точки $a \in \mathbb{R}^m$, то приходимо до означення границі функції $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ у точці a . Це означення можна записати у формі

Коші таким чином:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \\ (0 < d(a, x) < \delta \implies d(f(x), A) < \varepsilon).$$

Відмітимо, що якщо $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ і $A = (A_1, \dots, A_n)$, то

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A \iff \lim_{\mathcal{B}} f_i(x) = A_i \forall i = 1, \dots, n,$$

тобто збіжність у скінченно-вимірних просторах \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ є поординатною. Тому для границь функцій зі значеннями у \mathbb{R}^n справедливі аналоги основних властивостей границь дійснозначних функцій. Зокрема, функція $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ може мати при даній базі не більше ніж одну границю; якщо існує $\lim_{\mathcal{B}} f(x)$, то функція f обмежена на деякому елементі $B \in \mathcal{B}$ бази \mathcal{B} , тобто множина $f(B) \subset \mathbb{R}^n$ є обмеженою. Також справедливий аналог теореми про границю композиції.

Теорема 15 *Нехай X і Y — деякі множини, \mathcal{B}_X і \mathcal{B}_Y — бази у цих множинах, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ — це функція, що має границю при базі \mathcal{B}_Y , і функція $f: X \rightarrow Y$ є такою, що для кожного елемента B_Y бази \mathcal{B}_Y існує елемент B_X бази \mathcal{B}_X такий, що $f(B_X) \subset B_Y$. Тоді існує границя $\lim_{\mathcal{B}_X} (g \circ f)(x)$ і ця границя дорівнює $\lim_{\mathcal{B}_Y} g(y)$.*

Відмітимо, що вже для функцій двох змінних $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ границю $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$, взагалі кажучи, не можна обчислити переходячи послідовно до границь по кожній з координат. Тобто, взагалі кажучи,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y), \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right) \text{ і } \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right)$$

є різними величинами, які можуть існувати або не існувати незалежно одна від одної, а у випадку існування не зобов'язані бути рівними.

Функцію $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ будемо називати *неперервною у точці $x \in X$* , якщо існує границя $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ і ця границя дорівнює $f(x)$. Функцію f будемо називати *неперервною на множині X* , якщо вона є неперервною у кожній точці $x \in X$.

Справедливі такі локальні властивості неперервних функцій декількох змінних.

Теорема 16 1. *Неперервна у точці $a \in A$ функція $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ є обмеженою в деякому околі $U(a)$ точки a .*

2. *Якщо функція $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^k$ є неперервною у точці $y \in Y$, а функція $f: X \rightarrow Y$ є неперервною у точці $x \in X$ такий, що $f(x) = y$, то композиція $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ є неперервною у точці x .*

3. *Якщо функція $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною у точці $x \in X$ і $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), то знайдеться околі $U(x)$ точки x в якому виконується нерівність $f(y) > 0$ (відповідно $f(y) < 0$) для всіх $y \in U(x)$.*

4. *Якщо функції $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервними у точці $x \in X$, то функції $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ і $\frac{f}{g}$ є неперервними у точці x (остання — при умові, що $g(x) \neq 0$).*

Функція $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається *рівномірно неперервною* на множині X , якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $x, y \in X, d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Множина $X \subset \mathbb{R}^n$ називається *лінійно зв'язною*, якщо для будь-яких двох точок $x, y \in X$ існує неперервна функція $\Gamma: [0, 1] \rightarrow X$ така, що $\Gamma(0) = x$ і $\Gamma(1) = y$ (тобто існує крива, яка лежить у множині X , і з'єднує ці дві точки).

Справедливі такі глобальні властивості неперервних функцій декількох змінних.

Теорема 17 *Нехай $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервною на компактній множині $K \subset \mathbb{R}^m$. Тоді*

1. f є рівномірно неперервною на K .
2. f є обмеженою на K .
3. Якщо $n = 1$, то f набуває своє найбільше і найменше на множині K значення.

Теорема 18 Якщо функція $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на лінійно зв'язній множині $X \subset \mathbb{R}^m$ і $a, b \in X$, то для будь-якого C з відрізка з кінцями в точках $f(a)$ і $f(b)$ існує точка $c \in X$ така, що $f(c) = C$.

3.2 Приклади розв'язання задач

Задача 7 Доведіть, що різниця відкритої і замкненої множини у \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ є відкритою множиною.

Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$ є відкритою множиною, а $F \subset \mathbb{R}^n$ є замкненою. Оскільки справедлива рівність

$$G \setminus F = G \cap (\mathbb{R}^n \setminus F),$$

і множина $\mathbb{R}^n \setminus F$ є відкритою, то різниця $G \setminus F$ є перетином двох відкритих множин, а отже є відкритою.

Задача 8 Доведіть, що множина $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \neq 1\}$ є відкритою і не є лінійно зв'язною.

Нехай $(x, y) \in E$. Тоді або $x^2 + y^2 > 1$, або $x^2 + y^2 < 1$. Розглянемо перший випадок, другий може бути розглянуто аналогічно. Існує $\varepsilon > 0$ таке, що $x^2 + y^2 > (1 + \varepsilon)^2$. Покажемо, що $B((x, y), \varepsilon) \subset E$. Дійсно, якщо $(a, b) \in B((x, y), \varepsilon)$, то

$$d((a, b), (0, 0)) \geq d((x, y), (0, 0)) - d((x, y), (a, b)) > 1 + \varepsilon - \varepsilon = 1,$$

і отже $(a, b) \in E$. Тому множина E є відкритою.

Припустимо, що множина E є лінійно зв'язною. Розглянемо неперервну функцію $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Тоді $f(0, 0) = 0$, $f(1, 1) = 2$, а тому за теоремою 18 існує точка $(x, y) \in E$ така, що $f(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Але це суперечить означенню множини E .

Задача 9 Доведіть, що функція $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ є неперервною тоді і тільки тоді, коли прообраз будь-якої відкритої множини у \mathbb{R}^m є відкритою множиною у \mathbb{R}^n .

Нехай функція f є неперервною, $A \subset \mathbb{R}^m$ є відкритою множиною, $x \in f^{-1}(A)$ і $y = f(x)$. Оскільки множина A є відкритою, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B(y, \varepsilon) \subset A$. Оскільки функція f є неперервною у точці x , то знайдеться $\delta > 0$ таке, що $f(B(x, \delta)) \subset B(y, \varepsilon)$, тобто $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(y, \varepsilon)) \subset f^{-1}(A)$. Звідси випливає відкритість множини $f^{-1}(A)$ і необхідність доведено.

Доведемо тепер достатність. Нехай прообраз будь-якої відкритої множини у \mathbb{R}^m є відкритою множиною у \mathbb{R}^n . Нехай $x \in \mathbb{R}^n$ — це довільна точка, $y = f(x)$ і $V \subset \mathbb{R}^m$ — це довільний окіл точки y . За умовою множина $U := f^{-1}(V)$ є відкритою множиною, що містить точку x , а отже $B := U \setminus \{x\}$ є елементом бази $z \rightarrow x$. Крім того, $f(B) \subset V$, а отже $\lim_{z \rightarrow x} f(z) = y = f(x)$, тобто функція f є неперервною у точці x . З довільності точки x випливає неперервність функції f .

Задача 10 Нехай $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ є неперервною функцією. Доведіть, що образ $f(K)$ компактної множини $K \subset \mathbb{R}^n$ є компактною множиною у \mathbb{R}^m .

Нехай $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ є відкритим покриттям множини $f(K)$. Очевидно, що сім'я $\{f^{-1}(K_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ є покриттям множини K ; крім того, згідно з задачею 9, $f^{-1}(K_\alpha)$ є відкритою множиною для довільного $\alpha \in A$, тобто ця сім'я є відкритим покриттям компактної множини K . Тоді з цього покриття можна вибрати скінченне підпокриття $\{f^{-1}(K_{\alpha_i})\}_{i=1}^s$, $s \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in A$, яке породжує скінченне підпокриття $\{K_{\alpha_i}\}_{i=1}^s$, $s \in \mathbb{N}$ множини $f(K)$. Тому множина $f(K)$ є компактною.

3.3 Задачі для самотійного розв'язання

1. Побудувати послідовність відкритих множин у \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, перетин яких не є відкритою множиною.
2. Побудувати послідовність замкнених множин у \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, об'єднання яких не є замкненою множиною.
3. Нехай задано неперервну функцію $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ і $c \in \mathbb{R}$. Доведіть, що множини

$$(a) \{x \in \mathbb{R}^n: f(x) > c\}; \quad (б) \{x \in \mathbb{R}^n: f(x) < c\}$$

є відкритими.

4. Нехай задано неперервну функцію $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ і $c \in \mathbb{R}$. Доведіть, що множини

$$(a) \{x \in \mathbb{R}^n: f(x) \geq c\}; \quad (б) \{x \in \mathbb{R}^n: f(x) \leq c\}$$

є замкненими.

5. Нехай $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ є непорожньою множиною. Для $x \in \mathbb{R}^n$ позначимо через $d(x, E) := \inf_{y \in E} d(x, y)$ відстань між точкою x і множиною E . Доведіть, що множини

$$(a) \{x \in \mathbb{R}^n: d(x, E) < 1\}; \quad (б) \{x \in \mathbb{R}^n: d(x, E) > 1\}$$

є відкритими, а множини

$$(a) \{x \in \mathbb{R}^n: d(x, E) \leq 1\}; \quad (б) \{x \in \mathbb{R}^n: d(x, E) \geq 1\}$$

є замкненими.

6. Знайти відстань між точкою $x = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ і множиною $E = \{(0, x_2, x_3, \dots, x_n): x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

7. Знайти відстань між точкою $x = (2, \dots, 2) \in \mathbb{R}^n$ і множиною $E = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$.
8. Доведіть, що об'єднання двох лінійно зв'язних множин, які мають спільну точку, є лінійно зв'язною множиною.
9. Відстанню між двома множинами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, називається величина $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$. Побудувати дві замкнені множини A, B такі, що $A \cap B = \emptyset$ і $d(A, B) = 0$.
10. Доведіть, що $d(A, B) > 0$ для довільних двох компактних множин A, B , що не перетинаються.
11. Чи є лінійно зв'язною множина
 - (а) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
 - (б) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 < 1\}$;
 - (в) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 < 1\}$?
12. Доведіть, що якщо множина $E \subset \mathbb{R}$ є зв'язною, то E є проміжком (тобто відрізок, напівінтервал, інтервал, промінь, або вся пряма).
13. Знайти $f(x, y)$, якщо $f\left(x + y, \frac{x}{y}\right) = x^2 - y^2$.
14. Знайти $f(x, y)$, якщо $f\left(xy, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.
15. Знайти $f(x, y)$, якщо $f(x + y, x - y) = y(x + y)$.
16. Показати, що для функції $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1; \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1,$$

а $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ не існує.

17. Показати, що для функції $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0,$$

а $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ не існує.

18. Показати, що для функції $f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, повторні границі $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ та $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ не існують. Обчислити $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

19. Чи існує границя $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$?

20. Чи може бути опущеною умова лінійної зв'язності множини X у теоремі 18?

Література

- [1] W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in mathematical analysis II: Continuity and differentiation*. Student Mathematical Library. AMS, 2001.
- [2] М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А.В. Чайковський. *Збірник задач з математичного аналізу, у 2 ч.* Київський університет, 2005.
- [3] А. Я. Дороговцев. *Математичний аналіз: Підручник. У 2 ч.* Київ: Либідь, 1993.
- [4] Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, Лященко М. Я., Г. О. Михалін, М. І. Шкіль. *Математичний аналіз у задачах і прикладах: Навч. Посібник. у 2 ч.* Київ: Вища школа, 2002.